ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик,
Е.Г. Пахомова, О.Н. Имас

ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 512.05(075.8)
ББК 22.144я73
Л436

Шерстнева А.И.

Л436 Лекции по высшей алгебре: учебное пособие/ А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик, Е.Г. Пахомова, О.Н. Имас; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 88 с.

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса высших учебных заведений, изучающих в том или ином объёме высшую математику.

В пособии изложен материал по разделам «Линейная алгебра» (матрицы, определители, системы линейных уравнений, вещественные линейные пространства, линейные операторы) и «Векторная алгебра». Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением примеров и типовых задач.

УДК 512.05(075.8)
ББК 22.144я73

Рецензенты

Кандидат технических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
И.Г. Устинова

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики СТИ НИЯУ МИФИ
И.Л. Фаустова

Оглавление

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Понятие матрицы

Определение. ***Матрицей размера*** $m \times n$ называется таблица, образованная из элементов некоторого множества и имеющая m строк и n столбцов. Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***, а если $m = n$, то ***квадратной порядка*** n.

Элементы, из которых составлена матрица, называют ***элементами*** матрицы. Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Пример.
a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца,
a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Матрицы обычно обозначают большими латинскими буквами и при записи заключают в круглые скобки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используется также сокращенная запись: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Две матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ считаются ***равными***, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, то есть

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Наиболее часто рассматриваются матрицы, элементами которых являются числа. Такие матрицы называются ***числовыми***.

1.2. Некоторые виды матриц

1. Матрицу размера $m \times 1$ называют ***столбцом длины*** m.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу размера $1 \times n$ называют ***строкой длины*** n.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

3. ***Нулевой*** матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Будем обозначать её буквой $\mathbf{O}$.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Условную линию в квадратной матрице $\mathbf{A}$ порядка n, на которой расположены элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} называют ***главной диагональю*** этой матрицы.

Условную линию в квадратной матрице $\mathbf{A}$ порядка n, на которой расположены элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, …, a_{n1}, называют ***побочной диагональю*** этой матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется ***единичной***.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу принято обозначать буквой $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{E}_n$, если требуется указать порядок матрицы).

5) Квадратные матрицы, у которых все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, называются ***треугольными***.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица $\mathbf{A}$ называется ***верхней треугольной***, а $\mathbf{B}$ – ***нижней треугольной***.

6) Прямоугольную матрицу называют ***трапециевидной***, если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

7) Прямоугольная матрица называется ***ступенчатой***, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатая матрица,

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ – не является ступенчатой.

1.3. Линейные операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся умножение матрицы на число и сложение матриц.

Определение. ***Произведением*** матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ ***на число*** α называется такая матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$ на число α, то есть

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на число α обозначают $\alpha\mathbf{A}$.

Пример.

Если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, то $2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $(-3)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}$.

Частным случаем произведения матрицы $\mathbf{A}$ на число является произведение $(-1)\mathbf{A}$. Такую матрицу называют ***противоположной матрице*** $\mathbf{A}$ и обозначают $-\mathbf{A}$.

Определение. ***Суммой*** двух матриц $\mathbf{A}=(a_{ij})$ и $\mathbf{B}=(b_{ij})$ одинакового размера, называется такая матрица $\mathbf{C}=(c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, то есть

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}.$$

Сумму матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Пример.

Если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}$.

Частным случаем суммы двух матриц является сумма $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$. Такую матрицу называют ***разностью*** матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и обозначают $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Введенные таким образом линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$;
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$;
7. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$;
8. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

1.4. Умножение матриц

Определение. Пусть $\mathbf{A}=(a_{1i})$ – строка и $\mathbf{B}=(b_{i1})$ –столбец одинаковой длины n. ***Произведением строки*** **A** ***на столбец*** **B** называется число c (т.е. матрица размера 1×1), равное сумме произведений их соответствующих элементов, то есть

$$c=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}+a_{13}\cdot b_{31}+\ldots+a_{1n}\cdot b_{n1}.$$

Пример.

Если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-5\\ 3\\ 4\end{pmatrix}$, то произведением $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ будет число $c=1\cdot(-5)+2\cdot3+(-3)\cdot4=-11$.

Определение. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – матрица размера $m\times n$, $\mathbf{B}=(b_{ij})$ – матрица размера $n\times k$ (то есть количество столбцов в матрице $\mathbf{A}$ совпадает с количеством строк матрицы $\mathbf{B}$). ***Произведением*** матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B}$ называется матрица $\mathbf{C}$ размера $m\times k$ такая, что каждый ее элемент c_{ij} является произведением строки матрицы $\mathbf{A}$ с номером i на столбец матрицы $\mathbf{B}$ с номером j, то есть

$$c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+a_{i3}\cdot b_{3j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}.$$

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ или $\mathbf{AB}$.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&-4&-2\end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$. В результате получим матрицу

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&3&1\\2&-4&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 2&1\cdot 3+2\cdot(-4)&1\cdot 1+2\cdot(-2)\\0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2&0\cdot 3+(-1)\cdot(-4)&0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5&-3\\-2&4&2\end{pmatrix}.$$

2. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&-1&5\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&7\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ можно умножить на $\mathbf{A}$. В результате получим матрицы

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&-1&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&7\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+0&7-8+0\\3-3-5&21-4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-1\\-5&17\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1&7\\3&4\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\3&-1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+21&-2-7&0+35\\3+12&-6-4&0+20\\-1+0&2+0&0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22&-9&35\\15&-10&20\\-1&2&0\end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что если произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ существуют, то в общем случае $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$. Но для некоторых матриц равенство $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ возможно. Если $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называют ***перестановочными*** или ***коммутативными***.

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами (при условии, что все записанные произведения имеют смысл):

1. $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$,
2. $\mathbf{AO}=\mathbf{OA}=\mathbf{O}$;
3. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
4. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;
5. $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$.

1.5. Транспонирование матриц

Определение. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, полученная из $\mathbf{A}$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной к*** $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^T$. Операция нахождения матрицы $\mathbf{A}^T$ называется ***транспонированием*** матрицы $\mathbf{A}$.

Пример.

Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
3. $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$;
4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

1.6. Понятие определителя

Приведём некоторые определения, которые необходимы для того, чтобы ввести понятие определителя.

Пусть n – натуральное число. ***Факториалом*** числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, то есть

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n .$$

Факториал числа 0 полагают равным 1.

Расположение n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ в любом порядке называется ***перестановкой*** этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n .$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, то есть если $\alpha_i > \alpha_k$. Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется ***числом инверсий*** в перестановке.

Пример.

В перестановке $1, 4, 5, 3, 2$ инверсию образуют следующие пары чисел: 4 и 3, 4 и 2, 5 и 3, 5 и 2, 3 и 2. Число инверсий -5.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

Определение. ***Определителем*** матрицы $\mathbf{A}$ (***определителем порядка*** n) называется сумма $n!$ членов, составленных следующим образом. Членами определителя служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. При этом произведение берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число, а со знаком «минус» – в противном случае.

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ обозначают:

$$|\mathbf{A}|, \quad \det \mathbf{A}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называют соответственно элементами, строками, столбцами определителя матрицы.

Согласно определению получаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

По определению можно получить и формулу для нахождения определителя третьего порядка:

$$2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы пользуются так называемым ***правилом треугольников***.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)\cdot(-3) + 3\cdot 3\cdot 4 + 5\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-5\cdot(-1)\cdot 4 - (-2)\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot(-3) =$$

$$= -6 + 36 + 5 - (-20) - (-6) - (-9) = 70.$$

Определители более высоких порядков вычислять по определению довольно затруднительно, так как они являются суммами достаточно большого числа слагаемых ($4! = 24$, $5! = 120$ и т.д.). Способы вычисления таких определителей будет рассмотрены далее.

1.7. Свойства определителей

1. *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.*

Из этого свойства следует, что строки и столбцы в определителе равноправны, то есть любое утверждение, верное для строк определителя, будет верно и для его столбцов.

2. *При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. *Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. *Определитель, у которого каждый элемент некоторой строки (столбца) является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанной строке (столбце) стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые; остальные строки (столбцы) у всех определителей одинаковые.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1 & 2-3 & 1+4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Определение. Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлена в виде суммы других k строк, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то говорят, что данная строка (столбец) является ***линейной комбинацией*** указанных строк (столбцов).

5. *Определитель равен нулю если:*

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (два одинаковых столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (то есть отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Пример.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, так как третий столбец определителя является линейной комбинацией второго и первого с коэффициентами 2 и -1:

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-4 \\ 16-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

6. *Определитель не изменится, если к каждому элементу одной строки (столбца) прибавить соответствующий элемент другой строки (столбца), умноженный на некоторое число.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. *Если* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка* n*, то*

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

1.8. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$ и пусть k – некоторое число, такое, что $1 \le k$, $k \le m$, $k \le n$.

Определение. Выберем в матрице $\mathbf{A}$ произвольно k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель M_k. Этот определитель называют ***минором*** k ***-го порядка*** матрицы $\mathbf{A}$ (её определителя).

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Выбирая первую строку и четвертый столбец, получаем минор первого порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_1 = |7|.$$

Выбирая вторую, третью строки и первый, второй столбцы, получаем минор второго порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выбирая первую, вторую, третью строки и первый, третий, четвертый столбцы, получаем минор третьего порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кроме полученных миноров, у матрицы $\mathbf{A}$ есть и другие миноры первого, второго и третьего порядка. Их можно найти, если выбирать строки и столбцы с новыми номерами.

Для квадратной матрицы, кроме понятия минора, вводится понятие дополнительного минора и алгебраического дополнения.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Выберем в $\mathbf{A}$ минор k-го порядка M_k. ***Дополнительным минором*** к минору M_k называется определитель матрицы, оставшейся после вычёркивания тех строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$, которые входят в минор $\mathbf{M}_k$. ***Алгебраическим дополнением*** A_k минора M_k называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в минор M_k.

Пример.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда алгебраическим дополнением к нему будет

$$A_2 = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Дополнительный минор элемента a_{ij} (будем обозначать его M_{ij}) – это определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. А алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (будем обозначать его A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.9. Теорема Лапласа и ее следствие

Теорема 1.1 (Лапласа). *Пусть в определителе порядка* n *выбрано* k *строк (столбцов), где* $1 \le k \le n-1$. *Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров* k*-го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Следствие 1.2 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in},$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Полученные выражения называют ***разложением определителя по строке*** или ***столбцу*** соответственно. Они позволяют свести вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Пример.

Вычислим

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложив по первому столбцу, получаем

$$|\mathbf{A}|=1\cdot A_{11}+(-1)\cdot A_{21}+(-1)\cdot A_{31}+2\cdot A_{41}=$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+(-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot1\cdot17+(-1)\cdot(-1)\cdot(-57)+(-1)\cdot1\cdot(-22)+2\cdot1\cdot(-42)=-102.$$

Замечание. Используя свойства определителей, можно преобразовать определитель порядка n так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме одного, равнялись нулю. Тогда раскладывая определитель по этой строке или столбцу, получаем всего лишь один определитель порядка $n-1$, то есть значительно уменьшаем количество вычислений.

1.10. Понятие обратной матрицы

Определение. ***Обратной*** матрице $\mathbf{A}$ называется матрица, обозначаемая $\mathbf{A}^{-1}$, такая, что $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$.

Используя определение обратной матрицы, можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.3. *Если матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу, то $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратные матрицы одинакового порядка.*

Доказательство.

Чтобы существовали произведения $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ необходимо, чтобы матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имели соответственно размеры $n\times m$ и $m\times n$.

Тогда матрица $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ будет иметь размер $n\times n$, а матрица $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ – размер $m\times m$. Но для равенства $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ необходимо, чтобы размеры матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}$ совпадали, то есть $n=m$.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если обратная матрица существует, то она единственная.*

Доказательство.

Пусть существует две матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, такие, что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}.$$

Тогда существует и произведение $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$, причем согласно свойствам операции умножения матриц,

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=(\mathbf{B}\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{C}=\mathbf{E}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{C},$$

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=\mathbf{B}\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}=\mathbf{B}.$$

Получаем, что $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную матрицу, то её определитель отличен от нуля.*

Доказательство.

В лемме 1.3 утверждается, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратные матрицы одинакового порядка. Тогда согласно свойству 7 определителей

$$\left|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right|=\left|\mathbf{A}\right|\cdot\left|\mathbf{A}^{-1}\right|.$$

Но $\left|\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}\right|=|\mathbf{E}|$, а $\left|\mathbf{E}\right|=1$, следовательно, $\left|\mathbf{A}\right|\cdot\left|\mathbf{A}^{-1}\right|=1$, откуда получаем, что $\left|\mathbf{A}\right|\neq 0$ и $\left|\mathbf{A}^{-1}\right|\neq 0$.

Лемма доказана.

1.11. Нахождение обратной матрицы

Оказывается, что утверждение леммы 1.5 верно и в обратную сторону. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6 (об обратной матрице). *Пусть* $\mathbf{A}$ *– квадратная матрица порядка* n. *Матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель* $\left|\mathbf{A}\right|$ *отличен от нуля. Причем*

$$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{\left|\mathbf{A}\right|}\cdot\mathbf{S}^{T},$$

где $\mathbf{S}$ *– матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной***.

Матрицу $\mathbf{S}^T$ называют ***союзной*** к матрице $\mathbf{A}$.

Доказательство.

1) Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу. Тогда согласно лемме 1.5, $|\mathbf{A}| \neq 0$.

2) Пусть $|\mathbf{A}| \neq 0$. Надо доказать, что матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу. Для этого покажем, что матрица $\dfrac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$ является обратной $\mathbf{A}$, то есть что $\mathbf{A} \cdot (\dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) = (\dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

а) Докажем равенство $\mathbf{A} \cdot (\dfrac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) = \mathbf{E}$, то есть $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{\mathbf{T}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы матрицы $\mathbf{D}$, стоящие на главной диагонали:

$$d_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$
$$d_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n},$$
$$\ldots$$
$$d_{nn} = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn}.$$

Но согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа, полученные выражения являются разложениями $|\mathbf{A}|$ по строкам, то есть

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = |\mathbf{A}|,$$
$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} = |\mathbf{A}|,$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = |\mathbf{A}|,$$

откуда $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = |\mathbf{A}|$.

Найдем остальные элементы матрицы $\mathbf{D}$. Пусть $i \neq j$, тогда

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Заменим в матрице $\mathbf{A}$ элементы строки с номером j на соответствующие элементы строки с номером i. Построенную таким образом новую матрицу обозначим $\mathbf{A}'$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице $\mathbf{A}'$ две одинаковые строки, $|\mathbf{A}'| = 0$. Запишем теперь разложение $|\mathbf{A}'|$ по строке с номером j (согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа):

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A'_{j1} + a_{i2}A'_{j2} + \ldots + a_{in}A'_{jn}.$$

Но в матрицах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ все строки, кроме строк с номером j, одинаковые, следовательно,

$$A_{j1} = A'_{j1}, \quad A_{j2} = A'_{j2}, \quad \ldots, \quad A_{jn} = A'_{jn},$$

то есть

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Получаем, что при $i \neq j$

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = |\mathbf{A}'| = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) = \mathbf{E}.$$

б) Аналогичным образом доказывается, что $\left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Итак, согласно доказанным пунктам а) и б), матрица $\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$ является обратной $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

1.12. Понятие ранга матрицы

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$.

Определение. ***Рангом матрицы*** называют максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля. ***Базисным минором*** матрицы называют её отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются ***базисными***.

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ обычно обозначают $r(\mathbf{A})$.

Ранг матрицы легко найти, если она – треугольная, трапециевидная или ступенчатая. Рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

1. Треугольные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \text{ ранг} - 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ – базисный минор.}$$

2. Трапециевидные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ ранг} - 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ – базисные миноры.}$$

3. Ступенчатые матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \text{ ранг} - 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \text{ – базисные миноры.}$$

Итак, *ранг треугольных, трапециевидных и ступенчатых матриц равен количеству ненулевых строк в них.*

Нахождение ранга матрицы произвольного вида по определению обычно бывает весьма затруднительно, так как требует вычисления большого количества определителей различного порядка. Существенно облегчает решение этой задачи метод элементарных преобразований.

1.13. Метод элементарных преобразований

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующего вида:

1) умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число;

3) перестановка двух строк (столбцов).

Определение. Две матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются ***эквивалентными***, если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентны, то пишут: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7 (об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований). *Ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований* (*эквивалентные матрицы имеют равные ранги*).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что элементарные преобразования матрицы сохраняют ее ненулевые миноры (они могут лишь изменить их знаки).

Учитывая теорему 1.7 и то, что ранг матрицы ступенчатого вида легко найти, ранг произвольной матрицы можно найти следующим образом:

1) с помощью элементарных преобразований строк получить для матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентную матрицу $\mathbf{B}$, имеющую ступенчатый вид;

2) определить ранг матрицы $\mathbf{B}$ и, следовательно, матрицы $\mathbf{A}$.

Такой способ нахождения ранга матрицы называется ***методом элементарных преобразований***.

Замечание. При нахождении ранга матриц элементарные преобразования мы будем производить только над строками матрицы. Это условие будет необходимо в дальнейшем при решении систем линейных уравнений.

Пример.

Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку матрицы на -3 и прибавим ко второй; затем умножим первую строку на -1 и прибавим к третьей. После этого прибавим к третьей строке вторую. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ имеет ступенчатый вид, $r(\mathbf{B}) = 2$ (базисным минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$). Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ также равен двум, $r(\mathbf{A}) = 2$.

1.14. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы

В пункте 1.7 было введено понятие линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k$$

называется линейной комбинацией строк $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Будем обозначать нулевую строку (столбец) o.

Определение. Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$, то есть нулевой строке (столбцу).

Если же равенство $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то строки (столбцы) называют ***линейно независимыми.***

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} – \text{ строка } S_1 \\ – \text{ строка } S_2 \\ – \text{ строка } S_3 \\ – \text{ строка } S_4 \end{array}$$

$2S_1 + S_2 - S_4 = (0, 0, 0, 0) = o$. Следовательно, строки S_1, S_2, S_4 – линейно зависимые.

Лемма 1.8 (о линейной зависимости). *Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство.

1) Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 S_1 = -\alpha_2 S_2 - \ldots - \alpha_k S_k$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} S_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} S_k,$$

то есть S_1 является линейной комбинацией $S_2, \ldots, S_k$.

2) Пусть, например, S_1 является линейной комбинацией $S_2, \ldots, S_k$. Тогда $S_1 = \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k$ или $-S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$. Коэффициент при S_1 равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

1.15. Теорема о базисном миноре

Теорема 1.9 (о базисном миноре). *1) Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.*

2) Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство.

Докажем утверждения теоремы для столбцов матрицы. Для строк доказательство проводится аналогично.

1) Допустим, базисные столбцы матрицы – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторый базисный столбец матрицы является линейной комбинацией остальных её базисных столбцов. Следовательно, и соответствующий столбец базисного минора является линейной комбинацией остальных его столбцов. Получаем, что согласно свойствам определителя, базисный минор равен нулю, а это противоречит определению базисного минора. Таким образом, базисные столбцы – линейно независимы.

2) Пусть r – ранг матрицы $\mathbf{A}$, M – её базисный минор. Для простоты обозначений будем считать, что

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $C_1, C_2, \dots, C_n$ столбцы матрицы $\mathbf{A}$. Покажем, что любой столбец C_k, где $1 \le k \le n$, является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, \dots, C_r$.

а) Пусть $k \le r$. Так как

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \ldots + 0 \cdot C_r, \\ C_2 &= 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + \ldots + 0 \cdot C_r, \\ &\ldots, \\ C_r &= 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \ldots + 1 \cdot C_r, \end{aligned}$$

столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, \dots, C_r$.

б) Пусть $k > r$, рассмотрим определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}, \text{ где } 1 \le i \le n.$$

Если $i \le r$, то в определителе Δ_i две одинаковые строки, поэтому согласно свойствам определителя, $\Delta_i = 0$.

Если $i > r$, то Δ_i является минором матрицы $\mathbf{A}$, порядок которого больше r – ранга матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, $\Delta_i = 0$.

Таким образом, $\Delta_i = 0$ для всех i, где $1 \le i \le n$.

Определители Δ_i имеют одинаковые строки, кроме последней строки. Следовательно, алгебраические дополнения к соответствующим элементам их последних строк также одинаковые. Тогда разложив определители Δ_i по последней строке, получаем

$$a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + \ldots + a_{ir} \cdot \alpha_r + a_{ik} \cdot M = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – алгебраические дополнения элементов $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ir}$ соответственно. Итак, для всех i, где $1 \le i \le n$, выполняется

$$a_{ik} = -\frac{\alpha_1}{M} a_{i1} - \frac{\alpha_2}{M} a_{i2} - \ldots - \frac{\alpha_r}{M} a_{ir}$$

$$\Rightarrow \quad C_k = -\frac{\alpha_1}{M} C_1 - \frac{\alpha_2}{M} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_r}{M} C_r.$$

то есть столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

Теорема доказана.

Теорема 1.10 (критерий равенства нулю определителя). *Определитель матрицы* $\mathbf{A}$ *равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.*

Доказательство.

1) Пусть $|\mathbf{A}| = 0$. Покажем, что его строки (столбцы) линейно зависимы.

Обозначим через r ранг матрицы $\mathbf{A}$. Так как $|\mathbf{A}| = 0$, $r < n$.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$. Будем считать, что базисными строками (столбцами) являются $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Тогда согласно теореме 1.9 о базисном миноре,

$$S_{r+1} = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_r S_r \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_r S_r - S_{r+1} + 0 \cdot S_{r+2} + \ldots + 0 \cdot S_n = o.$$

Коэффициент при S_{r+1} равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – линейно зависимы.

2) Пусть строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$ – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторая строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), следовательно, $|\mathbf{A}| = 0$.

Теорема доказана.

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Линейным уравнением с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется уравнение, которое имеет следующий вид

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые числа, называемые ***коэффициентами*** этого уравнения, а b – число, называемое ***свободным членом***.

Если $b = 0$, то уравнение называется ***однородным***. Если $b \neq 0$, то уравнение называется ***неоднородным***.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad \textbf{(2.1)}$$

Обозначим через $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Матрицу $\mathbf{A}$ называют ***матрицей*** или ***основной матрицей*** системы (2.1), а матрицу $\mathbf{A}^*$ – ***расширенной матрицей*** этой системы.

Пусть $\mathbf{X}$ – матрица-столбец неизвестных, $\mathbf{B}$ – матрица-столбец свободных членов:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \qquad \textbf{(2.2)}.$$

Такую запись называют ***матричной формой*** записи системы (2.1).

Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется ***решением системы*** (2.1), если каждое уравнение системы обращается в верное равенство после подстановки вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно.

Решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$ системы (2.1) также можно записать в виде матрицы-столбца

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица удовлетворяет уравнению (2.2).

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют ***совместной***. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и если совместна, то найти все её решения.

Исчерпывающий ответ на вопрос о существовании решений системы (2.1) даёт теорема Кронекера–Капелли.

Теорема 2.1 (Кронекера–Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, то есть*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*).$$

Оказывается, что случай, когда число решений системы линейных уравнений (2.1) конечно и больше единицы, невозможен.

Теорема 2.2. *Если система линейных уравнений совместна, то она имеет единственное решение или бесконечное множество решений.*

Система, имеющая единственное решение, называется ***определенной***. Система, имеющая бесконечное множество решений, называется ***неопределенной***. В последнем случае каждое её решение называют ***частным решением*** системы, а совокупность всех частных решений – ***общим решением*** системы.

С помощью следующей теоремы выясняется, имеет ли система линейных уравнений (2.1) единственное решение.

Теорема 2.3 (критерий единственности решения). *Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, то есть*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n.$$

2.2. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, то есть $m = n$. Тогда основная матрица $\mathbf{A}$ системы квадратная. Если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то системы такого вида называют ***невырожденными***.

Заметим, что если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен её порядку, то есть $r(\mathbf{A}) = n$. Но тогда и $r(\mathbf{A}^*) = n$, следовательно, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$, откуда согласно теореме 2.3, решение системы единственно.

Итак, *невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение.*

Покажем, как можно найти решение невырожденной системы линейных уравнений. Так как $|\mathbf{A}| \neq 0$, то согласно теореме 1.6 об обратной матрице, матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$.

Запишем систему в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Умножим обе части этого равенства на матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ слева. Согласно свойствам операции умножения матриц и определению обратной матрицы, получаем:

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \;\Rightarrow$$

$$(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \qquad \mathbf{(2.3)}$$

Нахождение решения по формуле (2.3) называют ***матричным методом решения*** системы.

Пример.

Решим систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}.$

Так как $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, можно применить матричный метод:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением является $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

2.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Также как и матричный метод, этот метод применятся для решения невырожденных систем линейных уравнений, то есть таких систем, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m = n$) и определитель матрицы системы отличен от нуля ($|\mathbf{A}| \neq 0$).

Теорема 2.4 (Крамера). *Решение невырожденной системы линейных уравнений может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad \textbf{(2.4)}$$

где $\Delta = |\mathbf{A}|$, *а* Δ_i *– определитель, получаемый из определителя* Δ *заменой столбца с номером* i *на столбец свободных членов.*

Формулы (2.4) называют ***формулами Крамера***.

Доказательство.

Решая систему матричным методом, согласно формуле (2.3), имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

а согласно теореме 1.6 об обратной матрице,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T,$$

где $\mathbf{S}$ – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы $\mathbf{A}$. Тогда

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_i \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \ldots & A_{ni} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \cdots \\ b_i \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n \\ \cdots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \ldots + A_{ni}b_n \\ \cdots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}), \text{ где } 1 \leq i \leq n.$$

Рассмотрим теперь определитель Δ_i, получаемый из определителя Δ матрицы $\mathbf{A}$ заменой столбца с номером i на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У определителей Δ и Δ_i все столбцы, кроме столбцов с номером i, одинаковые, следовательно, алгебраические дополнения к соответствующим элементам этих столбцов также одинаковые. Тогда раскладывая определитель Δ_i по столбцу с номером i (согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа), получаем

$$\Delta_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni} \quad \Rightarrow$$

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \ldots + b_n A_{ni}) = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Теорема доказана.

Пример.

Решим систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$.

Так как $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, можно применить метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-1}{-1} = 1$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{1}{-1} = -1$.

2.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

В отличие от двух предыдущих методов, метод Гаусса является универсальным. Он позволяет для произвольной системы линейных уравнений выяснить, совместна ли она, и если да, то найти все её решения.

Введём сначала следующие понятия.

Определение. ***Элементарными преобразованиями*** системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

1) умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;

3) перестановка двух уравнений.

Определение. Две системы называются ***эквивалентными (равносильными)*** если их решения совпадают.

Очевидно, что элементарные преобразования системы приводят к эквивалентной системе.

Процесс решения методом Гаусса состоит из двух этапов, называемых прямой ход и обратный ход.

Прямой ход

1. Элементарными преобразованиями приводим систему к эквивалентной системе, имеющей расширенную матрицу ступенчатого вида.
2. Выясняем, будет ли система совместна, сравнивая ранги основной и расширенной матриц полученной системы.
3. Если система совместна, выбираем в основной матрице полученной системы базисный минор треугольного вида.
4. Переносим в правую часть системы слагаемые с неизвестными, коэффициенты которых не вошли в базисный минор. Эти неизвестные будем называть ***независимыми (свободными)***, а остальные – ***зависимыми***.

Обратный ход

5. Начиная с последнего уравнения (в обратном порядке) выражаем все зависимые переменные через свободные переменные. Система, в которой зависимые переменные выражены через свободные, является общим решением системы.
6. Придавая свободным переменным некоторые числовые значения, получаем бесконечно много частных решений исходной системы.

Замечание. Элементарные преобразования системы линейных уравнений в точности соответствуют элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы этой системы. Поэтому при решении системы методом Гаусса удобнее вместо преобразований системы производить преобразования над строками расширенной матрицы.

Пример.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1) \quad \times(-3) \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 3 \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2 .$$

Следовательно, согласно теоремам 2.1 и 2.3, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Найдем общее решение системы. Элементарными преобразованиями мы привели систему к виду

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ \qquad\quad 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$$

Выберем в матрице этой системы базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Следовательно, переменные x_1 и x_4 будут зависимыми, а x_2 и x_3 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные переменные. Имеем:

$$\begin{cases} -x_1 - x_4 = 2 - 2x_2 - x_3, \\ \qquad\ - x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем, что

$$x_1 = -2 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 + 2x_2 + x_3 + 10 - 11x_2 - 5x_3 .$$

Таким образом, общим решением является

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Общее решение можно также записывать в виде матрицы столбца:

$$\begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Придавая переменным x_1 и x_4 произвольные числовые значения, получаем частные решения этой системы. Например,

$x_2 = 0$, $x_3 = 0$ $\Rightarrow$ $x_1 = 8$, $x_4 = -10$;

$x_2 = 1$, $x_3 = 2$ $\Rightarrow$ $x_1 = 8 - 9 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -9$, $x_4 = -10 + 11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11$.

2.5. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, то есть систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & 0, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & 0. \end{cases} \qquad \textbf{(2.5)}$$

Системы такого вида называют ***однородными***. Если же хотя бы одно из уравнений системы является неоднородным, то такая система линейных уравнений называется ***неоднородной***.

Система линейных однородных уравнений является частным случаем системы (2.1). Она всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ является её решением. Заметим также, что ранг расширенной матрицы системы (2.5) равен рангу её основной матрицы, то есть $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*)$.

Решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$ называется ***нулевым*** или ***тривиальным***. Но кроме нулевого решения, система (2.5) может иметь и другие решения, называемые ***нетривиальными***.

Теорема 2.5 (критерий существования нетривиальных решений). *Система линейных однородных уравнений обладает нетривиальными решениями тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы меньше числа неизвестных, то есть* $r(\mathbf{A}) < n$.

Доказательство.

1) Пусть существуют нетривиальные решения. Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то $r(\mathbf{A}) \le n$.

Допустим, что $r(\mathbf{A}) = n$, следовательно, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$. Тогда согласно теореме 2.3, система (2.5) имеет единственное решение. А это противоречит тому, что существуют нетривиальные решения.

Таким образом, $r(\mathbf{A}) < n$.

2) Пусть $r(\mathbf{A}) < n$, то есть $r(\mathbf{A}) \ne n$. Тогда согласно теореме 2.3, система (2.5) имеет более одного решения, то есть существуют нетривиальные решения.

Теорема доказана.

Матричной формой записи системы (2.5) является

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}. \qquad \textbf{(2.6)}$$

В главе 1 (пункт 1.7) было введено понятие линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Пусть $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ – решения уравнения (2.5), $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1\mathbf{C}_1 + \alpha_2\mathbf{C}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{C}_k$$

называется линейной комбинацией решений $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$.

Теорема 2.6 (свойство решений системы линейных однородных уравнений). *Любая линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений является решением этой системы.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ – решения системы (2.5). Рассмотрим линейную комбинацию этих решений

$$\mathbf{C} = \alpha_1\mathbf{C}_1 + \alpha_2\mathbf{C}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{C}_k.$$

Тогда

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\alpha_1\mathbf{C}_1 + \alpha_2\mathbf{C}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{C}_k) =$$
$$= \alpha_1\mathbf{AC}_1 + \alpha_2\mathbf{AC}_2 + \ldots + \alpha_k\mathbf{AC}_k.$$

Но $\mathbf{AC}_1 = \mathbf{AC}_2 = \ldots = \mathbf{AC}_k = \mathbf{O}$, так как $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \ldots, \mathbf{C}_k$ – решения системы (2.5), то есть удовлетворяют уравнению (2.6). Следовательно,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \alpha_1\mathbf{O} + \alpha_2\mathbf{O} + \ldots + \alpha_k\mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

Таким образом, $\mathbf{C}$ является решением системы (2.5).

Теорема доказана.

2.6. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений

Теорема 2.7 (существования фундаментальной системы решений). *Пусть r – ранг матрицы системы линейных однородных уравнений, n – количество уравнений этой системы. Если система имеет нетривиальные решения, то существует $n-r$ линейно независимых решений данной системы, таких, что любое другое её решение будет их линейной комбинацией.*

Эти решения называют ***фундаментальной системой решений*** системы линейных однородных уравнений.

В ходе доказательства теоремы 2.7 показывается, что фундаментальную систему решений можно найти следующим образом:

1) Находим общее решение системы.

2) Записываем любой отличный от нуля определитель порядка $n-r$.

3) Находим $n-r$ частных решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы каждой из строк данного определителя поочерёдно.

Пример.

Найти фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \ \times(-1) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(\mathbf{A})=2$, и система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Выберем базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Следовательно, переменные x_1 и x_2 будут зависимыми, а переменные x_3, x_4, x_5 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x_1 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_4,$$

Таким образом, общим решением является

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

Для нахождения фундаментальной системы решений возьмем любой отличный от нуля определитель Δ порядка $n-r=5-2=3$. Пусть, например,

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}.$$

Запишем частные решения системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы каждой из строк определителя Δ поочерёдно:

1) $x_3=1$, $x_4=0$, $x_5=0$ $\Rightarrow$ $x_1=1$, $x_2=0$;

2) $x_3=0$, $x_4=1$, $x_5=0$ $\Rightarrow$ $x_1=-1$, $x_2=1$;

3) $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=1$ $\Rightarrow$ $x_1=2$, $x_2=0$;

Таким образом, фундаментальной системой решений являются три решения

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}2\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

2.7. Связь между решениями неоднородной системы уравнений и соответствующей ей однородной

Пусть система $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ совместна и $r(\mathbf{A})<n$. Установим связь между решениями системы $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$ и соответствующей ей системы $\mathbf{AX}=\mathbf{O}$.

Теорема 2.8. *Сумма любого решения линейной неоднородной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{C}_\text{Н}$ – решение неоднородной системы, а $\mathbf{C}_\text{О}$ – решение соответствующей ей однородной. Тогда

$$\mathbf{AC}_\text{Н}=\mathbf{B} \text{ и } \mathbf{AC}_\text{О}=\mathbf{O},$$

откуда

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}_\text{Н}-\mathbf{C}_\text{О})=\mathbf{AC}_\text{Н}-\mathbf{AC}_\text{О}=\mathbf{B}-\mathbf{O}=\mathbf{B},$$

то есть $\mathbf{C}_\text{Н}-\mathbf{C}_\text{О}$ является решением неоднородной системы.

Теорема доказана.

Теорема 2.9. *Разность двух произвольных решений линейной неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{C}_{\text{Н}}^{1}$ и $\mathbf{C}_{\text{Н}}^{2}$ – решения неоднородной системы. Тогда

$$\mathbf{AC}_{\text{Н}}^{1} = \mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{AC}_{\text{Н}}^{2} = \mathbf{B},$$

откуда

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}_{\text{Н}}^{1} - \mathbf{C}_{\text{Н}}^{2}) = \mathbf{AC}_{\text{Н}}^{1} - \mathbf{AC}_{\text{Н}}^{2} = \mathbf{B} - \mathbf{B} = \mathbf{O},$$

то есть $\mathbf{C}_{\text{Н}}^{1} - \mathbf{C}_{\text{Н}}^{2}$ является решением соответствующей однородной системы.

Теорема доказана.

Следующее утверждение является следствием теорем 2.8 и 2.9.

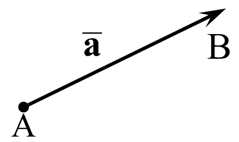
Терема 2.10. *Общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

3.1. Основные понятия векторной алгебры

Определение. ***Вектором*** или ***свободным вектором*** называется направленный отрезок прямой, то есть отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец.

Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается $\overline{AB}$. Также векторы обозначают малыми латинскими буквами с чертой, например, $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$. Изображают вектор отрезком со стрелкой на конце:

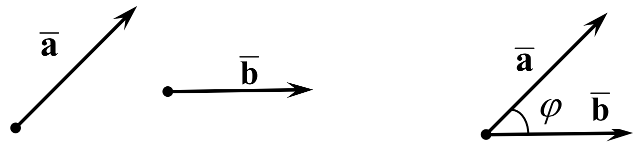


Расстояние от начала вектора до его конца называется ***длиной*** или ***модулем*** вектора и обозначается $\left|\overline{AB}\right|$ или $\left|\overline{\mathbf{a}}\right|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным*** вектором или ***ортом***.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется ***нулевым*** и обозначается $\overline{\mathbf{0}}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Рассмотрим векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Совместим параллельным переносом их начала. Под ***углом*** между векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ будем понимать угол, величина которого не превышает 180°.



Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются ***ортогональными***, если угол между ними равен 90^0. Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \perp \overline{\mathbf{b}}$.

Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной или параллельных прямых. Записывают: $\overline{\mathbf{a}} \parallel \overline{\mathbf{b}}$.

Угол между коллинеарными векторами может быть равен 0° или 180°. Если угол равен 0°, то векторы имеют одинаковое направление и называются ***сонаправленными***. Если же угол равен 180°, то векторы имеют противоположное направление и называются ***противоположно направленными***.

Три вектора, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются ***компланарными***.

Два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называются ***равными***, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Записывают: $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{b}}$. Все нулевые векторы считаются равными.

Замечание. Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, перемещая его начало в любую точку пространства.

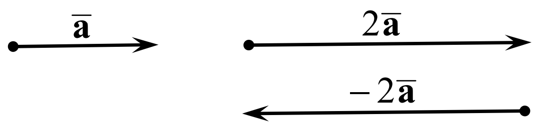
3.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение. ***Произведением*** вектора $\overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}$ ***на число*** $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\overline{\mathbf{a}}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{\mathbf{a}}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$. Если $\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{0}}$ или $\alpha = 0$, то их произведение полагают равным $\overline{\mathbf{0}}$.

Произведение вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на число α обозначают $\alpha\,\overline{\mathbf{a}}$.

Пример.



Частным случаем произведения вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на число является произведение $(-1)\overline{\mathbf{a}}$. Так как этот вектор имеет ту же длину, что и вектор $\overline{\mathbf{a}}$, а его направление противоположно направлению вектора $\overline{\mathbf{a}}$, то вектор $(-1)\overline{\mathbf{a}}$ называют ***противоположным вектору*** $\overline{\mathbf{a}}$ и обозначают $-\overline{\mathbf{a}}$.

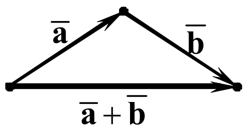
Легко заметить, что справедливо следующее утверждение.

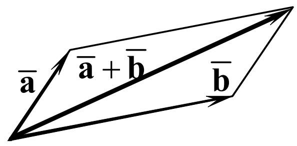
Лемма 3.1 (критерий коллинеарности векторов). *Два ненулевых вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда* $\overline{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \overline{\mathbf{b}}$, *для некоторого числа* $\alpha \neq 0$.

Определение. ***Суммой*** векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\overline{\mathbf{a}}$ с концом вектора $\overline{\mathbf{b}}$, отложенного от конца вектора $\overline{\mathbf{b}}$.

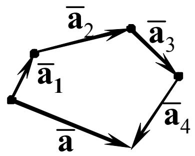
Сумма векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ обозначается $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют два правила: ***правило треугольника*** и ***правило параллелограмма***.

1) 

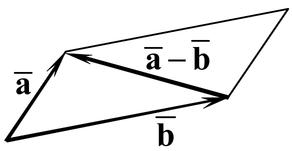
2) 

Преимущество правила треугольника в том, что оно легко обобщается на сумму любого конечного числа векторов. Например, чтобы найти сумму четырех векторов надо построить эти векторы последовательно (беря в качестве начала следующего вектора конец предыдущего). Тогда их сумма – это вектор, соединяющий начало первого вектора и конец четвертого:



$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \overline{\mathbf{a}}_3 + \overline{\mathbf{a}}_4$$

Частным случаем суммы двух векторов является сумма $\overline{\mathbf{a}}+(-\overline{\mathbf{b}})$. Ее называют ***разностью*** векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, и обозначают $\overline{\mathbf{a}}-\overline{\mathbf{b}}$. Геометрическим представлением разности векторов будет:



В главе 1 (пункт 1.7) было введено понятие линейной комбинации строк и столбцов матрицы, а главе 2 (пункт 2.5) – понятие линейной комбинации решений системы линейных уравнений. Аналогично вводится и понятие линейной комбинации векторов.

Определение. Пусть $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ – векторы, $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ – некоторые числа. Тогда вектор $\overline{\mathbf{b}}=\alpha_1\cdot\overline{\mathbf{a}}_1+\alpha_2\cdot\overline{\mathbf{a}}_2+\ldots+\alpha_k\cdot\overline{\mathbf{a}}_k$ называют ***линейной комбинацией*** векторов $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$. При этом говорят, что вектор $\overline{\mathbf{b}}$ ***линейно выражается*** через векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ или ***разложен*** *по векторам* $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$.

Легко заметить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2 (критерий компланарности векторов). *Три ненулевых вектора* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$ *компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие (например,* $\overline{\mathbf{c}}=\alpha_1\overline{\mathbf{a}}+\alpha_2\overline{\mathbf{b}}$*).*

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{a}}$;
2. $(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) + \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{b}} + \overline{\mathbf{c}})$;
3. $\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{0}} = \overline{\mathbf{a}}$;
4. $\overline{\mathbf{a}} + (-\overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{0}}$;
5. $\alpha(\beta\overline{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\overline{\mathbf{a}}$;
6. $(\alpha + \beta)\overline{\mathbf{a}} = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \beta\overline{\mathbf{a}}$;
7. $\alpha(\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}}) = \alpha\overline{\mathbf{a}} + \alpha\overline{\mathbf{b}}$;
8. $1\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}$.

Замечание. Свойства линейных операций над векторами с точностью до обозначений совпадают со свойствами линейных операций над матрицами (глава 1, пункт 1.3).

3.3. Линейная зависимость и независимость векторов

В главе 1 (пункт 1.14) рассматривались понятия линейной зависимости и независимости строк и столбцов матрицы. Введём аналогичные понятия для векторов.

Определение. Векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1\overline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{\mathbf{a}}_k = \overline{\mathbf{0}}$.

Если же равенство $\alpha_1\overline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k\overline{\mathbf{a}}_k = \overline{\mathbf{0}}$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы называют ***линейно независимыми.***

Следующая лемма аналогична лемме 1.8 (глава 1, пункт 1.17).

Лемма 3.3 (о линейной зависимости). *Векторы* $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_k$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Доказательство.

1) Пусть векторы $\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{a}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{a}}_k$ – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{a}}_2 + \ldots + \alpha_k \cdot \overline{\mathbf{a}}_k = \overline{\mathbf{0}}$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{a}}_1 = -\alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{a}}_2 - \ldots - \alpha_k \cdot \overline{\mathbf{a}}_k$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{a}}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\cdot\overline{\mathbf{a}}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\cdot\overline{\mathbf{a}}_k,$$

то есть вектор $\overline{\mathbf{a}}_1$ линейно выражается через векторы $\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$.

2) Пусть один из векторов $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ линейно выражается через остальные. Например,

$$\overline{\mathbf{a}}_1 = \alpha_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\overline{\mathbf{a}}_3 + \ldots + \alpha_k\overline{\mathbf{a}}_k$$

$$\Rightarrow \quad -\overline{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\overline{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3\overline{\mathbf{a}}_3 + \ldots + \alpha_k\overline{\mathbf{a}}_k = \overline{\mathbf{0}}.$$

Коэффициент при $\overline{\mathbf{a}}_1$ равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы $\overline{\mathbf{a}}_1,\overline{\mathbf{a}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{a}}_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

Лемма 3.4 (критерий линейной зависимости двух векторов). *Два ненулевых вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

Доказательство.

Два ненулевых вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ (согласно лемме 3.3) $\overline{\mathbf{a}}$ линейно выражается через $\overline{\mathbf{b}}$ $\Leftrightarrow$ (согласно определению) $\overline{\mathbf{a}} = \alpha\cdot\overline{\mathbf{b}}$ для некоторого числа $\alpha \neq 0$ $\Leftrightarrow$ (согласно лемме 3.1) векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Лемма доказана.

Лемма 3.5 (критерий линейной зависимости трёх векторов). *Три ненулевых вектора* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$ *линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

Доказательство.

Три ненулевых вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ линейно зависимы $\Leftrightarrow$ (согласно лемме 3.3) один из них линейно выражается через остальные $\Leftrightarrow$ (согласно лемме 3.2) векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ компланарны.

Лемма доказана.

3.4. Базис системы векторов

Определение. ***Базисом*** некоторой системы векторов называется любая максимальная линейно независимая подсистема этой системы.

Иначе говоря, векторы $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_n$ некоторой системы векторов образуют её базис, если выполняются следующие два условия:

1) $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_n$ – линейно независимы;

2) $\overline{\mathbf{e}}_1,\overline{\mathbf{e}}_2,\ldots,\overline{\mathbf{e}}_n,\overline{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы для любого вектора $\overline{\mathbf{a}}$ данной системы векторов.

Базис данной системы векторов можно выбрать не единственным образом. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6. *Любые два базиса данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.*

Легко увидеть, что является базисом векторов плоскости и базисом векторов пространства.

Теорема 3.7. 1) *Базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.*

2) *Базисом векторов пространства являются любые три некомпланарных вектора.*

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 3.8 (о базисе). *Каждый вектор данной системы векторов линейно выражается через любой базис этой системы, причем единственным образом.*

Доказательство.

Пусть $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$ – базис, $\overline{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор. Тогда согласно определению, $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$ – линейно независимы, а $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n, \overline{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$, не все равные нулю одновременно и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{\mathbf{e}}_n + \beta \cdot \overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{0}}.$$

Покажем, что $\beta \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{\mathbf{e}}_n = \overline{\mathbf{0}}$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равны нулю одновременно. А это означает, что векторы $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$ – линейно зависимые. Но по условию они образуют базис и, следовательно, линейно независимы. Получили противоречие.

Таким образом, $\beta \neq 0$. Тогда

$$-\beta \cdot \overline{\mathbf{a}} = \alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{\mathbf{e}}_n,$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\mathbf{a}} = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot \overline{\mathbf{e}}_n,$$

то есть $\overline{\mathbf{a}}$ линейно выражается через векторы $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2, \ldots, \overline{\mathbf{e}}_n$.

Докажем, что вектор $\overline{\mathbf{a}}$ линейно выражается через базис единственным образом. Пусть

$$\overline{\mathbf{a}} = \alpha_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \overline{\mathbf{e}}_n,$$
$$\overline{\mathbf{a}} = \beta_1 \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \beta_2 \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \overline{\mathbf{e}}_n.$$

Тогда

$$\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}} = (\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n) - (\beta_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \beta_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \beta_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n),$$
$$\Rightarrow \quad \bar{\mathbf{0}} = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \bar{\mathbf{e}}_n .$$

Так как векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, …, $\alpha_n - \beta_n = 0$. Откуда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$.

Теорема доказана.

Пусть $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n$ – базис, $\bar{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 3.8 о базисе вектор $\bar{\mathbf{a}}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\bar{\mathbf{a}} = \alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n ,$$

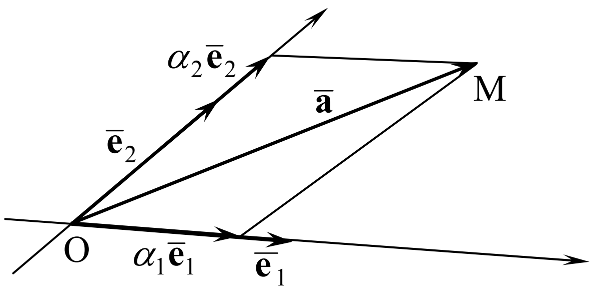
при этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются ***координатами*** вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \ldots, \bar{\mathbf{e}}_n$.

3.5. Декартова прямоугольная система координат

Зафиксируем произвольную точку О и выберем некоторый базис векторов пространства (плоскости). Совокупность этой точки и этого базиса называется ***декартовой системой координат*** в пространстве (на плоскости). При этом точку О называют ***началом координат***, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, – ***осями координат***, а плоскости, проходящие через две оси координат, – ***координатными плоскостями***.

Пример.

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости, то есть выберем некоторую точку О и некоторый базис (согласно теореме 3.7 это будут любые два неколлинеарных вектора).



Тогда вектор $\bar{\mathbf{a}} = \overline{\mathrm{OM}} = \alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2$, α_1 и α_2 – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в этом базисе. Также говорят, что α_1 и α_2 – координаты точки М.

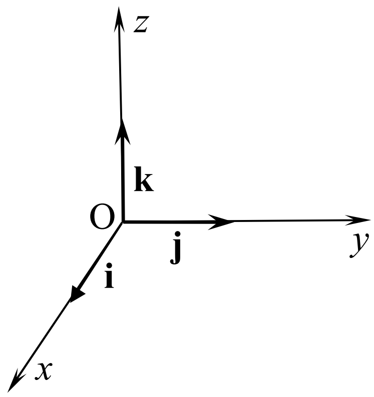
Координатами точки в декартовой системе координат называют координаты вектора, имеющего конец в этой точке, а начало – в начале координат.

Хотя декартову систему координат можно выбрать произвольным образом, на практике предпочитают работать с декартовой прямоугольной системой координат.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют декартову систему координат, базисом в которой являются единичные, попарно ортогональные векторы.

Говорят, что три некомпланарных вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ образуют ***правую тройку***, если с конца третьего вектора $\overline{\mathbf{c}}$ кратчайший поворот от первого вектора $\overline{\mathbf{a}}$ ко второму вектору $\overline{\mathbf{b}}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и ***левую тройку***, если по часовой.

Чаще всего рассматривают ***правую*** декартову прямоугольную систему координат, то есть такую, в которой векторы базиса образуют правую тройку, их обозначают $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Оси координат в этой системе координат называют соответственно осью Ox (абсцисс), осью Oy (ординат) и осью Oz (аппликат).



Если a_x, a_y, a_z – координаты вектора $\overline{\mathbf{a}}$ в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, то есть $\overline{\mathbf{a}} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$, то используется также запись $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Иногда в качестве базиса берут левую тройку векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $-\mathbf{k}$. Тогда такую декартову прямоугольную систему координат называют ***левой***.

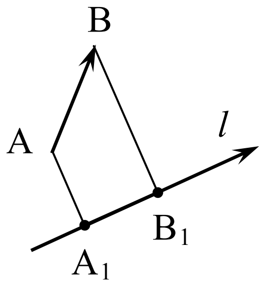
Декартова прямоугольная система координат на плоскости вводится аналогично.

3.6. Проекция вектора на ось

Проекцией точки M на прямую (плоскость) называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки M на эту прямую (плоскость).

Пусть в пространстве задана ось l, то есть направленная прямая, $\overline{AB}$ – произвольный вектор.

Обозначим через A_1 и B_1 – проекции на ось l точек A и B соответственно. ***Проекцией вектора*** $\overline{AB}$ на ось l называется положительное число $\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-\left|\overline{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overline{AB}$ равна нулю.



Обозначают $пр_l\overline{AB}$.

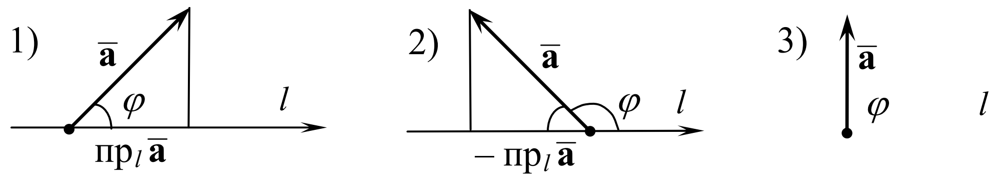
Верны следующие свойства проекций.

1. *Проекция вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на ось* l *равна произведению длины вектора* $\bar{\mathbf{a}}$ *на косинус угла* φ *между вектором и осью*:

$$пр_l\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi .$$

Доказательство.

Рассмотрим отдельно три случая.



1) Если $\varphi < 90^\circ$, то проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось l положительна. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{пр_l\bar{\mathbf{a}}}{|\bar{\mathbf{a}}|} \quad \Rightarrow \quad пр_l\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi .$$

2) Если $\varphi > 90^\circ$, то проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось l отрицательна. Тогда

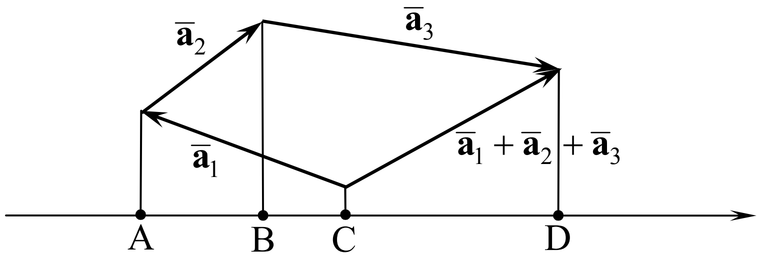
$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{-пр_l\bar{\mathbf{a}}}{|\bar{\mathbf{a}}|} \quad \Rightarrow \quad -\cos\varphi = \frac{-пр_l\bar{\mathbf{a}}}{|\bar{\mathbf{a}}|} \quad \Rightarrow \quad пр_l\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi .$$

3) Если $\varphi = 90^{\circ}$, то $\cos\varphi = 0$, $\text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}} = 0$, откуда $\text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}} = |\,\overline{\mathbf{a}}\,| \cdot \cos\varphi$.

Утверждение доказано.

2. *Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.*

Пусть, например, $\overline{\mathbf{a}}_4 = \overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \overline{\mathbf{a}}_3$.



Тогда

$$\text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_4 = \text{пр}_l(\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2 + \overline{\mathbf{a}}_3) = |\overline{\text{CD}}| = |\overline{\text{AB}}| + |\overline{\text{BD}}| - |\overline{\text{AC}}| =$$
$$= \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_2 + \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_3 - (-\text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_1) = \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_1 + \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_2 + \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}_3.$$

3. *При умножении вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число*:

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}.$$

Доказательство.

Рассмотрим отдельно три случая.

1) Если $\lambda > 0$, то векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}$ одинаково направлены. Тогда согласно свойству 1,

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}) = |\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}.$$

2) Если $\lambda < 0$, то векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}$ противоположно направлены. Тогда согласно свойству 1,

$$\text{пр}_l(\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}) = |\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}| \cdot \cos(180^{\circ} - \varphi) = -\lambda \cdot |\overline{\mathbf{a}}| \cdot (-\cos\varphi) =$$
$$= \lambda \cdot |\overline{\mathbf{a}}| \cdot \cos\varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}}.$$

3) Если $\lambda = 0$, то $\lambda \cdot \text{пр}_l\,\overline{\mathbf{a}} = 0$ и $\text{пр}_l(\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}) = 0$. Получаем, что $\text{пр}_l(\lambda \cdot \overline{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l|\overline{\mathbf{a}}|$

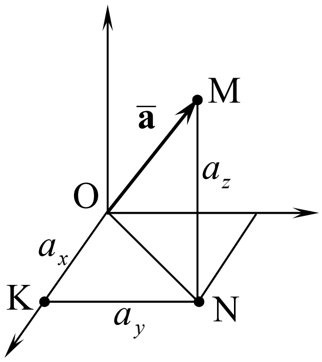
Утверждение доказано.

Замечание. Если $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, то координата a_x – это проекция вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на ось $\text{O}x$, координата a_y – проекция вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на ось $\text{O}y$ и координата a_z – проекция вектора $\overline{\mathbf{a}}$ на ось $\text{O}z$.

3.7. Нахождение длины вектора. Направляющие косинусы вектора

Покажем, как находится длина вектора $\bar{\mathbf{a}}$, если известны его координаты a_x, a_y, a_z.

Пусть начало вектора $\bar{\mathbf{a}}$ находится в начале координат. Обозначим через M конец вектора $\bar{\mathbf{a}}$, через N – проекцию точки M на координатную плоскость $\mathrm{O}xy$, через K – проекцию точки N на координатную ось $\mathrm{O}x$.



По теореме Пифагора

$$|\overline{\mathrm{OM}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{ON}}|^2 + |\overline{\mathrm{NM}}|^2}, \quad |\overline{\mathrm{ON}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{OK}}|^2 + |\overline{\mathrm{KN}}|^2}.$$

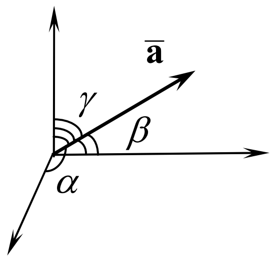
Тогда

$$|\overline{\mathrm{OM}}| = \sqrt{|\overline{\mathrm{OK}}|^2 + |\overline{\mathrm{KN}}|^2 + |\overline{\mathrm{NM}}|^2},$$

но $|\overline{\mathrm{OM}}| = |\bar{\mathbf{a}}|$, $|\overline{\mathrm{OK}}| = |a_x|$, $|\overline{\mathrm{KN}}| = |a_y|$, $|\overline{\mathrm{NM}}| = |a_z|$.

Таким образом, $|\,\bar{\mathbf{a}}\,| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$.

Пусть углы, которые образует вектор $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ с осями $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ и $\mathrm{O}z$ соответственно, равны α, β и γ.



Рассмотрим вектор $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$.

Согласно свойству 1 проекций,

$a_x = \text{пр}_{\mathrm{O}x}\,\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\alpha$,

$a_y = \text{пр}_{\mathrm{O}y}\,\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\beta$,

$a_z = \text{пр}_{\mathrm{O}z}\,\bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos\gamma$,

откуда $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\} = \{\frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|}, \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|}, \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|}\} = \frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|}\,\mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|}\,\mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|}\,\mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{a}}|}\,\bar{\mathbf{a}}$,

Таким образом, вектор $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ – единичный и направлен также как и вектор $\bar{\mathbf{a}}$. Поэтому вектор $\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ называют ***ортом вектора*** $\bar{\mathbf{a}}$, а $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называют ***направляющими косинусами*** вектора $\bar{\mathbf{a}}$.

Заметим, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{a_x^{\ 2}}{|\bar{\mathbf{a}}|^2} + \dfrac{a_y^{\ 2}}{|\bar{\mathbf{a}}|^2} + \dfrac{a_z^{\ 2}}{|\bar{\mathbf{a}}|^2} = \dfrac{|\bar{\mathbf{a}}|^2}{|\bar{\mathbf{a}}|^2} = 1$.

Полученное соотношение $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ называют ***свойством направляющих косинусов***.

3.8. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Найдём координаты векторов $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}$ и $\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}}$. Согласно свойствам линейных операций над векторами (пункт 3.2),

$$\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}} = (a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k})+(b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}) = $$
$$= (a_x+b_x)\mathbf{i}+(a_y+b_y)\mathbf{j}+(a_z+b_z)\mathbf{k} = \{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\},$$

$$\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}} = \alpha\cdot(a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k}) = (\alpha\cdot a_x)\mathbf{i}+(\alpha\cdot a_y)\mathbf{j}+(\alpha\cdot a_z)\mathbf{k} = $$
$$= \{\alpha\cdot a_x,\ \alpha\cdot a_y,\ \alpha\cdot a_z\}.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.9. *Если* $\overline{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$, *то*

1) $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}} = \{a_x+b_x,\ a_y+b_y,\ a_z+b_z\}$,

2) $\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}} = \{\alpha\cdot a_x,\ \alpha\cdot a_y,\ \alpha\cdot a_z\}$.

С помощью этой теоремы, можно доказать следующие две леммы.

Лемма 3.10 (критерий коллинеарности векторов в координатной форме). *Два ненулевых вектора* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.*

Доказательство.

Два ненулевых вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны $\Leftrightarrow$ (согласно лемме 3.1) $\overline{\mathbf{a}}=\alpha\cdot\overline{\mathbf{b}}$ для некоторого числа $\alpha\neq 0$ $\Leftrightarrow$ (согласно теореме 3.9) $a_x=\alpha\cdot b_x$, $a_y=\alpha\cdot b_x$, $a_z=\alpha\cdot b_x$ $\Leftrightarrow$ координаты векторов $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ пропорциональны.

Лемма доказана.

Пример.

Выясним, будут ли векторы $\overline{\mathbf{a}}=\{2, 4, 0\}$ и $\overline{\mathbf{b}}=\{1, 2, 0\}$ коллинеарны. Составляем соотношения $2=\alpha\cdot 1$, $4=\alpha\cdot 2$, $0=\alpha\cdot 0$, откуда α=2. Получили, что $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{b}}$, то есть векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

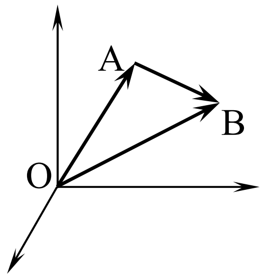
Замечание. Если все координаты вектора $\overline{\mathbf{b}}$ отличны от нуля, из соотношений $a_x=\alpha\cdot b_x$, $a_y=\alpha\cdot b_x$, $a_z=\alpha\cdot b_x$ получаем, что $\alpha=\dfrac{a_x}{b_x}$,

$\alpha = \dfrac{a_y}{b_y}$ и $\alpha = \dfrac{a_z}{b_z}$. Таким образом, условие коллинеарности векторов можно записать в виде пропорции:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Лемма 3.11. *Если точка* A *имеет координаты* x_1, y_1, z_1, *точка* B – *координаты* x_2, y_2, z_2, *то вектор* $\overline{\mathrm{AB}}$ *имеет координаты* $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$.

Доказательство.



Так как согласно определению, координаты точки A – это координаты вектора $\overline{\mathrm{OA}}$, а координаты точки B – это координаты вектора $\overline{\mathrm{OB}}$, то $\overline{\mathrm{OB}} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{\mathrm{OA}} = \{x_1, y_1, z_1\}$.

Но $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{OB}} - \overline{\mathrm{OA}}$, тогда согласно теореме 3.9, получаем что $\overline{\mathrm{AB}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

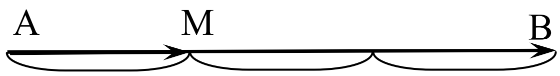
Лемма доказана.

3.9. Задача о делении отрезка в заданном отношении

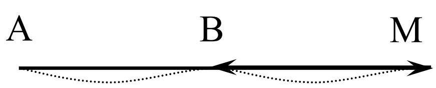
Разделим отрезок AB в отношении λ, то есть на прямой, проходящей через точки A и B, найдём такую точку M, что $\overline{\mathrm{AM}} = \lambda \overline{\mathrm{MB}}$.

Примеры.

1. $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $\overline{\mathrm{AM}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{MB}}$.



2. $\lambda = -2$, $\overline{\mathrm{AM}} = -2\overline{\mathrm{MB}}$.



3. $\lambda = -1$, то есть $\overline{\mathrm{AM}} = -\overline{\mathrm{MB}}$, – невозможно.

Заметим, что при $\lambda > 0$ векторы $\overline{\mathrm{AM}}$ и $\overline{\mathrm{MB}}$ одинаково направлены, следовательно, точка M лежит внутри отрезка AB; при $\lambda < 0$ векторы $\overline{\mathrm{AM}}$ и $\overline{\mathrm{MB}}$ противоположно направлены, следовательно, точка M лежит вне отрезка AB.

Пусть точка A имеет координаты x_1, y_1, z_1, точка B – координаты x_2, y_2, z_2. Найдём координаты точки M.

Обозначим координаты точки M через x, y, z.

Тогда согласно лемме 3.11, $\overline{AM}=\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\overline{MB}=\{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$.

Но $\overline{AM}=\lambda\overline{MB}$, тогда из теоремы 3.9 следует, что $x-x_1=\lambda(x_2-x)$, $y-y_1=\lambda(y_2-y)$, $z-z_1=\lambda(z_2-z)$. Откуда получаем, что

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

3.10. Скалярное произведение векторов

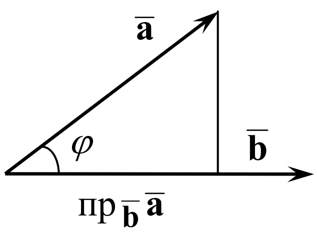
Определение. ***Скалярным произведением*** $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$ двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi.$$

Если один из двух векторов является нулевым, то их скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение также обозначают $\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{b}}$ или $\bar{\mathbf{a}}\,\bar{\mathbf{b}}$.

Покажем, как вычисляется скалярное произведение векторов, если известна проекция одного из сомножителей на второй.



Рассмотрим проекцию вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}}$. По свойству 1 проекций, $\text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}=|\bar{\mathbf{a}}|\cdot\cos\varphi$, тогда $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi = |\bar{\mathbf{b}}|\cdot\text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}}$.

Рассмотрим теперь проекцию вектора $\bar{\mathbf{b}}$ на вектор $\bar{\mathbf{a}}$. Тогда $\text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}}=|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi$, следовательно, $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot|\bar{\mathbf{b}}|\cdot\cos\varphi = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$.

Таким образом,

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}|\cdot\text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}|\cdot\text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}. \quad \mathbf{(3.1)}$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$;
2. $(\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}) = \lambda(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$;
3. $(\bar{\mathbf{a}}+\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$;
4. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$.

Лемма 3.12 (критерий ортогональности векторов). *Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Доказательство.

1) Пусть ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ ортогональны, то есть угол φ между ними равен 90°. Тогда $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos 90^{\circ} = 0$.

2) Пусть $|\bar{\mathbf{a}}| \neq 0$, $|\bar{\mathbf{b}}| \neq 0$ и $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = 0$. Тогда $|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi = 0$, откуда $\cos\varphi = 0$, следовательно, $\varphi = 90^{\circ}$.

Лемма доказана.

Найдем, как вычисляется скалярное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\bar{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда используя свойства скалярного произведения векторов, получаем

$$
\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) &= (a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k},\ b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}) = \\
&= a_x\,b_x(\mathbf{i},\mathbf{i}) + a_x\,b_y(\mathbf{i},\mathbf{j}) + a_x\,b_z(\mathbf{i},\mathbf{k}) + \\
&+ a_y\,b_x(\mathbf{j},\mathbf{i}) + a_y\,b_y(\mathbf{j},\mathbf{j}) + a_y\,b_z(\mathbf{j},\mathbf{k}) + \\
&+ a_z\,b_x(\mathbf{k},\mathbf{i}) + a_z\,b_y(\mathbf{k},\mathbf{j}) + a_z\,b_z(\mathbf{k},\mathbf{k}).
\end{aligned}
$$

Векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ попарно ортогональны, следовательно, согласно лемме 3.12, $(\mathbf{i},\mathbf{j}) = (\mathbf{i},\mathbf{k}) = (\mathbf{j},\mathbf{i}) = (\mathbf{j},\mathbf{k}) = (\mathbf{k},\mathbf{i}) = (\mathbf{k},\mathbf{j}) = 0$. Тогда

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x\,b_x(\mathbf{i},\mathbf{i}) + a_y\,b_y(\mathbf{j},\mathbf{j}) + a_z\,b_z(\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

По свойству 4 скалярного произведения, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = |\mathbf{i}|^2$, $(\mathbf{j}, \mathbf{j}) = |\mathbf{j}|^2$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2$. Но векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – единичные, следовательно, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1$, $(\mathbf{j}, \mathbf{j}) = 1$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1$, откуда

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Лемма 3.13. *Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат*:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Найдем угол между векторами $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Так как $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos\varphi$, то

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|}.$$

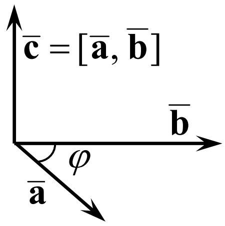
3.11 Векторное произведение векторов

Определение. ***Векторным произведением*** двух ненулевых и неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, для которого выполняются следующие условия:

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;

2) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;

3) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – правая (ориентирована одинаково с базисной тройкой $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$).



Если векторы коллинеарны или хотя бы один из двух векторов является нулевым, то их векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ обозначается $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$.

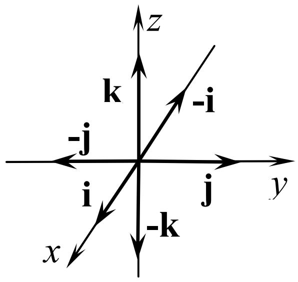
На практике для нахождения направления векторного произведения пользуются также правилом правой руки или правилом винта.

Правило правой руки. Если не согнутые пальцы правой руки расположить так, что вектор $\bar{\mathbf{a}}$ будет направлен вдоль большого пальца, а вектор $\bar{\mathbf{b}}$ – вдоль указательного, то векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ будет направлено вдоль среднего пальца этой руки.

Правило винта. Направление векторного произведения $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ совпадает с направлением вкручивающегося винта, если его шляпка находится в плоскости векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и вращается в сторону кратчайшего поворота от вектора $\bar{\mathbf{a}}$ к вектору $\bar{\mathbf{b}}$.

Пример.

Найдем векторное произведение всех возможных пар, составленных из базисных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.



Найдём векторное произведение $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$.

1) $|[\mathbf{j}, \mathbf{i}]| = |\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \sin\varphi = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^{\circ} = 1$.

2) Вектор $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ ортогонален векторам $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$, то есть направлен вдоль оси Oz или противоположно ей.

3) Применяя правило правой руки или правило винта, получаем, что направление $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ противоположно оси Oz.

Итак, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ – единичный вектор, направленный противоположно оси Oz, следовательно, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$.

Найдём векторное произведение $[\mathbf{i}, \mathbf{i}]$. Согласно определению, векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору, следовательно, $[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = \overline{\mathbf{0}}$.

Векторные произведения остальных пар базисных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ находятся аналогично. Запишем результаты этих вычислений в виде следующей ***таблицы умножения базисных векторов*** $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\overline{\mathbf{0}}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\overline{\mathbf{0}}$

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = -[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}]$;
2. $[\alpha\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = [\overline{\mathbf{a}}, \alpha\overline{\mathbf{b}}] = \alpha[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$;
3. $[\overline{\mathbf{a}}_1 + \overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}] = [\overline{\mathbf{a}}_1, \overline{\mathbf{b}}] + [\overline{\mathbf{a}}_2, \overline{\mathbf{b}}]$;
4. $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}] = \overline{\mathbf{0}}$.

Лемма 3.14. *Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.*

Доказательство.

1) Пусть $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – ненулевые векторы, $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \overline{\mathbf{0}}$.

Допустим, что $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ не коллинеарны. Тогда согласно определению векторного произведения, $\left|[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]\right| = |\overline{\mathbf{a}}| \cdot |\overline{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi = 0$. Так как $|\overline{\mathbf{a}}| \neq 0$ и $|\overline{\mathbf{b}}| \neq 0$, то $\sin\varphi = 0$, откуда $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, то есть векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны. Пришли к противоречию.

Следовательно, $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

2) Пусть векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ коллинеарны. Тогда согласно определению, $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \overline{\mathbf{0}}$.

Лемма доказана.

Найдем, как вычисляется векторное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда используя свойства скалярного произведения векторов, получаем

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = [a_x\,\mathbf{i}+a_y\,\mathbf{j}+a_z\,\mathbf{k},\ b_x\,\mathbf{i}+b_y\,\mathbf{j}+b_z\,\mathbf{k}] =$$
$$= a_x b_x[\mathbf{i},\mathbf{i}] + a_x b_y[\mathbf{i},\mathbf{j}] + a_x b_z[\mathbf{i},\mathbf{k}] +$$
$$+ a_y b_x[\mathbf{j},\mathbf{i}] + a_y b_y[\mathbf{j},\mathbf{j}] + a_y b_z[\mathbf{j},\mathbf{k}] +$$
$$+ a_z b_x[\mathbf{k},\mathbf{i}] + a_z b_y[\mathbf{k},\mathbf{j}] + a_z b_z[\mathbf{k},\mathbf{k}].$$

Согласно таблице умножения базисных векторов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, имеем $[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = \overline{\mathbf{0}}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{j}] = \overline{\mathbf{0}}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{k}] = \overline{\mathbf{0}}$. Таким образом, получаем, что

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = (a_y b_z - a_z b_y)\,\mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\,\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\,\mathbf{k} =$$
$$= \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \qquad \mathbf{(3.2)}$$

Это выражение можно представить в схематичной записи

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad \mathbf{(3.3)}$$

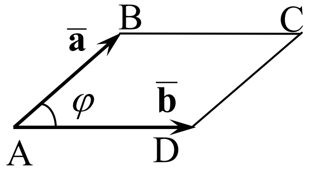
Замечание. Полученное выражение вычисляют, раскладывая определитель по первой строке (согласно следствию 1.2 из теоремы Лапласа, пункт 1.9, глава 1).

Следующие две леммы объясняют геометрический смысл векторного произведения векторов.

Лемма 3.15. *Пусть* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$ *– неколлинеарные векторы. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна модулю векторного произведения векторов* $\overline{\mathbf{a}}$ *и* $\overline{\mathbf{b}}$:

$$S = \left|[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]\right|.$$

Доказательство.



Пусть ABCD – параллелограмм, $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathbf{b}}$, φ – угол между векторами $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Тогда его площадь равна

$$S = \left|\overline{\mathrm{AB}}\right| \cdot \left|\overline{\mathrm{AD}}\right| \cdot \sin\varphi = \left|\overline{\mathbf{a}}\right| \cdot \left|\overline{\mathbf{b}}\right| \cdot \sin\varphi = \left|[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.16. *Пусть* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$ *– неколлинеарные векторы. Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине модуля векторного произведения векторов* $\bar{\mathbf{a}}$ *и* $\bar{\mathbf{b}}$:

$$S = \frac{1}{2}\cdot\left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|.$$

3.12. Смешанное произведение векторов

Определение. ***Смешанным произведением*** $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ трёх векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ умножается скалярно на $\bar{\mathbf{c}}$:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}).$$

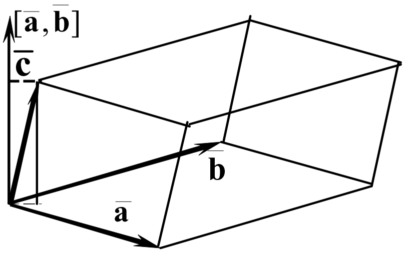
Геометрический смысл смешанного произведения объясняется следующей леммой.

Лемма 3.17. *Пусть* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$ *– некомпланарные векторы. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов* $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ *и* $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = \left|(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})\right|.$$

Доказательство.

Объем параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, опущенную на это основание: $V = S\cdot h$.



Основание параллелепипеда – параллелограмм, построенный на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Тогда согласно лемме 6.2, его площадь $S = \left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|$.

Высота параллелепипеда h равна модулю проекции вектора $\bar{\mathbf{c}}$ на векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$: $h = \left|\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]}\bar{\mathbf{c}}\right|$.

Получаем, что $V = S\cdot h = \left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|\cdot\left|\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]}\bar{\mathbf{c}}\right|$.

Вычислим $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})$, применяя формулу (3.1) из пункта 3.10:

$$([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = \left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|\cdot \text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]}\bar{\mathbf{c}}.$$

Таким образом,

$$V = \left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|\cdot\left|\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]}\bar{\mathbf{c}}\right| = \left|\left|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]\right|\cdot \text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]}\bar{\mathbf{c}}\right| = \left|([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})\right| = \left|(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})\right|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.18. *Пусть* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$ *– некомпланарные векторы. Тогда объём пирамиды, построенной на этих векторах, равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов* $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ *и* $\overline{\mathbf{c}}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left|(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})\right|.$$

Свойства смешанного произведения векторов:

1. $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = -(\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}})$;
2. $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}) = (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}})$;
3. $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{a}}, [\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}])$.

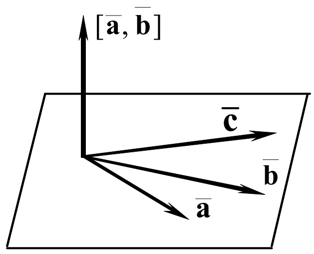
Лемма 3.19 (критерий компланарности векторов через смешанное произведение). *Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.*

Доказательство.

1) Пусть ненулевые векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ – компланарны. Рассмотрим два случая: а) векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – коллинеарны; б) векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – не коллинеарны.

а) Если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – коллинеарны, то согласно определению векторного произведения, $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \overline{\mathbf{0}}$, следовательно,

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = (\overline{\mathbf{0}}, \overline{\mathbf{c}}) = 0.$$



б) Если векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – не коллинеарны, то согласно определению, вектор $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ ортогонален векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Следовательно, вектор $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ ортогонален и вектору $\overline{\mathbf{c}}$. Тогда согласно лемме 3.12,

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = 0.$$

2) Пусть $(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = 0$. Так как $\overline{\mathbf{c}}$ – ненулевой вектор, равенство $([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = 0$ возможно только в двух случаях: а) $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \overline{\mathbf{0}}$ и б) векторы $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ и $\overline{\mathbf{c}}$ – ортогональны.

а) Если $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \overline{\mathbf{0}}$, то согласно лемме 3.14, векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ – коллинеарны, откуда следует, что $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ – компланарны.

б) Пусть вектор $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ ортогонален вектору $\overline{\mathbf{c}}$. Но вектор $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ также ортогонален векторам $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$, откуда следует, что векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ лежат в параллельных плоскостях, то есть компланарны.

Лемма доказана.

Найдем, как вычисляется смешанное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\overline{\mathbf{a}}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{\mathbf{b}}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\overline{\mathbf{c}}=\{c_x, c_y, c_z\}$. Тогда согласно формуле (3.2) из пункта 3.11,

$$[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \mathbf{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Так как известны координаты векторов $[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]$ и $\overline{\mathbf{c}}$, их скалярное произведение вычислим, применив лемму 3.13:

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = ([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], \overline{\mathbf{c}}) = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение можно представить как разложение по третьей строке следующего определителя (согласно следствию 1.2 из теоремы Лапласа, пункт 1.9, глава 1):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = c_x\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Таким образом, получаем, что

$$(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad \mathbf{(3.4)}$$

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Понятие линейного пространства

На практике часто встречаются множества, элементы которых можно складывать и умножать на действительные числа. Например, в главе 1 было рассмотрено множество матриц одинакового размера, а в главе 3 – множество векторов пространства и плоскости. Оказалось, что эти множества, несмотря на то, что состоят из элементов разной природы, обладают одними и теми же свойствами, для них верны одни и те же утверждения. Линейное пространство – это понятие, обобщающее понятия всех таких множеств. При изучении линейных пространств, изучаются все эти множества сразу.

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа. Обозначим через $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Определение. Множество L называется ***линейным пространством над*** $\mathbb{R}$ или ***вещественным линейным пространством,*** если выполняются следующие условия:

1) $a+b=b+a$ для любых $a,b\in L$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a,b,c\in L$;
3) во множестве L существует элемент o, называемый ***нулевым элементом***, такой, что $a+o=a$ для любого $a\in L$;
4) для каждого элемента $a\in L$ существует элемент $-a\in L$, называемый ***противоположным*** элементу a, такой, что $a+(-a)=o$;
5) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
7) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ и любых $a,b\in L$;
8) $1a=a$ для любого $a\in L$.

Рассмотрим, какие из известных множеств являются вещественными линейными пространствами.

Пример 1. Пусть $M(m\times n,\mathbb{R})$ – множество матриц размера $m\times n$ с элементами из $\mathbb{R}$. Для этого множества все условия из определения линейного пространства выполняются (согласно свойствам линейных операций над матрицами, пункт 1.3, глава 1). Следовательно, множество $M(m\times n,\mathbb{R})$ является вещественным линейным пространством.

Пример 2. Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости). Для этого множества также выполняются все условия из определения линейного пространства (согласно свойствам линейных операций над векторами, пункт 3.2, глава 3). Следовательно, множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) является вещественным линейным пространством.

Пример 3. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество последовательностей n действительных чисел. Введем операцию сложения элементов множества $\mathbb{R}^n$ и умножения их на число. Пусть $a,b\in$ $\mathbb{R}^n$, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Полагаем

$$a+b=(a_1+b_1,\, a_2+b_2,\, \ldots,\, a_n+b_n),$$
$$\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_1,\, \alpha\cdot a_2,\, \ldots,\, \alpha\cdot a_n).$$

Можно проверить, что все условия из определения линейного пространства в этом случае выполняются (нулевым элементом будет $o=(0, 0, \ldots, 0)$, противоположным к $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – элемент $-a=(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$). Следовательно, множество $\mathbb{R}^n$ является вещественным линейным пространством. Его называют ***арифметическим линейным пространством***, а его элементы – n***-мерными векторами***.

Пример 4. Пусть $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Можно показать, что все условия из определения линейного пространства для множества $\mathbb{R}[x]$ выполняются. Следовательно, это множество является вещественным линейным пространством.

Пример 5. Пусть $\mathbf{C}[a,b]$ – множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Для этого множества также можно проверить, что все условия из определения линейного пространства выполняются. Следовательно, оно является вещественным линейным пространством.

Для действий над элементами линейных пространств верны правила, аналогичные правилам выполнения арифметических действий над обычными числами. Используя условия из определения линейного пространства, легко доказать следующие утверждения.

Лемма 4.1. *Пусть* L *– вещественное линейное пространство. Тогда для любых элементов* $a, b \in L$ *и любых действительных чисел* α, β *справедливы следующие утверждения:*

1) $0 \cdot a = o$*;*

2) $\alpha \cdot o = o$*;*

3) $(-\alpha) \cdot a = -\alpha\, a$*;*

4) $\alpha \cdot (-a) = -\alpha\, a$*;*

5) $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha\, a$*;*

6) $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b$*;*

7) $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a$.

Доказательство.

Приведём доказательство только первого из этих равенств. Покажем, что $0 \cdot a = o$.

Рассмотрим элемент $\beta \cdot a$. Используя условие 6, получаем

$$\beta \cdot a = (\beta + 0) \cdot a = \beta \cdot a + 0 \cdot a.$$

Прибавим к левой и правой части этого равенства элемент, противоположный к $\beta \cdot a$, т.е. $-(\beta \cdot a)$. Тогда

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = -(\beta \cdot a) + \left(\beta \cdot a + 0 \cdot a\right)$$

Но по условию 4

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = o,$$

а согласно условиям 2 и 3

$$-(\beta \cdot a) + \left(\beta \cdot a + 0 \cdot a\right) = \left(-(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a)\right) + 0 \cdot a = o + 0 \cdot a = 0 \cdot a.$$

Следовательно, $0 \cdot a = o$.

Замечания. 1. В дальнейшем будем использовать термин ***линейное пространство***, подразумевая, что оно является вещественным.

2. Элементы линейных пространств принято называть ***векторами***.

4.2. Линейная зависимость и независимость векторов

В предыдущих главах уже встречалось понятие линейной комбинации элементов некоторых множеств. Введём теперь это понятие в общем виде.

Определение. Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа. Тогда выражение $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые действительные числа, называют ***линейной комбинацией*** элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Если $m \in M$ и m является линейной комбинацией элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то есть

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k,$$

то говорят, что m ***линейно выражается*** через элементы $m_1, m_2, \ldots, m_k$ или ***разложен*** по элементам $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Пусть L – линейное пространство, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$.

Определение. Говорят, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ***линейно зависимы***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L.

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называют ***линейно независимыми***.

Эти понятия также рассматривались в предыдущих главах. В главе 1 (пункт 1.14) вводилось понятие линейной зависимости и независимости строк и столбцов матриц, а в главе 3 (пункт 3.3) – свободных векторов. А следующая лемма аналогична лемме 1.8 (глава 1, пункт 1.14) и лемме 3.3 (глава 3, пункт 3.3).

Лемма 4.2. *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Доказательство.

1) Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 \cdot a_1 = -\alpha_2 \cdot a_2 - \ldots - \alpha_k \cdot a_k$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot a_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot a_k,$$

то есть вектор a_1 линейно выражается через векторы $a_2, \ldots, a_k$.

2) Пусть один из векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно выражается через остальные. Например,

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k$$

$$\Rightarrow \quad -a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k = o.$$

Коэффициент при a_1 равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

Замечание. В некоторой литературе формулировку леммы 2.1 берут в качестве определения линейно зависимых векторов.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – линейно независимы, так как

$$\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, если $\alpha_1\mathbf{E}_1 + \alpha_2\mathbf{E}_2 + \alpha_3\mathbf{E}_3 + \alpha_4\mathbf{E}_4 = \mathbf{O}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим многочлены $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = (1+x)^2$. Так как

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

то $g_4(x)$ является линейной комбинацией $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$:

$$g_4(x) = g_1(x) + 2g_2(x) + g_3(x).$$

Согласно лемме 2.1 многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ – линейно зависимы.

Пример 3. Рассмотрим последовательности $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$. Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$. Тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 =$$
$$= (2\alpha_1, \ -3\alpha_1, \ \alpha_1) + (3\alpha_2, \ -\alpha_2, \ 5\alpha_2) + (\alpha_3, \ -4\alpha_3, \ 3\alpha_3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 будут линейно независимыми, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – единственное решение полученной системы, то есть если $r(\mathbf{A}) = n$, где $\mathbf{A}$ – основная матрица системы, n – число неизвестных.

В данном случае $|\mathbf{A}| = 35 \neq 0$, то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, следовательно, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

4.3. Базис линейного пространства

Для свободных векторов понятие базиса детально изучалось в главе 3. Утверждения этого параграфа аналогичны утверждениям, доказанным в пункте 3.4.

Определение. Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется ***базисом*** этого линейного пространства.

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства образуют его базис, если выполняются следующие два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора a этого линейного пространства.

Очевидно, что базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, то для любого $\alpha \neq 0$ векторы $\alpha \cdot e_1, \alpha \cdot e_2, \ldots, \alpha \cdot e_n$ также образуют базис.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют ***конечномерным***, а n называют ***размерностью линейного пространства*** (обозначают: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему, состоящую из n векторов, то пространство называют ***бесконечномерным*** (обозначают: $\dim L = \infty$).

Найдём базисы некоторых линейных пространств.

Пример 1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости имеет размерность $\dim V^{(2)} = 2$. Известно, что базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости (теорема 3.7, пункт 3.4, глава 3).

Пример 2. Линейное пространство $V^{(3)}$ свободных векторов пространства имеет размерность $\dim V^{(3)} = 3$. В этом линейном пространстве базисом являются любые три некомпланарных вектора (теорема 3.7, пункт 3.4, глава 3).

Пример 3. Арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$ также является конечномерным. Его размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Базисом являются, например, векторы

$$e_1 = (1;\, 0;\, \ldots,\, 0),\ \ e_2 = (0;\, 1;\, \ldots,\, 0),\ \ \ldots\ ,\ e_n = (0;\, 0;\, \ldots,\, 1).$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Легко проверить, что 1) эти векторы линейно независимые; 2) любой вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Пример 4. Линейное пространство $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{R}$ имеет размерность $\dim M(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4$. Его базисом являются, например, матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, 1) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ – линейно независимы (показали ранее); 2) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4, \mathbf{A}$ – линейно зависимы для любой матрицы $\mathbf{A} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, так как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{E}_1 + a_{12}\mathbf{E}_2 + a_{21}\mathbf{E}_3 + a_{22}\mathbf{E}_4.$$

Базис $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ в дальнейшем будем называть ***стандартным базисом*** линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Пример 5. Обозначим через $\mathbb{R}^n[x]$ – линейное пространство многочленов, степень которых меньше n и имеющих коэффициенты из $\mathbb{R}$. Это линейное пространство имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$. Его базисом являются, например, многочлены

$$f_0(x) = 1,\ \ f_1(x) = x\ ,\ \ f_2(x) = x^2\ ,\ \ \ldots\ ,\ \ f_{n-1}(x) = x^{n-1}.$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$.

Пример 6. Линейное пространство $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ является бесконечномерным: $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. Для любого натурального n многочлены

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x\ ,\ f_2(x)=x^2,\ \dots\ ,\ f_{n-1}(x)=x^{n-1}$$

являются линейно независимыми.

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 4.4 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Доказательство.

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно определению, $e_1, e_2, \dots, e_n$ – линейно независимы, а $e_1, e_2, \dots, e_n, a$ – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$, не все равные нулю одновременно и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n + \beta \cdot a = o\,.$$

Покажем, что $\beta \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n = o$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю одновременно. А это означает, что векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ – линейно зависимые. Но по условию они образуют базис и, следовательно, линейно независимы. Получили противоречие.

Таким образом, $\beta \neq 0$. Тогда

$$-\beta \cdot a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n\,,$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot e_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot e_n\,,$$

то есть a линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Докажем, что вектор a линейно выражается через базис единственным образом. Пусть

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n\,,$$
$$a = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \dots + \beta_n \cdot e_n\,.$$

Тогда

$$a - a = (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n) - (\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \dots + \beta_n \cdot e_n),$$
$$\Rightarrow \quad o = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n\,.$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, …, $\alpha_n - \beta_n = 0$. Откуда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$.

Теорема доказана.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 4.4 о базисе, вектор a можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n.$$

При этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют ***координатами*** вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ координаты $1, -2, -3, 4$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4.$$

Теорема 4.5. 1) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а вектор b имеет в том же базисе координаты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, то вектор $a + b$ будет иметь в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n$.*

2) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n$.*

Доказательство.

По условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.

Тогда используя свойства из определения линейного пространства, получаем

$$a + b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n) =$$
$$= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \ldots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$
$$\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \ldots + \lambda\alpha_n e_n.$$

Теорема доказана.

4.4. Связь между координатами вектора в различных базисах

Координаты вектора определены в данном базисе единственным образом. Но в другом базисе вектор будет иметь другие координаты. Связь между координатами вектора в различных базисах дает следующая теорема.

Теорема 4.6. *Пусть* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *– два базиса линейного пространства* L *. Причем имеют место равенства:*

$$\begin{array}{ccccccccc} e'_1 & = & t_{11}e_1 & + & t_{21}e_2 & + & \ldots & + & t_{n1}e_n, \\ e'_2 & = & t_{12}e_1 & + & t_{22}e_2 & + & \ldots & + & t_{n2}e_n, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e'_n & = & t_{1n}e_1 & + & t_{2n}e_2 & + & \ldots & + & t_{nn}e_n. \end{array}$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *координаты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *а в базисе* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *– координаты* $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \ldots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \ldots & t_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ t_{n1} & t_{n2} & \ldots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу $\mathbf{T}$ называют ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Доказательство.

По условию $a = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \ldots + \beta_n e'_n$. Тогда раскладывая векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, получим

$$a = \beta_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \ldots + t_{n1}e_n) + \beta_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{n2}e_n) + \ldots +$$
$$+ \beta_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{gathered} a = (\beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \ldots + \beta_n t_{1n})e_1 + \\ + (\beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \ldots + \beta_n t_{2n})e_2 + \\ + \quad \ldots \quad + \\ + (\beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \ldots + \beta_n t_{nn})e_n. \end{gathered}$$

Но по условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, следовательно,

$$\alpha_1 = \beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \ldots + \beta_n t_{1n},$$
$$\alpha_2 = \beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \ldots + \beta_n t_{2n},$$
$$\ldots$$
$$\alpha_n = \beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \ldots + \beta_n t_{nn},$$

или в матричном виде $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Но $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя (теорема 1.10, пункт 1.15, глава 1), $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если $\mathbf{T}$ – это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, то $\mathbf{T}^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пример. Вектор x в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2:

$$\begin{matrix} c_1 = 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 = 5e_1 + 4e_2 \end{matrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут –7 и 6, то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.

4.5. Подпространства линейного пространства

Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L.

Определение. Множество L_1 называют ***подпространством линейного пространства*** L, если оно образует линейное пространство относительно операций, определенных на L.

Рассмотрим примеры линейных подпространств.

Пример 1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства.

Пример 2. Линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов.

Для того чтобы показать, что множество является линейным подпространством некоторого линейного пространства, приходится показывать, что оно само является линейным пространством, то есть проверять, выполняются ли все восемь условий из определения линейного пространства. Следующая теорема позволяет значительно уменьшить количество проверяемых условий.

Теорема 4.7 (критерий подпространства). *Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L. Множество L_1 является подпространством линейного пространства L тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

1) $a - b \in L_1$;

2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

Доказательство.

1) Если L_1 – подпространство линейного пространства L, то оно само является линейным пространством, следовательно, $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$.

2) Пусть $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$ для любых $a, b \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что L_1 является линейным пространством. Проверим, выполняются ли условия из определения линейного пространства.

Для этого надо показать, что а) $o \in L_1$ и б) для любого $b \in L_1$ элемент $-b \in L_1$. Остальные условия выполняются, так как они выполняются в L, а L_1 – подмножество L.

По условию теоремы для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$.

а) Пусть $a = b \in L_1$, тогда $b - b = o \in L_1$.

б) Пусть $a = o$. Так как $o \in L_1$, то $o - b = -b \in L_1$.

Кроме этого надо ещё показать, что при умножении элементов множества L_1 на число и их сложении результат этих действий будет также элементом множества L_1.

По условию теоремы $\alpha \cdot a \in L_1$ для любого элемента $a \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $a + b \in L_1$ для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$. Так как $-b \in L_1$, то $a - (-b) = a + b \in L_1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим, как применяется критерий подпространства на следующем примере.

Пример. Пусть M – множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными. Покажем, что это множество является вещественным линейным пространством.

Для этого покажем, что оно является подпространством $\mathbb{R}^n$. По свойству решений системы линейных однородных уравнений (теорема 2.6, пункт 2.5, глава 2) линейная комбинация решений также является решением этой системы. Следовательно, для любых решений $a, b \in M$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $a - b \in M$ и $\alpha \cdot a \in M$. Тогда согласно критерию подпространства, M – подпространство $\mathbb{R}^n$, то есть само является линейным пространством.

Заметим, что базисом этого линейного пространства является фундаментальная система решений. Действительно, согласно теореме о фундаментальной системе решений (теорема 2.7, пункт 2.6, глава 2), решения, входящие в неё, – линейно независимы, а любое другое решение является их линейной комбинацией. Таким образом, фундаментальная система решений является максимальной линейно независимой системой векторов, то есть базисом линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Понятие линейного оператора

Пусть $L^{(n)}$ – линейное пространство размерности n, $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Определение. Отображение f линейного пространства $L^{(n)}$ в $L^{(n)}$ (то есть в само себя) называется ***линейным оператором*** этого линейного пространства, если для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Замечание. Из второго условия определения линейного оператора и леммы 4.1 следует, что

$$f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = o.$$

Рассмотрим примеры линейных операторов.

Пример 1. Пусть $f(x) = o$ для любого $x \in L^{(n)}$ (o – нулевой элемент линейного пространства $L^{(n)}$). Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = o = o + o = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = o = \alpha \cdot o = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***нулевым оператором***, будем обозначать его O.

Пример 2. Пусть $f(x) = x$ для любого $x \in L^{(n)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = x + y = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***тождественным оператором***, будем обозначать его J.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $V^{(3)}$ (свободных векторов в пространстве). Пусть k – некоторое действительное число, отличное от нуля, и пусть $f(x) = k \cdot x$ для любого $x \in V^{(3)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = k \cdot (x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha \cdot x) = k \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (k \cdot x) = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***оператором*** подобия.

5.2. Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – некоторый базис этого пространства.

Тогда любой вектор линейного пространства $L^{(n)}$ линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ &\ldots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad \textbf{(5.1)}$$

Из коэффициентов в разложении векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составим матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют ***матрицей линейного оператора*** в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание. Отметим, что в столбце с номером i матрицы $\mathbf{A}$ стоят координаты вектора $f(e_i)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Соотношение (5.1) можно записать в матричном виде:

$$\big(f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; \ldots \;\; f(e_n)\big) = \big(e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_n\big) \cdot \mathbf{A}. \qquad \textbf{(5.2)}$$

Пример 1. Найдём матрицу нулевого оператора O произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$O(e_1) = O(e_2) = \ldots = O(e_n) = o = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Таким образом, нулевой оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет нулевую матрицу.

Пример 2. Найдём матрицу тождественного оператора J произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$J(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n,$$
$$J(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n,$$
$$\dots,$$
$$J(e_n) = e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Таким образом, тождественный оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет единичную матрицу.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ (пространство многочленов, степень которых меньше n). Пусть f – оператор дифференцирования. Найдём матрицу линейного оператора f в стандартном базисе $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

$$f(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$
$$f(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$
$$f(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$
$$f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$
$$\dots$$
$$f(x^{n-1}) = (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} =$$
$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + (n-1) \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, для каждого линейного оператора можно построить матрицу этого оператора в данном базисе. Оказывается, справедливо и обратное: любой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного линейного пространства, более того это соответствие взаимно однозначное.

Теорема 5.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов n-мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка n.*

5.3. Связь между координатами вектора и координатами его образа

Определение. Если f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, то вектор $f(x)$ называют ***образом*** вектора $x \in L^{(n)}$.

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $\mathbf{A}$ – матрица этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Если $x \in L^{(n)}$, то $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Найдем координаты $y_1, y_2, \dots, y_n$ вектора $y = f(x)$ в этом же базисе. Обозначим через

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n) \cdot \mathbf{Y} \qquad \textbf{(5.3)}$$

С другой стороны, из определения линейного оператора следует, что

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) =$$

$$= (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad f(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad f(e_n)) \cdot \mathbf{X}.$$

Но из равенства (5.2)

$$\big(f(e_1) \quad f(e_2) \quad \dots \quad f(e_n)\big) = \big(e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n\big) \cdot \mathbf{A}.$$

Следовательно,
$$f(x)=\begin{pmatrix}e_1 & e_2 & \dots & e_n\end{pmatrix}\cdot \mathbf{A}\cdot \mathbf{X}. \qquad \textbf{(5.4)}$$

Из равенств (5.3) и (5.4) получаем, что
$$f(x)=(e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n)\cdot \mathbf{Y}=(e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_n)\cdot \mathbf{A}\cdot \mathbf{X},$$
откуда
$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. Если $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора f в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$, $x_1,x_2,\dots,x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$, $y_1,y_2,\dots,y_n$ – координаты вектора $f(x)$ в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$, то имеет место следующее соотношение
$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \quad \text{или } \mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}\text{, где } \mathbf{Y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть линейный оператор f в базисе e_1,e_2 задан матрицей
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}.$$
Найдем $f(x)$, если $x=2e_1-e_2$. Согласно теореме 5.2,
$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\mathbf{A}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(x)=4e_1+5e_2.$$

5.4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Матрица линейного оператора составляется из координат векторов, являющихся образами базисных векторов. Поэтому в разных базисах линейный оператор может иметь разные матрицы. Найдём, как меняется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Лемма 5.3. *Если для любого столбца*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

имеет место равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$*, где* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка* n*, то* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Доказательство.

Так как $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ для любого столбца $\mathbf{X}$, то пусть

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

то есть $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, …, $a_{n1} = b_{n1}$.

Проводя аналогичные рассуждения для столбцов

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

получаем равенство остальных элементов матрицы $\mathbf{A}$ соответствующим элементам матрицы $\mathbf{B}$.

Лемма доказана.

Теорема 5.4. *Если* $\mathbf{A}$ *– матрица линейного оператора* f *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$, *то матрица* $\mathbf{B}$ *этого линейного оператора в базисе* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *имеет вид:*

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ *– матрица перехода от базиса* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *к базису* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Доказательство.

Пусть x – произвольный вектор линейного пространства $L^{(n)}$. Обозначим через $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – столбцы координат векторов x и $f(x)$ соответственно в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а через $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{Y}'$ – столбцы координат этих векторов в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Тогда согласно теореме 4.6,

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}', \quad \mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}',$$

и согласно теореме 5.2,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}'.$$

Из $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ получаем

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}.$$

Но $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'$, следовательно,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}',$$

откуда

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Умножим полученное равенство на матрицу $\mathbf{T}^{-1}$ слева:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}' \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Таким образом, имеем равенства

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}' \ \text{ и } \ \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'$$
$$\Rightarrow \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Из последнего полученного равенства и леммы 5.3 получаем, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}.$$

Теорема доказана.

5.5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор $x \in L^{(n)}$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора f, если существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \lambda_0 x$, при этом λ_0 называют ***собственным значением*** этого линейного оператора и говорят, что собственный вектор x ***относится*** к собственному значению λ_0.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.5. *Собственный вектор линейного оператора относится к единственному собственному значению.*

Доказательство.

Допустим, что собственный вектор x относится к собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda_2 x$, откуда $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, то есть $(\lambda_1 - \lambda_2)x = o$.

Если $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $x = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Теорема доказана.

Теорема 5.6. (свойство собственных векторов). *Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно независимые собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором, относящимся к этому же собственному значению.*

Доказательство.

Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к собственному значению λ, то

$$f(x_1) = \lambda x_1, \quad f(x_2) = \lambda x_2, \quad \ldots, \quad f(x_n) = \lambda x_n.$$

Пусть $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$ – нетривиальная линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ – числа, не все равные нулю одновременно. Тогда так как векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \neq o$, причём,

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \alpha_n \cdot f(x_n) =$$

$= \alpha_1 \cdot \lambda \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \lambda \cdot x_n = \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n)$.

Следовательно, $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$ – собственный вектор, относящийся к собственному значению λ.

Теорема доказана.

Теорема 5.7. *Собственные векторы* x_1 *и* x_2 *линейного оператора* f, *относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство.

Векторы x_1 и x_2 являются собственными векторами линейного оператора f. Тогда $f(x_1) = \lambda_1 x_1$, $f(x_2) = \lambda_2 x_2$, причём из условия теоремы $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 = o. \quad \textbf{(5.5)}$$

Векторы x_1 и x_2 – линейно независимы, если это равенство возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Покажем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Подействуем линейным оператором f на левую и правую часть равенства (5.5):

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = f(o) = o \quad \Rightarrow$$

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 = o \quad \textbf{(5.6)}$$

1) Умножим равенство (5.5) на $-\lambda_2$ и прибавим к (5.6). Тогда

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot \lambda_2 \cdot x_1 = o \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 - \lambda_2 \cdot x_1) = \alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_1 = o.$$

По условию теоремы $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_1 = \alpha_1^{-1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x_1 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_1 = 0$.

2) Умножим равенство (5.5) на $-\lambda_1$ и прибавим к (5.6). Тогда

$$\alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = o \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_2 \cdot (\lambda_2 \cdot x_2 - \lambda_1 \cdot x_2) = \alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot x_2 = o.$$

По условию теоремы $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. Если $\alpha_2 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_2 = \alpha_2^{-1} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x_2 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_2 = 0$.

Теорема доказана.

Применяя метод математической индукции, по аналогии с доказательством теоремы 10.3. можно доказать более широкое утверждение.

Теорема 5.8. *Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

5.6. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть f – линейный оператор, $\mathbf{A}$ – его матрица в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть λ – произвольное число, $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка n. Рассмотрим матрицу $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$, её определитель

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что полученный определитель является многочленом степени n относительно λ.

Определение. Матрица $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$ называется ***характеристической матрицей*** линейного оператора f, а определитель $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$ – его ***характеристическим многочленом***.

Теорема 5.9. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $\mathbf{B}$ – матрица этого линейного оператора в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Надо доказать, что $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|$.

По теореме 5.4 $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$. Используя определение обратной матрицы и свойства линейных операций над матрицами, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\lambda\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| =$$

$$= |\lambda\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot \lambda\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}|$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей каждого из сомножителей,

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| \cdot |\mathbf{T}|.$$

Но $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}$, следовательно, $|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\mathbf{T}| = |\mathbf{E}| = 1$. Тогда

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| \cdot |\mathbf{T}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|.$$

Теорема доказана.

Таким образом, характеристический многочлен линейного оператора определяется однозначно, независимо от того, в каком базисе была найдена его матрица.

Определение. Уравнение $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ называют ***характеристическим уравнением*** линейного оператора f, а корни этого уравнения – ***характеристическими корнями*** линейного оператора f.

Теорема 5.10. *1) Любое собственное значение линейного оператора f является его характеристическим корнем.*

2) Любой вещественный характеристический корень линейного оператора f является его собственным значением.

Замечание. Из теоремы 5.10 следует, что для нахождения всех собственных значений линейного оператора достаточно найти все вещественные корни уравнения $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$.

Покажем, как находятся все собственные векторы и собственные значения линейного оператора, рассмотрев следующий пример.

Пример. Линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти собственные значения этого оператора, найдём его характеристические корни.

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda-(-2)(-1) = \lambda^2-\lambda-2=0\,.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f. Других собственных значений этот оператор не имеет.

1) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_1 = 2$.

Пусть x_1, x_2 – координаты вектора x, а y_1, y_2 – координаты вектора $f(x)$ в базисе e_1, e_2,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 8.1 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$. Но x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 2$, следовательно, $\mathbf{Y} = \lambda_1 \cdot \mathbf{X}$. Получаем

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \;\Rightarrow\; (\lambda_1\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Для нахождения всех собственных векторов, относящихся к $\lambda_1 = 2$, достаточно найти все решения полученной системы.

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$, то есть любое решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_1 = 2$, являются векторы $x = ke_1 + ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Отметим, что условие $k \neq 0$ необходимо в связи с тем, что согласно определению собственными векторами являются только ненулевые векторы.

2) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_2 = -1$.

Аналогично предыдущему получаем

$$(\lambda_2\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{X} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Общим решением этой системы является $x_2 = -2x_1$. Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_2 = -1$, являются векторы $x = ke_1 - 2ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

5.7. Диагонализируемость линейного оператора

Ранее уже было отмечено, что в различных базисах линейный оператор имеет различные матрицы.

Определение. Линейный оператор называется ***диагонализируемым***, если существует базис, относительно которого его матрица является диагональной.

Оказывается, что не все линейные операторы являются диагонализируемыми.

Теорема 5.11 (критерий диагонализируемости линейного оператора). *Линейный оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в линейном пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.*

Доказательство.

1) Пусть f – диагонализируемый линейный оператор. Тогда существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, относительно которого его матрица $\mathbf{A}$ – диагональная:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы линейного оператора, в первом столбце матрицы $\mathbf{A}$ находятся координаты вектора $f(e_1)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, во втором – координаты вектора $f(e_2)$ и так далее. Таким образом,

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n = \lambda_1 \cdot e_1,$$
$$f(e_2) = 0 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n = \lambda_2 \cdot e_2,$$
$$\ldots$$
$$f(e_n) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n = \lambda_n \cdot e_n,$$

то есть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные векторы линейного оператора f.

2) Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора f. Тогда из определения собственного вектора следует, что

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1, \; f(e_2) = \lambda_2 \cdot e_2, \; \ldots, \; f(e_n) = \lambda_n \cdot e_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ – собственные значения линейного оператора f. Тогда в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица линейного оператора f имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица – диагональная, откуда следует, что f – диагонализируемый оператор.

Теорема доказана.

Замечание. С помощью теоремы 5.11 можно выяснить, является ли линейный оператор диагонализируемым.

Пример 1. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализируемым. Для этого найдём все собственные векторы этого линейного оператора. Если из них можно выбрать векторы, образующие базис линейного пространства $L^{(2)}$, то согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 5.11), линейный оператор f – диагонализируемый, в противном случае – нет.

Найдем собственные значения линейного оператора f.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f.

Обозначим через x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 1$, через y – собственный вектор, относящийся к $\lambda_2 = 3$. Согласно теореме 5.7, собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, – линейно независимы. Следовательно, x и y – линейно независимы. Линейное пространство $L^{(2)}$ имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$, поэтому векторы x и y являются базисом этого пространства. Таким образом, линейный оператор f – диагонализируемый.

Найдём матрицу линейного оператора f в базисе x, y. Согласно определению матрицы линейного оператора, элементы первого столбца этой матрицы – это коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису x, y, а второго столбца – коэффициенты в разложении $f(y)$. Так как

$$f(x) = \lambda_1 \cdot x = x = 1 \cdot x + 0 \cdot y,$$
$$f(y) = \lambda_2 \cdot y = 3 \cdot y = 0 \cdot x + 3 \cdot y,$$

матрица линейного оператора f в базисе x, y имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализируемым.

Найдём собственные значения линейного оператора f.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 1(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень $\lambda = 2$, который и является собственным значением линейного оператора f.

Найдем все собственные векторы линейного оператора f, то есть все собственные векторы, относящиеся к $\lambda = 2$.

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$. Фундаментальная система состоит из одного решения. Тогда все остальные решения линейно выражаются через это решение, то есть любые два собственных вектора линейного оператора f пропорциональны, откуда следует, что они линейно зависимы. Получаем, что в линейном пространстве $L^{(2)}$, которое имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$, не существует базиса из собственных векторов линейного оператора f. Согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 5.11), линейный оператор f не является диагонализируемым.

Рекомендуемая литература

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В, Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1986. – 272 с.
2. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1990. – 286 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
4. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006.
5. Ильин В.А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2: Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2004. – 368 с
7. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.
8. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – СПб.: Лань, 2005. – 416 с.
9. Фаддеев, Д. К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

Учебное издание

ШЕРСТНЁВА Анна Игоревна
ЯНУЩИК Ольга Владимировна
ПАХОМОВА Елена Григорьевна
ИМАС Ольга Николаевна

ЛЕКЦИИ ПО ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЕ

Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук*,
профессор К.П. Арефьев
Редактор *А.И. Шерстнёва*
Компьютерная верстка *А.И. Шерстнёва*
Дизайн обложки *А.С. Пыжик*

Подписано к печати 05.11.2010. Формат 60х84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,12. Уч.-изд.л. 4,63.
Заказ 1906-10. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru