ВАРИАНТ 11

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 9 \\ 31 & 23 & 55 & 42 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $3\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 8 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 \qquad + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 1, \\ -6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7x_4 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 = -10, \\ x_1 - x_2 - 7x_3 + 13x_4 = -8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = -8. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \\ - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 \qquad + 3x_3 - 10x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{7;5;10\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{2;-3;-11\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{3;2;5\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{15;15;36\}$.

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 11

1. а) – 27; б) 90; в) 10.

2. а) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 2 \\ 11 & 11 & -3 \\ -15 & -13 & -5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -11 & -5 & 3 \\ 9 & 20 & 17 \\ -7 & -17 & -9 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -9 & -2 & -5 \\ 14 & 4 & 6 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 24 & 13 \\ -34 & -18 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 5 & -2 \\ -5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 21 & 14 & 14 \\ 33 & 10 & 9 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix} 10 & 13 \\ -57 & 51 \\ 11 & -11 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ -31 \\ 22 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 1-\frac{23}{29}x_4 \\ 2-\frac{45}{29}x_4 \\ 1+\frac{57}{29}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$; б) X=$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

9. а) X=$\begin{pmatrix} -3x_3+5x_4 \\ x_3-3x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) Общее решение X=$\begin{pmatrix} \frac{4}{3}x_4 \\ \frac{5}{3}x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$. ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 3, x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 6, x = \beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 9, x = \gamma\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_{1,2} = 1,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_{3,4} = -1,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{\text{x}}$={2;-1;1}

ВАРИАНТ 12

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & 1 \\ 5 & 45 & 40 & 15 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-0{,}5\mathbf{A} + \mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 16 & -18 \\ 8 & -3 & -3 \\ 33 & -14 & 51 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 4x^2 - 3x - 5$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 8, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 7, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 7. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{2;1;6\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-4;0;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{5;-3;1\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{21;-18;30\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 12

1. а) –19; б) – 5; в) – 12.

2. а) $\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -4 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 9 & 0 & -2 \\ -14 & 2 & 0 \\ -4 & 7 & -11 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 2 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -5 \\ 10 & 4 & -8 \\ -3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 7 & 13 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

8. а) $X = \begin{pmatrix} 3 - x_3 + 2x_5 \\ 1 - x_3 + 2x_5 \\ x_3 \\ 1 - x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. а) Общее решение X= $\begin{pmatrix} -x_4 \\ -2x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $X = \begin{pmatrix} -11x_4 \\ -12x_4 + 3x_5 \\ -9x_4 + 4x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ -12 \\ -9 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 6,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_{2,3} = -3,\ x = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

б) $\lambda_1 = 0,\ x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 7,\ x = \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$;

$\lambda_{3,4} = -2,\ x = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. **11.** в) $\overline{x} = \{3;5;7\}$.

ВАРИАНТ 13

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 1 & -16 & -4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $4\mathbf{A} - \mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 11 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = x^2 + 2x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 13, \\ 9x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 15, \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 12x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&1\\2&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&-3&0\\1&0&0&-3\\-3&0&0&1\\0&-3&1&0\end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3,\bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1=\{2;4;-2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2=\{4;12;6\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3=\{-2;6;4\}$, $\bar{\mathbf{x}}=\{5;0;-7\}$

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1$, $\bar{\mathbf{e}}_2$, $\bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1,\bar{\mathbf{a}}_2,\bar{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 13

1. а) –6; б) – 12; в) – 9.

2. а) $\begin{pmatrix}7&10&4\\7&28&8\\-6&-15&-5\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}8&-39&-10\\40&-15&0\\-21&37&7\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0&1&1\\-1&2&1\\3&-7&5\end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix}10&4&6\\17&2&9\\1&-2&-3\end{pmatrix}$. **5.** $\begin{pmatrix}2&6&-6&2\\-6&-36&48&-18\\25&39&-15&1\end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

8. а) $X=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 3-x_2 \\ x_2 \\ x_3 \\ 2-2x_2+x_3 \end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix} 2x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) Общее решение $X=\begin{pmatrix} x_5 \\ x_5 \\ -x_5 \\ -x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$, $x_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1=2,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=5,\ x=\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3=0,\ x=\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1=2,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2=-2,\ x=\beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3=4,\ x=\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_4=-4,\ x=\delta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\{1.5;0;-1\}$.

ВАРИАНТ 14

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$,
б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,
в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 37 & -21 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 6 & 13 \\ 5 & -10 & -3 \\ 3 & -10 & -13 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 4x^2 - 3x + 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -5 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = -4, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 11, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 9x_4 = 40, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 37. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_4 = 14. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + x_2 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы:

а) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, б) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$.

11. Относительно базиса $\bar{\mathbf{e}}_1=\{1;0;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_2=\{0;1;0\}$, $\bar{\mathbf{e}}_3=\{0;0;1\}$ заданы векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3, \bar{\mathbf{x}}$:

$\bar{\mathbf{a}}_1=\{1;2;-4\}$, $\bar{\mathbf{a}}_2=\{2;-2;-2\}$, $\bar{\mathbf{a}}_3=\{-4;-2;1\}$, $\bar{\mathbf{x}}=\{7;2;7\}$

а) доказать, что векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$ к базису $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\bar{\mathbf{x}}$ в базисе $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \bar{\mathbf{e}}_3$ и $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 14

1. а) –1; б) 12; в) 200.

2. а) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 12 & -2 & 6 \\ 10 & -6 & -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 10 & -10 & -6 \\ 20 & -25 & -16 \\ 48 & -18 & 15 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \\ 11 & 15 & 8 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 5 \\ -12 & 24 & 5 \\ -11 & 23 & 8 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 11 & -19 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -12 \end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8. а) X= $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$; б) $X = \begin{pmatrix} x_4 - 3 \\ x_4 - 2 \\ x_4 - 1 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

9. а) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_5 - x_6 \\ -4x_5 - 3x_6 \\ 0 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) Общее решение $X = \begin{pmatrix} -11x_3 \\ x_3 \\ x_3 \\ 6x_3 \end{pmatrix}$, $x_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 3,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -2, x = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_3 = 6, x = \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

б) $\lambda_1 = 2,\ x = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 8,\ x = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$;

$\lambda_3 = 12,\ x = \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_4 = -4,\ x = \delta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x} = \{1;1;-1\}$.

ВАРИАНТ 15

1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 10 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & 3 & 1 \\ 2 & 12 & -1 & -3 \end{vmatrix}$.

2. Даны матрицы $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Найти: а) матрицу $-2\mathbf{A} + 2\mathbf{B}$,

б) матрицу $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$,

в) матрицу $\mathbf{A}^{-1}$. Сделать проверку.

3. Решить матричные уравнения:

а) $\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 & 14 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \\ 11 & 15 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти $f(\mathbf{A})$, если $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Перемножить матрицы:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

6. Решить системы методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 6x_1 - 4x_2 - x_3 = -8, \\ -3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 + 3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6 = 0, \\ 6x_1 + 8x_2 + \ \ x_3 + 5x_4 + 8 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 8 = 0. \end{cases}$

7. Решить системы матричным методом:

а) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + \ \ x_3 = -2, \\ 5x_1 - x_2 - \ \ x_3 = 10, \\ \ \ x_1 - x_2 + 5x_3 = -12. \end{cases}$

8. Найти общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} \ \ x_1 + \ \ x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - \ \ x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \ \ x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 - \ \ x_4 = -2, \\ \ \ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - \ \ x_4 = -5, \\ 2x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

9. Найти общее решение системы линейных однородных уравнений и записать ее фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 + \ \ 3x_5 + 2x_6 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \ \ 5x_5 + 3x_6 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 + 9x_6 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 + \ \ x_4 + \ \ 2x_5 + \ \ x_6 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \ \ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ \ x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + \ \ x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

10. Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$\text{а)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. Относительно базиса $\overline{\mathbf{e}}_1 = \{1;0;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_2 = \{0;1;0\}$, $\overline{\mathbf{e}}_3 = \{0;0;1\}$ заданы векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3, \overline{\mathbf{x}}$:

$\overline{\mathbf{a}}_1 = \{1;-3;-1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_2 = \{-3;1;1\}$, $\overline{\mathbf{a}}_3 = \{-1;1;5\}$, $\overline{\mathbf{x}} = \{3;-3;3\}$

а) доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ образуют базис пространства R_3;

б) записать матрицу $\mathbf{A}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ и матрицу $\mathbf{B}$ перехода от базиса $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$ к базису $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$;

в) найти координаты вектора $\overline{\mathbf{x}}$ в базисе $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$;

г) записать формулы, связывающие координаты одного и того же вектора в базисах $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \overline{\mathbf{e}}_3$ и $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{a}}_3$.

ОТВЕТЫ К ВАРИАНТУ 15

1. а) –3; б) 12; в) 26.

2. а) $\begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & -4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -15 & 17 \\ 1 & 2 & 1 \\ 7 & 7 & -4 \end{pmatrix}$; в) $\dfrac{1}{11}\begin{pmatrix} 4 & -8 & 7 \\ 2 & 7 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. а) $\begin{pmatrix} 9 & -5 \\ -10 & 6 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. **4.** $\begin{pmatrix} 7 & 9 & -1 \\ 10 & 11 & -8 \\ -7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. $\begin{pmatrix} 11 & -22 & 19 & 0 & 0 \\ 9 & -27 & 32 & 0 & 0 \\ 13 & -17 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

7. а) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **8.** а) $X = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -6+8x_4 \\ 1-13x_4 \\ 15-6x_4 \\ 7x_4 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

9. а) $X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-7x_2+10x_3+5x_5) \\ x_2 \\ x_3 \\ -2x_2+3x_3+x_5 \\ x_5 \end{pmatrix}$, ФСР: $x_1 = \begin{pmatrix} -7/2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_3 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1+x_4-2x_5 \\ -x_4-3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$.

10. а) $\lambda_1 = 0, x=\alpha\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \lambda_2 = 7, x=\beta\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}; \lambda_3 = -2, x=\gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

б) $\lambda_1 = 0,\ x=\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \lambda_{2,3,4} = 4,\ x=\beta\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

11. в) $\overline{x}=\{1;-1;1\}$.