ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета

Издательство
Томского политехнического университета
2010

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я73
Ш50

Шерстнёва А.И.

Ш50 Линейные пространства. Линейные операторы: учебное пособие/ А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик; Национальный исследовательский Томский политехнический университет. − Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 92 с.

Учебное пособие предназначено для студентов технических вузов всех форм обучения, изучающих разделы высшей математики «Линейные пространства» и «Линейные операторы».

Пособие содержит теоретические сведения по данному курсу, сопровождается рассмотрением большого количества примеров и задач, облегчающим усвоение материала. Также приводятся задачи для самостоятельного решения, к которым прилагаются ответы.

УДК 12.64(075.8)
ББК 22.143я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Н.Ю. Галанова

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Е.А. Тимошенко

Оглавление

Предисловие

На практике часто встречаются множества, элементы которых можно складывать и умножать на действительные числа. Например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д. Все эти множества, несмотря на то, что состоят из элементов разной природы, обладают одними и теми же свойствами, для них верны одни и те же утверждения. Линейное пространство – это понятие, обобщающее понятия всех таких множеств. Таким образом, все факты, доказанные для линейных пространств, переносятся на каждое из этих множеств.

§ 1. Линейные пространства

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа. Обозначим через $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Определение. Множество L называется ***линейным пространством над*** $\mathbb{R}$ или ***вещественным линейным пространством,*** если выполняются следующие условия:

1) $a+b=b+a$ для любых $a,b\in L$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a,b,c\in L$;
3) во множестве L существует элемент o, называемый ***нулевым элементом***, такой, что $a+o=a$ для любого $a\in L$;
4) для каждого элемента $a\in L$ существует элемент $-a\in L$, называемый ***противоположным*** элементу a, такой, что $a+(-a)=o$;
5) $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
6) $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ для любых $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и любого $a\in L$;
7) $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ для любого $\alpha\in\mathbb{R}$ и любых $a,b\in L$;
8) $1a=a$ для любого $a\in L$.

Рассмотрим, какие из известных множеств являются вещественными линейными пространствами.

Пример 1.1. Пусть $M(m\times n,\mathbb{R})$ – множество матриц размера $m\times n$ с элементами из $\mathbb{R}$. Для этого множества все условия из определения линейного пространства выполняются (согласно свойствам линейных операций над матрицами). Следовательно, множество $M(m\times n,\mathbb{R})$ является вещественным линейным пространством.

Пример 1.2. Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости). Для этого множества также выполняются все условия из определения линейного пространства (согласно свойствам линейных операций над векторами). Следовательно, множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) является вещественным линейным пространством.

Пример 1.3. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество последовательностей n действительных чисел. Введем операцию сложения элементов множества $\mathbb{R}^n$ и умножения их на число. Пусть $a,b\in\mathbb{R}^n$, $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Полагаем

$$a+b=(a_1+b_1,\, a_2+b_2,\, \ldots,\, a_n+b_n),$$
$$\alpha\cdot a=(\alpha\cdot a_1,\, \alpha\cdot a_2,\, \ldots,\, \alpha\cdot a_n).$$

Можно проверить, что все условия из определения линейного пространства в этом случае выполняются (нулевым элементом будет $o=(0, 0, \ldots, 0)$, противоположным элементу $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – элемент $-a=(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$). Следовательно, множество $\mathbb{R}^n$ является вещественным линейным пространством. Его называют ***арифметическим линейным пространством***, а его элементы – n***-мерными векторами***.

Пример 1.4. Пусть $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$. Можно показать, что все условия из определения линейного пространства для множества $\mathbb{R}[x]$ выполняются. Следовательно, это множество является вещественным линейным пространством.

Пример 1.5. Пусть $\mathbf{C}[a,b]$ – множество функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$. Для этого множества также можно проверить, что все условия из определения линейного пространства выполняются. Следовательно, оно является вещественным линейным пространством.

Для действий над элементами линейных пространств верны правила, аналогичные правилам выполнения арифметических действий над обычными числами. Используя условия из определения линейного пространства, легко доказать следующие утверждения.

Лемма 1.1. *Пусть* L *– вещественное линейное пространство. Тогда для любых элементов* $a,b \in L$ *и любых действительных чисел* α, β *справедливы следующие утверждения:*

1) $0 \cdot a = o$*;*

2) $\alpha \cdot o = o$*;*

3) $(-\alpha) \cdot a = -\alpha\, a$*;*

4) $\alpha \cdot (-a) = -\alpha\, a$*;*

5) $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha\, a$*;*

6) $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b$*;*

7) $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a$*.*

Доказательство.

Приведём доказательство только первого из этих равенств. Покажем, что $0 \cdot a = o$.

Рассмотрим элемент $\beta \cdot a$. Используя условие 6, получаем

$$\beta \cdot a = (\beta + 0) \cdot a = \beta \cdot a + 0 \cdot a.$$

Прибавим к левой и правой части этого равенства элемент, противоположный элементу $\beta \cdot a$, т.е. $-(\beta \cdot a)$. Тогда

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = -(\beta \cdot a) + \left(\beta \cdot a + 0 \cdot a\right)$$

Но по условию 4

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = o,$$

а согласно условиям 2 и 3

$$-(\beta \cdot a) + \left(\beta \cdot a + 0 \cdot a\right) = \left(-(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a)\right) + 0 \cdot a = o + 0 \cdot a = 0 \cdot a.$$

Следовательно, $0 \cdot a = o$.

Замечания. 1. В дальнейшем будем использовать термин ***линейное пространство***, подразумевая, что оно является вещественным.

2. Элементы линейных пространств принято называть ***векторами***.

Задачи с решениями

Задача 1.6. В примере 1.3 были введены операции сложения элементов $\mathbb{R}^n$ и умножения их на действительные числа. Показать, что множество $\mathbb{R}^2$ является линейным пространством.

Решение.

Для того чтобы показать, что множество $\mathbb{R}^2$ является линейным пространством, достаточно проверить выполнение условий 1 – 8 из определения линейного пространства. Заметим, что если $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$a+b=(a_1, a_2)+(b_1, b_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2),$$
$$\alpha a=\alpha(a_1, a_2)=(\alpha a_1, \alpha a_2).$$

1) Покажем, что $a+b=b+a$ для всех $a=(a_1, a_2), b=(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$. Так как $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, то $a_1+b_1=b_1+a_1$, $a_2+b_2=b_2+a_2$. Тогда

$$a+b=(a_1+b_1, a_2+b_2)=(b_1+a_1, b_2+a_2)=(b_1, b_2)+(a_1, a_2)=b+a.$$

2) Покажем, что $(a+b)+c=a+(b+c)$ для любых $a=(a_1, a_2)$, $b=(b_1, b_2), c=(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$(a+b)+c=\big((a_1, a_2)+(b_1, b_2)\big)+(c_1, c_2)=(a_1+b_1, a_2+b_2)+(c_1, c_2)=$$
$$=(a_1+b_1+c_1, a_2+b_2+c_2)=(a_1, a_2)+(b_1+c_1, b_2+c_2)=$$
$$=(a_1, a_2)+\big((b_1, b_2)+(c_1, c_2)\big)=a+(b+c).$$

3) Покажем, что существует нулевой элемент o, такой, что для любого элемента $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ $a+o=o$.

Обозначим через $o=(0, 0)$. Тогда

$$a+o=(a_1, a_2)+(0, 0)=(a_1+0, a_2+0)=(a_1, a_2)=a.$$

4) Покажем, что для каждого элемента $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ существует противоположный элемент $-a$, такой, что $a+(-a)=o$.

Обозначим через $-a=(-a_1, -a_2)$. Тогда

$$a+(-a)=(a_1, a_2)+(-a_1, -a_2)=(a_1-a_1, a_2-a_2)=(0, 0)=o.$$

5) Покажем, что $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha(\beta a)=\alpha(\beta(a_1, a_2))=\alpha(\beta a_1, \beta a_2)=(\alpha\beta a_1, \alpha\beta a_2)=$$
$$=(\alpha\beta)(a_1, a_2)=(\alpha\beta)a.$$

6) Покажем, что $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $a=(a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$(\alpha+\beta)a=(\alpha+\beta)(a_1, a_2)=\big((\alpha+\beta)a_1, (\alpha+\beta)a_2\big)=$$
$$\big(\alpha a_1+\beta a_1, \alpha a_2+\beta a_2\big)=(\alpha a_1, \alpha a_2)+\big(\beta a_1, \beta a_2\big)=$$
$$=\alpha(a_1, a_2)+\beta\big(a_1, a_2\big)=\alpha a+\beta a.$$

7) Покажем, что $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых $a=(a_1, a_2), b=(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\alpha(a+b)=\alpha(a_1+b_1, a_2+b_2)=\left(\alpha(a_1+b_1), \alpha(a_2+b_2)\right)=$$
$$\left(\alpha a_1+\alpha b_1, \alpha a_2+\alpha b_2\right)=(\alpha a_1, \alpha a_2)+\left(\beta a_1, \beta a_2\right)=$$
$$\alpha(a_1, a_2)+\beta\left(a_1, a_2\right)=\alpha a+\alpha b.$$

8) Покажем, что $1\cdot a=a$ для любого $a=(a_1, a_2)\in\mathbb{R}^2$.

$$1\cdot a=1\cdot(a_1, a_2)=(1\cdot a_1, 1\cdot a_2)=(a_1, a_2)=a.$$

Задача 1.7. На множестве $\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}, x>0\}$ следующим образом вводятся операции сложения и умножения на число:

$$a\oplus b=a\cdot b,$$
$$\alpha\circ a=a^\alpha$$

для любых $a,b\in\mathbb{R}^+$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Является ли множество $\mathbb{R}^+$ линейным пространством?

Решение.

Проверим, выполняются ли условия 1 – 8 из определения линейного пространства. Пусть $a,b,c\in\mathbb{R}^+$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

1) $a\oplus b=a\cdot b=b\cdot a=b\oplus a$.

2) $(a\oplus b)\oplus c=(a\cdot b)\oplus c=a\cdot b\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\oplus(b\cdot c)=a\oplus(b\oplus c)$.

3) Обозначим через $o=1$. Тогда $a\oplus o=a\cdot 1=a$.

4) Обозначим через $-a=a^{-1}$. Тогда $a\oplus(-a)=a\cdot a^{-1}=1=o$.

5) $\alpha\circ(\beta\circ a)=\alpha\circ(a^\beta)=(a^\beta)^\alpha=a^{\alpha\beta}=\alpha\beta\circ a$.

6) $(\alpha+\beta)\circ a=a^{\alpha+\beta}=a^\alpha\cdot a^\beta=a^\alpha\oplus a^\beta=(\alpha\circ a)\oplus(\beta\circ a)$.

7) $\alpha\circ(a\oplus b)=\alpha\circ(a\cdot b)=(ab)^\alpha=a^\alpha\cdot b^\alpha=a^\alpha\oplus b^\alpha=$

$=(\alpha\circ a)\oplus(\alpha\circ b)$.

8) $1\circ a=a^1=a$.

Так как все условия из определения линейного пространства выполняются, то $\mathbb{R}^+$ – линейное пространство.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1.8. Показать, что множество квадратных матриц второго порядка является линейным пространством.

§ 2. Линейная зависимость и независимость векторов

Напомним, что если M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа, то выражение $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$, где $m_1, m_2, \ldots, m_k \in M$, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые действительные числа, называют ***линейной комбинацией*** элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Если $m \in M$ и m является линейной комбинацией элементов $m_1, m_2, \ldots, m_k$, то есть

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k ,$$

то говорят, что m ***линейно выражается*** через элементы $m_1, m_2, \ldots, m_k$ или ***разложен*** по элементам $m_1, m_2, \ldots, m_k$.

Пусть L – линейное пространство, $a_1, a_2, \ldots, a_k \in L$.

Определение. Говорят, что векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – ***линейно зависимы***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L.

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называют ***линейно независимыми***.

Лемма 2.1. *Векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Доказательство.

1) Пусть векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \ldots + \alpha_k \cdot a_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 \cdot a_1 = -\alpha_2 \cdot a_2 - \ldots - \alpha_k \cdot a_k$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot a_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot a_k ,$$

то есть вектор a_1 линейно выражается через векторы $a_2, \ldots, a_k$.

2) Пусть один из векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно выражается через остальные. Например,

$$a_1 = \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k$$

$$\Rightarrow \quad -a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \ldots + \alpha_k a_k = o.$$

Коэффициент при a_1 равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

Замечание. В некоторой литературе формулировку леммы 2.1 берут в качестве определения линейно зависимых векторов.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 2.1. Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_4$ – линейно независимы, так как

$$\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \mathbf{E}_3 + \alpha_4 \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, если $\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \mathbf{E}_3 + \alpha_4 \mathbf{E}_4 = \mathbf{O}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$\alpha_1 = 0, \ \alpha_2 = 0, \ \alpha_3 = 0, \ \alpha_4 = 0.$$

Пример 2.2. Рассмотрим многочлены $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = (1+x)^2$. Так как

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

то $g_4(x)$ является линейной комбинацией $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$:

$$g_4(x) = g_1(x) + 2g_2(x) + g_3(x).$$

Согласно лемме 2.1 многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ – линейно зависимы.

Пример 2.3. Рассмотрим последовательности $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$. Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$. Тогда

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 =$$
$$= (2\alpha_1, \ -3\alpha_1, \ \alpha_1) + (3\alpha_2, \ -\alpha_2, \ 5\alpha_2) + (\alpha_3, \ -4\alpha_3, \ 3\alpha_3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 будут линейно независимыми, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – единственное решение полученной системы, то есть если $r(\mathbf{A}) = n$, где $\mathbf{A}$ – основная матрица системы, n – число неизвестных.

В данном случае $|\mathbf{A}| = 35 \neq 0$, то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, следовательно, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

Задачи с решениями

Задача 2.4. Известно, что векторы некоторого линейного пространства x, y и z – линейно независимы. Будут ли линейно независимы следующие векторы:

а) $x - y$, $y - z$, $z - x$;

б) x, $x + y$, $x + y + z$.

Решение.

а) Заметим, что $x - y = -((y - z) + (z - x))$, то есть один из векторов является линейной комбинацией остальных. Тогда согласно лемме 2.1 векторы $x - y$, $y - z$, $z - x$ – линейно зависимые.

б) Проверим, будут ли линейно зависимы векторы x, $x + y$, $x + y + z$. Для этого приравняем линейную комбинацию этих векторов нулевому вектору:

$$\alpha_1 x + \alpha_2 (x + y) + \alpha_3 (x + y + z) = o.$$

Если это равенство имеет место только при $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, то векторы x, $x + y$, $x + y + z$ – линейно независимые. Если же это равенство возможно в случае, когда хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ отличен от нуля, то векторы x, $x + y$, $x + y + z$ – линейно зависимые.

Преобразуем полученное равенство, учитывая, что выполняются условия 1 – 8 из определения линейного пространства:

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x + (\alpha_2 + \alpha_1)y + \alpha_3 z = o.$$

Так как векторы x, y и z – линейно независимые, то

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \qquad\qquad \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Таким образом, векторы x, $x + y$, $x + y + z$ – линейно независимые.

Задача 2.5. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + 5,\; f_2(x) = x^2,\; f_3(x) = 1.$$

Решение.

Заметим, что $f_1(x) = f_2(x) + 5f_3(x)$, то есть вектор $f_1(x)$ – линейная комбинация векторов $f_2(x)$ и $f_3(x)$. Тогда согласно лемме 2.1 $f_1(x) = x^2 + 5,\; f_2(x) = x^2,\; f_3(x) = 1.$ – линейно зависимы.

Задача 2.6. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^2 + x,\; f_2(x) = x - 1,\; f_3(x) = 3.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1(x^2 + x) + \alpha_2(x - 1) + \alpha_3 \cdot 3 = \alpha_1 x^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x + (-\alpha_2 + 3\alpha_3) = 0,$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 & & & = 0, \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & & = 0, \\ & -\alpha_2 & + 3\alpha_3 & = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, откуда следует, что $f_1(x) = x^2 + x,\; f_2(x) = x - 1,\; f_3(x) = 3$ – линейно независимы.

Задача 2.7. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\; \mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 \mathbf{A}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}_2 + \alpha_3 \mathbf{A}_3 = \mathbf{O}$. Тогда

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 & 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + 2\alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 & + 2\alpha_2 & + \alpha_3 & = 0, \\ 2\alpha_1 & + \alpha_2 & - \alpha_3 & = 0, \\ \alpha_1 & + \alpha_2 & & = 0, \\ & \alpha_2 & + 2\alpha_3 & = 0. \end{cases}$$

Чтобы определить, имеет ли эта система ненулевые решения, найдем ранг основной матрицы $\mathbf{A}$ этой системы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&-1\\1&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Для этого с помощью элементарных преобразований строк приведем матрицу $\mathbf{A}$ к ступенчатому виду.

Поменяем местами первую и третью строки:

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&-1\\1&2&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Затем прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на –2, и к третьей строке – первую, умноженную на –1. Получаем

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}.$$

Прибавим теперь к третьей строке и к четвертой строке вторую строку:

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

У полученной матрицы три ненулевые строки, следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 3.

Так как ранг матрицы равен количеству неизвестных, система имеет единственное решение $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$, откуда следует, что $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$ – линейно независимы.

Задача 2.8. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}-1&-2\\2&5\end{pmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1\mathbf{A}_1+\alpha_2\mathbf{A}_2+\alpha_3\mathbf{A}_3=\mathbf{O}$. Тогда

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1&-2\\2&5\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 & -2\alpha_2+\alpha_3 \\ -2\alpha_1+2\alpha_2-4\alpha_3 & 3\alpha_1+5\alpha_2+2\alpha_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг основной матрицы $\mathbf{A}$ этой системы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Прибавим к третьей строке первую строку, умноженную на 2, к четвертой строке – первую, умноженную на –3. Получаем

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Прибавим к четвертой строке вторую строку, умноженную на 4. Получаем

$$\mathbf{A}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

У полученной матрицы две ненулевые строки, следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен 2.

Так как ранг матрицы $\mathbf{A}$ меньше количества неизвестных, система имеет ненулевое решение, откуда следует, что $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ – линейно зависимы.

Задача 2.9. Исследовать на линейную зависимость:

$$a_1=(1, 3, 0),\ a_2=(3, 2, 5),\ a_3=(-1, 4, -5).$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\alpha_3 a_3=o$. Тогда

$$\alpha_1(1, 3, 0) + \alpha_2(3, 2, 5) + \alpha_3(-1, 4, -5) =$$
$$= (\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3, 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, 5\alpha_2 - 5\alpha_3) = (0, 0, 0),$$
откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:
$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ 5\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Определитель основной матрицы этой системы
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $|\mathbf{A}| = 0$, система имеет ненулевое решение. Откуда следует, что $a_1 = (1, 3, 0)$, $a_2 = (3, 2, 5)$, $a_3 = (-1, 4, -5)$ – линейно зависимы.

Задача 2.10. Исследовать на линейную зависимость:
$$a_1 = (2, -3, 1),\ a_2 = (3, -1, 5),\ a_3 = (1, -4, 3).$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$ Тогда
$$\alpha_1(2, -3, 1) + \alpha_2(3, -1, 5) + \alpha_3(1, -4, 3) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0),$$
откуда получаем систему для нахождения коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:
$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$
Определитель основной матрицы этой системы
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 35.$$

Так как $|\mathbf{A}| \neq 0$, система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Откуда следует, что $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$ – линейно независимы.

Задача 2.11. Исследовать на линейную зависимость:
$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos x.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0.$ Тогда

$$\alpha_1 + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0.$$

Так как это равенство выполняется при любых x, возьмем

$$x = 0,\; x = \frac{\pi}{2} \text{ и } x = -\frac{\pi}{2}.$$

Тогда получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\frac{\pi}{2} + \alpha_3 \cos\frac{\pi}{2} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_3 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$ и $f_3(x) = \cos x$ – линейно независимы.

Задача 2.12. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x,\; f_2(x) = \sin x,\; f_3(x) = \cos x.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0.$ Тогда

$$\alpha_1 x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos x = 0.$$

При $x = 0$ имеем $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \sin 0 + \alpha_3 \cos 0 = 0$, откуда $\alpha_3 = 0.$ Тогда

$$\alpha_1 x + \alpha_2 \sin x = 0.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\alpha_1 + \alpha_2 \cos x = 0.$$

Подставим в полученное равенство $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \cos 0 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 \cos\frac{\pi}{2} = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Итак, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, откуда следует, что $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ – линейно независимы.

Задача 2.13. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 1,\; f_2(x) = x,\; f_3(x) = \cos^2 x,\; f_4(x) = \sin^2 x.$$

Решение.

Так как $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $f_1(x) = f_3(x) + f_4(x)$, следовательно, $f_1(x) = 0 \cdot f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)$, то есть $f_1(x)$ – это линейная комбинация $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$. Тогда согласно лемме 2.1 $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = \cos^2 x$, $f_4(x) = \sin^2 x$ – линейно зависимы.

Задача 2.14. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = e^{2x}.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{2x} = 0.$$

Продифференцируем это равенство:

$$\alpha_1 e^x + 2\alpha_2 e^{2x} = 0.$$

Подставляя в каждое из равенств $x = 0$, получаем:

$$\begin{cases} \alpha_1 e^0 + \alpha_2 e^0 = 0, \\ \alpha_1 e^0 + 2\alpha_2 e^0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = e^{2x}$ – линейно независимы.

Задача 2.15. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = \sin x.$$

Решение.

Пусть $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) + \alpha_3 f_3(x) = 0$. Тогда

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 + \alpha_3 \sin x = 0.$$

Продифференцируем данное равенство дважды:

$$\alpha_1 e^x + \alpha_3 \cos x = 0,$$

$$\alpha_1 e^x - \alpha_3 \sin x = 0.$$

Подставляя в каждое из равенств $x = 0$, получаем

$$\begin{cases} \alpha_1 e^0 + \alpha_2 + \alpha_3 \sin 0 = 0, \\ \alpha_1 e^0 + \alpha_3 \cos 0 = 0, \\ \alpha_1 e^0 - \alpha_3 \sin 0 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = \sin x$ – линейно независимы.

Задача 2.16. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = 1,\ f_3(x) = x + 1,\ f_4(x) = x - e^x.$$

Решение.

Заметим, что $f_4(x) = f_3(x) - f_1(x) - f_2(x)$. Тогда согласно лемме 2.1 $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x + 1$, $f_4(x) = x - e^x$ – линейно зависимы.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.17. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 2,\ f_2(x) = x,\ f_3(x) = x^2,\ f_4(x) = (x+1)^2.$$

Задача 2.18. Исследовать на линейную зависимость:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2.19. Исследовать на линейную зависимость:

$$a_1 = (4, -5, 2, 6),\ a_2 = (2, -2, 1, 3),\ a_3 = (1, -3, 3, 9),\ a_4 = (4, -1, 5, 6).$$

Задача 2.20. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4,\ f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5,$$
$$f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6,\ f_4(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7.$$

Задача 2.21. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = e^{-x}.$$

Задача 2.22. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = 1,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = -e^x.$$

Задача 2.23. Исследовать на линейную зависимость:

$$f_1(x) = \cos x,\ f_2(x) = \sin x,\ f_2(x) = \sin 2x.$$

§ 3. Базис линейного пространства

Определение. Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется ***базисом*** этого линейного пространства.

Иначе говоря, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства образуют его базис, если выполняются следующие два условия:

1) $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы;

2) $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы для любого вектора a этого линейного пространства.

Очевидно, что базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, то для любого $\alpha \neq 0$ векторы $\alpha \cdot e_1, \alpha \cdot e_2, \ldots, \alpha \cdot e_n$ также образуют базис.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют ***конечномерным***, а n называют ***размерностью линейного пространства*** (обозначают: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему, состоящую из n векторов, то пространство называют ***бесконечномерным*** (обозначают: $\dim L = \infty$).

Найдём базисы некоторых линейных пространств.

Пример 3.1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости имеет размерность $\dim V^{(2)} = 2$. Известно, что базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

Пример 3.2. Линейное пространство $V^{(3)}$ свободных векторов пространства имеет размерность $\dim V^{(3)} = 3$. В этом линейном пространстве базисом являются любые три некомпланарных вектора.

Пример 3.3. Арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$ также является конечномерным. Его размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Базисом являются, например, векторы

$$e_1 = (1;\ 0;\ \ldots,\ 0),\quad e_2 = (0;\ 1;\ \ldots,\ 0),\quad \ldots,\quad e_n = (0;\ 0;\ \ldots,\ 1).$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n$.

Легко проверить, что 1) эти векторы линейно независимые; 2) любой вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$.

Пример 3.4. Линейное пространство $M(2\times 2, \mathbb{R})$ матриц второго порядка с элементами из $\mathbb{R}$ имеет размерность $\dim M(2\times 2, \mathbb{R}) = 4$. Его базисом являются, например, матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, 1) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ – линейно независимы (показали ранее); 2) $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4, \mathbf{A}$ – линейно зависимы для любой матрицы $\mathbf{A} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$, так как

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}\mathbf{E}_1 + a_{12}\mathbf{E}_2 + a_{21}\mathbf{E}_3 + a_{22}\mathbf{E}_4 .$$

Базис $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ в дальнейшем будем называть ***стандартным базисом*** линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$.

Пример 3.5. Обозначим через $\mathbb{R}^n[x]$ – линейное пространство многочленов, степень которых меньше n и имеющих коэффициенты из $\mathbb{R}$. Это линейное пространство имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$. Его базисом являются, например, многочлены

$$f_0(x) = 1, \ f_1(x) = x, \ f_2(x) = x^2, \ \ldots, \ f_{n-1}(x) = x^{n-1}.$$

Будем называть этот базис ***стандартным базисом*** линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$.

Пример 3.6. Линейное пространство $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из $\mathbb{R}$ является бесконечномерным: $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. Для любого натурального n многочлены

$$f_0(x) = 1, \ f_1(x) = x, \ f_2(x) = x^2, \ \ldots, \ f_{n-1}(x) = x^{n-1}$$

являются линейно независимыми.

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 3.2 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Доказательство.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно определению, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы, а $e_1, e_2, \ldots, e_n, a$ – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$, не все равные нулю одновременно и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n + \beta \cdot a = o.$$

Покажем, что $\beta \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n = o$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не все равны нулю. А это означает, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно зависимые. Но по условию они образуют базис и, следовательно, линейно независимы. Получили противоречие.

Таким образом, $\beta \neq 0$. Тогда

$$-\beta \cdot a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \quad a = -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot e_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot e_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot e_n,$$

то есть a линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Докажем, что вектор a линейно выражается через базис единственным образом. Пусть

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n,$$
$$a = \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n.$$

Тогда

$$a - a = (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n) - (\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \ldots + \beta_n \cdot e_n),$$
$$\Rightarrow \quad o = (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n.$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, …, $\alpha_n - \beta_n = 0$. Откуда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, …, $\alpha_n = \beta_n$.

Теорема доказана.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 3.2 о базисе, вектор a можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \ldots + \alpha_n \cdot e_n.$$

При этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют ***координатами*** вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим следующий пример.

Пример 3.7. Матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ координаты $1, -2, -3, 4$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3)\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4 .$$

Теорема 3.3. 1) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а вектор b имеет в том же базисе координаты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то вектор $a+b$ будет иметь в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n$.*

2) *Если вектор a имеет в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$.*

Доказательство.

По условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$.

Тогда используя свойства из определения линейного пространства, получаем

$$a+b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n) =$$
$$= (\alpha_1+\beta_1)e_1 + (\alpha_2+\beta_2)e_2 + \ldots + (\alpha_n+\beta_n)e_n,$$
$$\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \ldots + \lambda\alpha_n e_n .$$

Теорема доказана.

Задачи с решениями

Задача 3.8. Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in \mathbb{R}^3$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$ образуют векторы

$$e_1 = (1, 0, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0), \quad e_3 = (0, 0, 1).$$

Тогда

$$x = (2, 3, 5) = (2, 0, 0) + (0, 3, 0) + (0, 0, 5) =$$
$$2\cdot(1, 0, 0) + 3\cdot(0, 1, 0) + 5\cdot(0, 0, 1) = 2e_1 + 3e_2 + 5e_3,$$

то есть координатами вектора x в стандартном базисе являются $2, 3, 5$.

2) Разложим вектор $x=(2, 3, 5)$ по базису $b_1=(0, 0, 10)$, $b_2=(2, 0, 0)$, $b_3=(0, 1, 0)$.

$$x=(2, 3, 5)=\frac{1}{2}\cdot(0, 0, 10)+(2, 0, 0)+3\cdot(0, 1, 0)=\frac{1}{2}b_1+b_2+3b_3,$$

то есть координатами вектора x в базисе $b_1=(0, 0, 10)$, $b_2=(2, 0, 0)$, $b_3=(0, 1, 0)$ являются $\frac{1}{2}, 1, 3$.

Задача 3.9. Найти координаты вектора $3x^2-2x+2\in\mathbb{R}^3[x]$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе x^2, $x-1$, 1.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ образуют векторы

$$e_1=1,\ e_2=x,\ e_3=x^2.$$

Тогда

$$3x^2-2x+2=2\cdot1-2\cdot x+3\cdot x^2=2e_1-2e_2+3e_3,$$

то есть координатами вектора $3x^2-2x+2$ в стандартном базисе являются $2, -2, 3$.

2) Разложим вектор $3x^2-2x+2$ по базису x^2, $x-1$, 1.

$$3x^2-2x+2=3\cdot x^2-2(x-1)+0\cdot1,$$

то есть координатами вектора $3x^2-2x+2$ в базисе x^2, $x-1$, 1 являются $3, -2, 0$.

Задача 3.10. Найти координаты вектора $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in M(2\times2,\mathbb{R})$

1) в стандартном базисе этого линейного пространства;

2) в базисе $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Решение.

1) Стандартный базис линейного пространства $M(2\times2,\mathbb{R})$ образуют векторы

$$\mathbf{E}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \mathbf{E}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\mathbf{E}_1+2\mathbf{E}_2+(-1)\mathbf{E}_3+0\cdot\mathbf{E}_4,$$

то есть координатами вектора $\mathbf{X}$ в стандартном базисе являются $1, 2, -1, 0$.

2) Разложим вектор $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ по базису $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=$$

$$=\mathbf{A}_1-\mathbf{A}_2+0\cdot\mathbf{A}_3-\mathbf{A}_4,$$

то есть координатами вектора $\mathbf{X}$ в базисе $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\mathbf{A}_3,\mathbf{A}_4$ являются $1, -1, 0, -1$.

Задача 3.11. Найти размерность линейного пространства диагональных матриц третьего порядка.

Решение.

Покажем, что одним из базисов этого линейного пространства является система векторов

$$\mathbf{B}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_2=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3$ – линейно независимы, и если $\mathbf{A}$ – диагональная матрица третьего порядка, то

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0\\ 0 & 0 & a_3\end{pmatrix}=a_1\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+a_2\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}+a_3\cdot\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=a_1\mathbf{B}_1+a_2\mathbf{B}_2+a_3\mathbf{B}_3.$$

Таким образом, $\mathbf{B}_1,\mathbf{B}_2,\mathbf{B}_3$– максимальная линейно независимая система, то есть базис линейного пространства диагональных матриц третьего порядка.

Так как размерность конечномерного линейного пространства – это количество векторов в базисе, то размерность линейного пространства диагональных матриц третьего порядка равна 3.

Задача 3.12. Найти размерность линейного пространства матриц второго порядка с нулевым первым столбцом;

Решение.

Покажем, что одним из базисов этого линейного пространства является система векторов

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко показать, что $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – линейно независимы, и если $\mathbf{A}$ – матрица второго порядка с нулевым первым столбцом, то

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a_1\mathbf{C}_1 + a_2\mathbf{C}_2.$$

Таким образом, $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – максимальная линейно независимая система, то есть базис линейного пространства матриц второго порядка с нулевым первым столбцом. Размерность этого пространства равна 2.

Задача 3.13. Найти размерность линейного пространства нечётных многочленов;

Решение.

Легко показать, что для любого натурального n система векторов $x, x^3, \ldots, x^{2n-1}$ является линейно независимой. Таким образом, линейное пространство нечётных многочленов является бесконечномерным.

Задача 3.14. Найти размерность линейного пространства нечётных многочленов, степень которых меньше 8.

Решение.

Покажем, что одним из базисов этого линейного пространства является система векторов

$$x, x^3, x^5, x^7.$$

Легко показать, что x, x^3, x^5, x^7 – линейно независимы, и если $f(x)$ – нечётный многочлен, степень которого меньше 8, то

$$f(x) = a_1x + a_2x^3 + a_3x^5 + a_4x^7.$$

Таким образом, x, x^3, x^5, x^7 – базис линейного пространства нечётных многочленов, степень которых меньше 8. Размерность этого линейного пространства равна 4.

Задача 3.15. Доказать, что система векторов $f_1(x) = x - 3$, $f_2(x) = 2x - 5$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$.

Решение.

Так как $\dim \mathbb{R}^2[x] = 2$, достаточно показать, что $f_1(x), f_2(x)$ – линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x) = \alpha_1(x-3) + \alpha_2(2x-5) =$$
$$= (\alpha_1 + \alpha_2)x + (-3\alpha_1 - 5\alpha_2) = 0 \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Таким образом, $f_1(x), f_2(x)$ – линейно независимы, следовательно, образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$.

Задача 3.16. Доказать, что система векторов $f_1(x) = 2x^2 + 3x + 1$, $f_2(x) = -3x^2 + 2x + 4$, $f_3(x) = x^2 - x - 5$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Решение.

Так как $\dim \mathbb{R}^3[x] = 3$, достаточно показать, что $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ – линейно независимы.

Аналогично предыдущему примеру получаем систему

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -44 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким образом, $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ – линейно независимы, следовательно, образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 3.17. Доказать, что система векторов $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Решение.

Так как $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, достаточно показать, что a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

Пусть

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1 (2, 1, -3) + \alpha_2 (3, 2, -5) + \alpha_3 (1, -1, 1) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Определитель основной матрицы этой системы

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Таким образом, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы и, следовательно, образуют базис линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.18. Найти размерность линейного пространства матриц третьего порядка с нулевой главной диагональю.

Задача 3.19. Найти размерность линейного пространства чётных многочленов.

Задача 3.20. Доказать, что система векторов $a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (2, -1)$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 3.21. Доказать, что система векторов $f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $f_2(x) = 2x^2 - x + 2$, $f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$ образует базис линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 3.22. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ и $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ образуют базис линейного пространства $V^{(2)}$ (линейного пространства свободных векторов плоскости).

Задача 3.23. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{p}} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{q}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ образуют базис линейного пространства $V^{(3)}$ (линейного пространства свободных векторов пространства).

§ 4. Связь между координатами вектора в различных базисах

Координаты вектора определены в данном базисе единственным образом. Но в другом базисе вектор будет иметь другие координаты. Связь между координатами вектора в различных базисах дает следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *и* $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ *– два базиса линейного пространства* L. *Причем имеют место равенства:*

$$\begin{array}{ccccccccc} e'_1 & = & t_{11}e_1 & + & t_{21}e_2 & + & \dots & + & t_{n1}e_n, \\ e'_2 & = & t_{12}e_1 & + & t_{22}e_2 & + & \dots & + & t_{n2}e_n, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e'_n & = & t_{1n}e_1 & + & t_{2n}e_2 & + & \dots & + & t_{nn}e_n. \end{array}$$

Если вектор a *имеет в базисе* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *координаты* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, *а в базисе* $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ *– координаты* $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, *то справедливо равенство*

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу $\mathbf{T}$ называют ***матрицей перехода*** от базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Доказательство.

По условию $a = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n$. Тогда раскладывая векторы $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, получим

$$a = \beta_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n) + \beta_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n) + \dots +$$
$$+ \beta_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} a = {} & (\beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \dots + \beta_n t_{1n})e_1 + \\ & + (\beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \dots + \beta_n t_{2n})e_2 + \\ & + \quad \dots \quad + \\ & + (\beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \dots + \beta_n t_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Но по условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, следовательно,

$$\alpha_1 = \beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \ldots + \beta_n t_{1n},$$
$$\alpha_2 = \beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \ldots + \beta_n t_{2n},$$
$$\ldots$$
$$\alpha_n = \beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \ldots + \beta_n t_{nn},$$

или в матричном виде $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты векторов $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Но $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы $\mathbf{T}$ – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя, $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если $\mathbf{T}$ – это матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$, то $\mathbf{T}^{-1}$ – это матрица перехода от базиса $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пример 4.1. Вектор x в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства $\mathbb{R}^2$ образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2:

$$\begin{matrix} c_1 = 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 = 5e_1 + 4e_2 \end{matrix} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут –7 и 6, то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.

Задачи с решениями

Задача 4.2. Найти в базисе $f_1(x) = x-3$, $f_2(x) = 2x-5$ линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ координаты вектора $g(x) = x-4$.

Решение.

Решим эту задачу двумя способами.

Способ 1.

Пусть $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$. Тогда

$$x-4 = \alpha_1(x-3) + \alpha_2(2x-5) = (\alpha_1 + 2\alpha_2)x + (-3\alpha_1 - 5\alpha_2) \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -3\alpha_1 - 5\alpha_2 = -4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 1. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-3}{-1} = 3, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ являются $3, -1$, то есть $g(x) = 3f_1(x) - f_2(x)$.

Способ 2.

Пусть $g(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$. Обозначим через $\mathbf{B}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ и через $\mathbf{A}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе $1, x$ линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$. Тогда

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно теореме 4.1

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $1, x$ к базису $f_1(x), f_2(x)$. Первый столбец матрицы $\mathbf{T}$ – это координаты вектора $f_1(x)$ в базисе $1, x$, второй столбец – координаты вектора $f_2(x)$ в базисе $1, x$. Так как

$$f_1(x) = -3 \cdot 1 + 1 \cdot x, \quad f_2(x) = -5 \cdot 1 + 2 \cdot x,$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathbf{A}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{B}$ следует, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}.$$

Найдем $\mathbf{T}^{-1}$. Для этого найдем алгебраические дополнения для каждого из элементов матрицы $\mathbf{T}$:

$T_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 2=2,\qquad T_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 1=-1,$

$T_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-5)=5,\quad T_{22}=(-1)^{2+2}\cdot(-3)=-3.$

Тогда

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 5 & -3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{S}^T=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T=\frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Получаем, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x)$ являются $3,-1$, то есть $g(x)=3f_1(x)-f_2(x)$.

Задача 4.3. Найти в базисе $f_1(x)=2x^2+3x+1$, $f_2(x)=-3x^2+2x+4$, $f_3(x)=x^2-x-5$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x)=4x^2+x-9$.

Решение.

Пусть $g(x)=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_2(x)+\alpha_3 f_3(x)$. Найдем координаты $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, применяя второй способ из предыдущей задачи.

$$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}-9\\ 1\\ 4\end{pmatrix},\quad \mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 3 & 2 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

$$|\mathbf{T}|=44,\quad \mathbf{S}=\begin{pmatrix}-1 & -5 & -13\\ 11 & 11 & 11\\ 6 & -14 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{T}^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T=\frac{1}{44}\begin{pmatrix}-1 & 11 & 6\\ -5 & 11 & -14\\ -13 & 11 & -10\end{pmatrix}\quad\Rightarrow$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{44}\begin{pmatrix} -1 & 11 & 6 \\ -5 & 11 & -14 \\ -13 & 11 & -10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, координатами вектора $g(x)$ в базисе $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ являются $1, 0, 2$, то есть $g(x) = f_1(x) + 2f_3(x)$.

Задача 4.4. Найти в базисе $a_1 = (2, 1, -3)$, $a_2 = (3, 2, -5)$, $a_3 = (1, -1, 1)$ пространства $\mathbb{R}^3$ координаты вектора $b = (6, 2, -7)$.

Решение.

Пусть $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3$. Найдем координаты $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, применяя способ 1 из задачи 4.2.

$$(6, 2, -7) = \alpha_1(2, 1, -3) + \alpha_2(3, 2, -5) + \alpha_3(1, -1, 1) =$$
$$= (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3, -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow$$
$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 6, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 2, \\ -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = -7. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -7 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 1.$$

$$\alpha_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 1, \quad \alpha_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad \alpha_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1.$$

Таким образом, координатами вектора b в базисе a_1, a_2, a_3 являются $1, 1, 1$, то есть $b = a_1 + a_2 + a_3$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.5. Найти в базисе $a_1 = (1, 1), a_2 = (2, -1)$ линейного пространства $\mathbb{R}^2$ координаты вектора $b = (2, -4)$.

Задача 4.6. Найти в базисе $f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1$, $f_2(x) = 2x^2 - x + 2$, $f_3(x) = -x^2 + 2x + 2$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ координаты вектора $g(x) = x^2 + x + 1$.

Задача 4.7. Найти в базисе $\overline{\mathbf{p}} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ линейного пространства $V^{(2)}$ (линейного пространства свободных векторов плоскости) координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = 9\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Задача 4.8. Найти в базисе $\overline{\mathbf{p}} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{q}} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\overline{\mathbf{r}} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ линейного пространства $V^{(3)}$ (линейного пространства свободных векторов пространства) координаты вектора $\overline{\mathbf{c}} = 11\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.

§ 5. Подпространства линейного пространства

Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L.

Определение. Множество L_1 называют ***подпространством линейного пространства*** L, если оно образует линейное пространство относительно операций, определенных на L.

Рассмотрим примеры линейных подпространств.

Пример 5.1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства.

Пример 5.2. Линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов.

Для того чтобы показать, что множество является линейным подпространством некоторого линейного пространства, приходится показывать, что оно само является линейным пространством, то есть проверять, выполняются ли все восемь условий из определения линейного пространства. Следующая теорема позволяет значительно уменьшить количество проверяемых условий.

Теорема 5.1 (критерий подпространства). *Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L. Множество L_1 является подпространством линейного пространства L тогда и только тогда, когда для любых элементов $a,b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*

1) $a - b \in L_1$;

2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

Доказательство.

1) Если L_1 – подпространство линейного пространства L, то оно само является линейным пространством, следовательно, $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$.

2) Пусть $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$ для любых $a,b \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что L_1 является линейным пространством. Проверим, выполняются ли условия из определения линейного пространства.

Для этого надо показать, что а) $o \in L_1$ и б) для любого $b \in L_1$ элемент $-b \in L_1$. Остальные условия выполняются, так как они выполняются в L, а L_1 – подмножество L.

По условию теоремы для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$.

а) Пусть $a = b \in L_1$, тогда $b - b = o \in L_1$.

б) Пусть $a = o$. Так как $o \in L_1$, то $o - b = -b \in L_1$.

Кроме этого надо ещё показать, что при умножении элементов множества L_1 на число и их сложении результат этих действий будет также элементом множества L_1.

По условию теоремы $\alpha \cdot a \in L_1$ для любого элемента $a \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $a + b \in L_1$ для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$. Так как $-b \in L_1$, то $a - (-b) = a + b \in L_1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим, как применяется критерий подпространства на следующем примере.

Пример 5.3. Пусть M – множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными. Покажем, что это множество является вещественным линейным пространством.

Для этого покажем, что оно является подпространством $\mathbb{R}^n$. По свойству решений системы линейных однородных уравнений линейная комбинация решений также является решением этой системы. Следовательно, для любых решений $a, b \in M$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $a - b \in M$ и $\alpha \cdot a \in M$. Тогда согласно критерию подпространства, M – подпространство $\mathbb{R}^n$, то есть само является линейным пространством.

Заметим, что базисом этого линейного пространства является фундаментальная система решений. Действительно, согласно теореме о фундаментальной системе решений, решения, входящие в неё, – линейно независимы, а любое другое решение является их линейной комбинацией. Таким образом, фундаментальная система решений является максимальной линейно независимой системой векторов, то есть базисом линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений.

Задачи с решениями

Задача 5.4. Являются ли следующие множества подпространствами линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$:

1) B_1 – множество четных многочленов, степень которых меньше 5;

2) B_2 – множество многочленов третей степени;

3) $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел?

Решение.

1) Множество B_1 (множество четных многочленов, степень которых меньше 5) является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $g_1(x), g_2(x) \in B_1$. Тогда

$$g_1(x) = a_1x^4 + b_1x^2 + c_1, \quad g_2(x) = a_2x^4 + b_2x^2 + c_2,$$

$$g_1(x) - g_2(x) = (a_1 - a_2)x^4 + (b_1 - b_2)x^2 + (c_1 - c_2),$$

то есть $g_1(x) - g_2(x) \in B_1$.

Пусть $g(x) \in B_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha \cdot g(x) = \alpha \cdot (ax^4 + bx^2 + c) = (\alpha \cdot a)x^4 + (\alpha \cdot b)x^2 + (\alpha \cdot c),$$

то есть $\alpha \cdot g(x) \in B_1$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, B_1 является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

2) Множество B_2 (множество многочленов третей степени) является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $g_1(x) = x^3 + x$, $g_2(x) = x^3 + 1$. Тогда

$$g_1(x) - g_2(x) = x - 1,$$

то есть $g_1(x) - g_2(x) \notin B_2$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, B_2 не является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

3) Множество $\mathbb{R}$ является подмножеством множества $\mathbb{R}_5[x]$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $a - b \in \mathbb{R}$ и $\alpha \cdot a \in \mathbb{R}$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, $\mathbb{R}$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}_5[x]$.

Задача 5.5. Образуют ли следующие множества матриц линейные пространства, если сложение и умножение матриц на число производится стандартным образом (то есть поэлементно):

1) M_1 – множество матриц второго порядка с нулевой первой строкой;

2) M_2 – множество диагональных матриц третьего порядка;

3) M_3 – множество вырожденных матриц третьего порядка (матриц, у которых определитель равен нулю)?

Решение.

1) Множество M_1 (множество матриц второго порядка с нулевой первой строкой) является подмножеством множества $M(2\times 2,\mathbb{R})$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M_1$. Тогда

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\quad \text{и}\quad \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}\end{pmatrix},$$

то есть $\mathbf{A}-\mathbf{B}\in M_1$.

Пусть $\mathbf{A}\in M_1$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha\cdot\mathbf{A}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \alpha\cdot a_{21} & \alpha\cdot a_{22}\end{pmatrix},$$

то есть $\alpha\cdot\mathbf{A}\in M_1$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, M_1 является подпространством линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$, то есть само является линейным пространством.

2) Множество M_2 (множество диагональных матриц третьего порядка) является подмножеством множества $M(3\times 3,\mathbb{R})$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M_2$. Тогда

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}\ \text{ и }\ \mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_1-b_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2-b_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-b_3 \end{pmatrix},$$

то есть $\mathbf{A}-\mathbf{B}\in M_2$.

Пусть $\mathbf{A}\in M_2$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\alpha\cdot\mathbf{A}=\alpha\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\cdot a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\cdot a_3 \end{pmatrix},$$

то есть $\alpha\cdot\mathbf{A}\in M_2$.

Таким образом, согласно критерию подпространства, M_2 является подпространством линейного пространства $M(3\times 3,\mathbb{R})$, то есть само является линейным пространством.

3) Множество M_3 (множество матриц третьего порядка, у которых определитель равен нулю) является подмножеством множества $M(3\times 3,\mathbb{R})$, которое является линейным пространством. Воспользуемся критерием подпространства.

Пусть

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Так как $|\mathbf{A}|=0$ и $|\mathbf{B}|=0$, то $\mathbf{A},\mathbf{B}\in M_3$. Тогда

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Но $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|=1$, следовательно, $\mathbf{A}-\mathbf{B}\notin M_3$. Тогда согласно критерию подпространства, M_3 не является подпространством линейного пространства $M(3\times 3,\mathbb{R})$, то есть не является линейным пространством.

Задача 5.6. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Базисом линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений является любая из её фундаментальных систем решений. Найдем одну из них.

Приведем основную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3x_3, \\ 5x_2 = -7x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 1.4x_3, \\ x_1 = 3x_3 - 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0.2x_3, \\ x_2 = 1.4x_3. \end{cases}$$

Таким образом, фундаментальная система решений состоит из одного решения, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

которое и является базисом линейного пространства решений исходной системы. Размерность этого линейного пространства равна 1.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 5.7. Проверить, являются ли следующие множества подпространствами линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$:

1) M_1 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{R};$$

2) M_2 – множество матриц второго порядка, у которых главная диагональ состоит из 1;

3) M_3 – множество матриц, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ где } b \in \mathbb{R}.$$

Задача 5.8. Образуют ли следующие множества числовых последовательностей линейные пространства, если сложение и умножение последовательностей на число производится стандартным образом (то есть поэлементно):

1) M_1 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_8)$, у которых $a_2 = a_4 = a_6 = a_8 = 0$;

2) M_2 – множество последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_5)$, у которых $a_1 = a_5$;

3) M_3 – множество последовательностей (a_1, a_2, a_3, a_4) целых чисел?

Задача 5.9. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 6. Линейные операторы

Пусть $L^{(n)}$ – линейное пространство размерности n.

Определение. Отображение f линейного пространства $L^{(n)}$ в $L^{(n)}$ (то есть в само себя) называется ***линейным оператором*** этого линейного пространства, если для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Замечание. Из второго условия определения линейного оператора и леммы 1.1 следует, что

$$f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = o.$$

Рассмотрим примеры линейных операторов.

Пример 6.1. Пусть $f(x) = o$ для любого $x \in L^{(n)}$ (o – нулевой элемент линейного пространства $L^{(n)}$). Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = o = o + o = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = o = \alpha \cdot o = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***нулевым оператором***, будем обозначать его O.

Пример 6.2. Пусть $f(x) = x$ для любого $x \in L^{(n)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = x + y = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot x = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***тождественным оператором***, будем обозначать его J.

Пример 6.3. Рассмотрим линейное пространство $V^{(3)}$ (свободных векторов в пространстве). Пусть k – некоторое действительное число, отличное от нуля, и пусть $f(x) = k \cdot x$ для любого $x \in V^{(3)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x+y) = k \cdot (x+y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha \cdot x) = k \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (k \cdot x) = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют ***оператором*** подобия.

Задачи с решениями

Задача 6.4. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (x_2, x_3, x_1 + 2x_2).$$

Решение.

Отображение f является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любых $x, y \in \mathbb{R}^3$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$
$$f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

Проверим, выполняется ли первое условие. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Тогда

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = \\ &= f((x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) = \\ &= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f((x_1, x_2, x_3)) + f((y_1, y_2, y_3)) = \\ &= (x_2, x_3, x_1 + 2x_2) + (y_2, y_3, y_1 + 2y_2) = \\ &= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_1 + 2x_2 + y_1 + 2y_2) = \\ &= (x_2 + y_2, x_3 + y_3, (x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2), \end{aligned}$$

следовательно, $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Проверим, выполняется ли второе условие. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f(\alpha(x_1, x_2, x_3)) = f((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)) = \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha f(x) &= \alpha f((x_1, x_2, x_3)) = \alpha(x_2, x_3, x_1 + 2x_2) = \\ &= (\alpha x_2, \alpha x_3, \alpha x_1 + 2\alpha x_2), \end{aligned}$$

следовательно, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 6.5. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$, если для любого $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x) = (x_2 + x_1, 2x_1 + x_2).$$

Решение.

Пусть $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2$. Тогда

$$f(x+y)=f((x_1+y_1, x_2+y_2))=$$
$$=((x_2+y_2)+(x_1+y_1), 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2))=$$
$$=(x_2+y_2+x_1+y_1, 2x_1+2y_1+x_2+y_2),$$
$$f(x)+f(y)=(x_2+x_2, 2x_1+x_2)+(y_2+y_2, 2y_1+y_2)=$$
$$=(x_2+y_2+x_1+y_1, 2x_1+2y_1+x_2+y_2),$$

следовательно, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

Пусть $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$f(\alpha x)=f((\alpha x_1, \alpha x_2))=(\alpha x_2+\alpha x_1, 2\alpha x_1+\alpha x_2),$$
$$\alpha f(x)=\alpha(x_2+x_1, 2x_1+2x_1)=(\alpha x_2+\alpha x_1, 2\alpha x_1+\alpha x_2)$$

следовательно, $f(\alpha x)=\alpha f(x)$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 6.6. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_1, x_2, x_3+1).$$

Решение.

Если $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$, $\alpha\in\mathbb{R}$, то

$$f(\alpha x)=f((\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3))=(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3+1),$$
$$\alpha f(x)=\alpha(x_1, x_2, x_3+1)=(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3+\alpha),$$

следовательно, $f(\alpha x)\neq\alpha f(x)$ при $\alpha\neq 1$.

Таким образом, f не является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$.

Задача 6.7. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$, если для любого $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x)=(x_1, x_2^2).$$

Решение.

Заметим, что если $x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)\in\mathbb{R}^2$, то

$$f(x+y)=f((x_1+y_1, x_2+y_2))=(x_1+x_2, (x_2+y_2)^2)=$$
$$=(x_1+x_2, x_2^2+y_2^2+2x_2y_2),$$

$$f(x)+f(y)=(x_1,x_2^2)+(y_1,y_2^2)=(x_1+x_2,x_2^2+y_2^2),$$
следовательно, $f(x+y)\ne f(x)+f(y)$ при $x_2y_2\ne 0$.

Таким образом, f не является линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^2$.

Задача 6.8. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$, если для любого $g(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x))=bx+c.$$

Решение.

Пусть $g_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$, $g_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2\in\mathbb{R}^3[x]$. Тогда

$$\begin{aligned} f(g_1(x)+g_2(x)) &= f(a_1x^2+b_1x+c_1+a_2x^2+b_2x+c_2)= \\ &= f((a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2))= \\ &= (b_1+b_2)x+(c_1+c_2), \end{aligned}$$

$$f(g_1(x))+f(g_2(x))=b_1x+c_1+b_2x+c_2=(b_1+b_2)x+(c_1+c_2),$$
следовательно, $f(g_1(x)+g_2(x))=f(g_1(x))+f(g_2(x))$.

Пусть $g(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}^3[x]$, $\alpha\in\mathbb{R}$. Тогда

$$f(\alpha g(x))=f(\alpha(ax^2+bx+c))=f(\alpha ax^2+\alpha bx+\alpha c)=\alpha bx+\alpha c,$$

$$\alpha f(g(x))=\alpha(bx+c)=\alpha bx+\alpha c,$$
следовательно, $f(\alpha g(x))=\alpha f(g(x))$.

Таким образом, f – линейный оператор линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$.

Задача 6.9. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$, если для любого $\mathbf{X}\in M(2\times 2,\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X})=\mathbf{X}^T.$$

Решение.

Согласно свойствам операции транспонирования матриц

$$f(\mathbf{X}+\mathbf{Y})=(\mathbf{X}+\mathbf{Y})^T=\mathbf{X}^T+\mathbf{Y}^T=f(\mathbf{X})+f(\mathbf{Y}),$$

$$f(\alpha\mathbf{X})=(\alpha\mathbf{X})^T=\alpha(\mathbf{X}^T)=\alpha f(\mathbf{X}),$$
то есть f является линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.10. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_1-x_2+x_3,\ x_3+x_2,\ x_1).$$

Задача 6.11. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3$, если для любого $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(2x_1+x_2,\ x_3+x_1,\ x_3^2).$$

Задача 6.12. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$, если для любого $g(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x))=cx^2+bx+a.$$

Задача 6.13. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства $M(2\times 2,\mathbb{R})$, если для любого $\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in M(2\times 2,\mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X})=\begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Задача 6.14. Проверить, является ли отображение f линейным оператором линейного пространства V^3, если для любого $\overline{\mathbf{x}}\in V^3$

$$f(\overline{\mathbf{x}})=[\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}}],\ \text{где } \overline{\mathbf{a}}=\{1,3,-2\}.$$

§7. Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – некоторый базис этого пространства.

Тогда любой вектор линейного пространства $L^{(n)}$ линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Следовательно,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n, \\ &\ldots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \qquad \mathbf{(7.1)}$$

Из коэффициентов в разложении векторов $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$ составим матрицу $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют ***матрицей линейного оператора*** в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Замечание. Отметим, что в столбце с номером i матрицы $\mathbf{A}$ стоят координаты вектора $f(e_i)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Соотношение (7.1) можно записать в матричном виде:

$$\big(f(e_1) \;\; f(e_2) \;\; \ldots \;\; f(e_n)\big) = \big(e_1 \;\; e_2 \;\; \ldots \;\; e_n\big) \cdot \mathbf{A}. \qquad \mathbf{(7.2)}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 7.1. Найдём матрицу нулевого оператора O произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$O(e_1) = O(e_2) = \ldots = O(e_n) = o = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Таким образом, нулевой оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет нулевую матрицу.

Пример 7.2. Найдём матрицу тождественного оператора J произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

$$
\begin{aligned}
&J(e_1) = e_1 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n,\\
&J(e_2) = e_2 = 0\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + \ldots + 0\cdot e_n,\\
&\qquad\qquad \ldots,\\
&J(e_n) = e_n = 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + \ldots + 1\cdot e_n
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.
$$

Таким образом, тождественный оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет единичную матрицу.

Пример 7.3. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ (пространство многочленов, степень которых меньше n). Пусть f – оператор дифференцирования. Найдём матрицу линейного оператора f в стандартном базисе $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

$$
\begin{aligned}
&f(1) = 1' = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x) = x' = 1 = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x^2) = (x^2)' = 2x = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + \ldots + 0\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1},\\
&\ldots\\
&f(x^{n-1}) = (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} =\\
&\qquad\qquad = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + \ldots + (n-1)\cdot x^{n-2} + 0\cdot x^{n-1}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Итак, для каждого линейного оператора можно построить матрицу этого оператора в данном базисе. Оказывается, справедливо и обратное: любой матрице порядка n соответствует линейный оператор n-мерного линейного пространства, более того это соответствие взаимно однозначное.

Теорема 7.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов n-мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка n.*

Задачи с решениями

Задача 7.4. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbb{R}^3$

$$f(x)=(x_2, x_3, x_1+2x_2).$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис

$$e_1=(1,0,0),\ e_2=(0,1,0),\ e_3=(0,0,1).$$

Обозначим матрицу линейного оператора f в стандартном базисе через $\mathbf{A}$. Согласно определению матрицы линейного оператора, элементами первого столбца матрицы $\mathbf{A}$ являются координаты вектора $f(e_1)$ в базисе e_1,e_2,e_3, элементами второго столбца – координаты вектора $f(e_2)$ в базисе e_1,e_2,e_3 и элементами третьего – координаты $f(e_3)$ в том же базисе.

$$f(e_1)=f((1,0,0))=(0,0,1+2\cdot 0)=(0,0,1)=0\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3,$$
$$f(e_2)=f((0,1,0))=(1,0,0+2\cdot 1)=(1,0,2)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+2\cdot e_3,$$
$$f(e_3)=f((0,0,1))=(0,1,0+2\cdot 0)=(0,1,0)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+0\cdot e_3$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&2&0\end{pmatrix}.$$

Задача 7.5. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^2$ в стандартном базисе, если для любого $x=(x_1, x_2)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x)=(x_2+x_1, 2x_1+x_2).$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^2$ является базис

$$e_1=(1,0),\ e_2=(0,1).$$

Тогда

$$f(e_1)=f((1,0))=(0+1, 2\cdot 1+0)=(1,2)=1\cdot e_1+2\cdot e_2,$$
$$f(e_2)=f((0,1))=(1+0, 2\cdot 0+1)=(1,1)=1\cdot e_1+1\cdot e_2$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}.$$

Задача 7.6. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ в стандартном базисе, если для любого $g(x)=ax^2+bx+c\in\mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x)) = bx + c\,.$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ является базис $1, x, x^2$. Тогда

$f(1) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$,

$f(x) = x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$,

$f(x^2) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7.7. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{X} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T\,.$$

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ является

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(\mathbf{E}_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 1 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 1 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 0 \cdot \mathbf{E}_4,$$

$$f(\mathbf{E}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \mathbf{E}_1 + 0 \cdot \mathbf{E}_2 + 0 \cdot \mathbf{E}_3 + 1 \cdot \mathbf{E}_4.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.8. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе, если для любого $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3 + x_2, x_1).$$

Задача 7.9. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ в стандартном базисе, если для любого $g(x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}^3[x]$

$$f(g(x)) = cx^2 + bx + a.$$

Задача 7.10. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ в стандартном базисе, если для любого $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \in M(2\times 2, \mathbb{R})$

$$f(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} x_{22} & 0 \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}.$$

Задача 7.11. Найти матрицу линейного оператора f линейного пространства V^3 в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, если для любого $\overline{\mathbf{x}} \in V^3$

$$f(\overline{\mathbf{x}}) = [\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}], \text{ где } \overline{\mathbf{a}} = \{1, 3, -2\}.$$

§8. Связь между координатами вектора и координатами его образа

Определение. Если f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, то вектор $f(x)$ называют ***образом*** вектора $x \in L^{(n)}$.

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, $\mathbf{A}$ – матрица этого оператора в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Если $x \in L^{(n)}$, то $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Найдем координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ вектора $y = f(x)$ в этом же базисе. Обозначим через

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$f(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad f(x) = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \mathbf{Y} \qquad \textbf{(8.1)}$$

С другой стороны, из определения линейного оператора следует, что

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n) =$$

$$= (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n)) \cdot \mathbf{X}.$$

Но из равенства (7.2)

$$\left(f(e_1) \quad f(e_2) \quad \ldots \quad f(e_n)\right) = \left(e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n\right) \cdot \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \left(e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n\right) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \qquad \textbf{(8.2)}$$

Из равенств (8.1) и (8.2) получаем, что

$$f(x) = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \mathbf{Y} = (e_1 \quad e_2 \quad \ldots \quad e_n) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X},$$

откуда

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 8.1. Если $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты вектора $f(x)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то имеет место следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{или } \mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}\text{, где } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример 8.1. Пусть линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем $f(x)$, если $x = 2e_1 - e_2$. Согласно теореме 8.1

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 4e_1 + 5e_2.$$

Задачи с решениями

Задача 8.2. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = (1, 0, 2).$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис
$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1).$

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $1, 0, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = (-1, 3, 2)$.

Задача 8.3. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad x = (-1, 3, 2).$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3$ является базис
$(1, 0, 0),\ (0, 1, 0),\ (0, 0, 1).$

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $-1, 3, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = (7, 9, 13)$.

Задача 8.4. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad g(x) = x - 3.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ является базис $1, x$. Вектор $g(x)$ в стандартном базисе имеет координаты $-3, 1$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(g(x))$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = -2 - 8x$.

Задача 8.5. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad g(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ является базис $1, x, x^2$. Вектор $g(x)$ в стандартном базисе имеет координаты $1, -3, 2$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора $g(x)$ в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(g(x))$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = 4 + 3x - x^2$.

Задача 8.6. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор $f(x)$.

Решение.

Стандартным базисом линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ является базис

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вектор x в стандартном базисе имеет координаты $2, -1, 0, 1$.

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x в стандартном базисе, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & 3 & 4\\ 2 & 5 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 5\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Тогда $f(x) = 0\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} + 5\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - 2\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 8.7. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^2[x]$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}, \quad g(x) = 2x + 5.$$

Найти вектор $f(g(x))$.

Задача 8.8. Линейный оператор f имеет в стандартном базисе линейного пространства $M(2\times 2, \mathbb{R})$ матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 2\\ 3 & 1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3 & -3\end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}.$$

Найти вектор $f(x)$.

§9. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Матрица линейного оператора составляется из координат векторов, являющихся образами базисных векторов. Поэтому в разных базисах линейный оператор может иметь разные матрицы. Найдём, как меняется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Лемма 9.1. *Если для любого столбца*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

имеет место равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$*, где* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка* n*, то* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Доказательство.

Так как $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ для любого столбца $\mathbf{X}$, то пусть

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

то есть $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, …, $a_{n1} = b_{n1}$.

Проводя аналогичные рассуждения для столбцов

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\\dots\\0\end{pmatrix},\ \dots,\ \mathbf{X}=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\1\end{pmatrix},$$

получаем равенство остальных элементов матрицы $\mathbf{A}$ соответствующим элементам матрицы $\mathbf{B}$.

Лемма доказана.

Теорема 9.2. *Если* $\mathbf{A}$ *– матрица линейного оператора* f *в базисе* $e_1, e_2, \dots, e_n$, *то матрица* $\mathbf{B}$ *этого линейного оператора в базисе* $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ *имеет вид:*

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ *– матрица перехода от базиса* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *к базису* $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Доказательство.

Пусть x – произвольный вектор линейного пространства $L^{(n)}$. Обозначим через $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – столбцы координат векторов x и $f(x)$ соответственно в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$, а через $\mathbf{X}'$ и $\mathbf{Y}'$ – столбцы координат этих векторов в базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$.

Тогда согласно теореме 4.1,

$$\mathbf{X}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}',\quad \mathbf{Y}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}',$$

и согласно теореме 8.1,

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X},\quad \mathbf{Y}'=\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}'.$$

Из $\mathbf{Y}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}$ получаем

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}.$$

Но $\mathbf{X}=\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}'$, следовательно,

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}',$$

откуда

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}' \ \Rightarrow\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}'=\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}'.$$

Умножим полученное равенство на матрицу $\mathbf{T}^{-1}$ слева:

$$\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{Y}'=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}' \ \Rightarrow\ \mathbf{Y}'=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}'.$$

Таким образом, имеем равенства

$$\mathbf{Y}'=\mathbf{B}\cdot\mathbf{X}' \text{ и } \mathbf{Y}'=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}'$$

$$\Rightarrow\quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{X}'=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{X}'.$$

Из последнего полученного равенства и леммы 9.1 получаем, что

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}.$$

Теорема доказана.

Задачи с решениями

Задача 9.1. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого оператора в базисе

$$e_1' = 2e_1 - e_2,$$
$$e_2' = -3e_1 + 2e_2.$$

Решение.

Согласно теореме 9.2

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'.

Элементами первого столбца матрицы $\mathbf{T}$ является координаты вектора e_1' в базисе e_1, e_2, а второго столбца – координаты вектора e_2' в базисе e_1, e_2. Тогда

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{T}| = 1.$$

Найдем $\mathbf{T}^{-1}$. Для этого найдем алгебраическое дополнение каждого из элементов матрицы $\mathbf{T}$:

$$T_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 2 = 2, \qquad T_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-1) = 1,$$
$$T_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3, \qquad T_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 2 = 2.$$

Тогда

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{T}|} \cdot \mathbf{S}^T = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 5 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ 9 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) & 13 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 \\ 9 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) & 9 \cdot (-3) - 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 30 & -47 \\ 20 & -31 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.2. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1, e_2 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу $\mathbf{B}$ этого оператора в базисе

$$e_1' = e_2,$$
$$e_2' = e_1 + e_2.$$

Решение.

Согласно теореме 9.2

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{T}| = -1, \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{T}|} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.3. В стандартном базисе линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ оператор f задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого линейного оператора в базисе $f_1(x) = 3x^2 + 2x$, $f_2(x) = 5x^2 + 3x + 1$, $f_3(x) = 7x^2 + 5x + 3$.

Решение.

Согласно теореме 9.2

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – матрица перехода от стандартного базиса $1, x, x^2$ линейного пространства $\mathbb{R}^3[x]$ к базису $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$. Элементами первого столбца матрицы $\mathbf{T}$ являются координаты вектора $f_1(x)$ в базисе $1, x, x^2$, второго столбца – координаты вектора $f_2(x)$ в базисе $1, x, x^2$, третьего – координаты вектора $f_3(x)$ в базисе $1, x, x^2$.

Тогда

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix},\quad |\mathbf{T}|=4,\quad \mathbf{T}^{-1}=\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{T}|}=\begin{pmatrix}-4&8&-4\\1&-9&6\\1&3&-2\end{pmatrix}.$$

Получаем

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&8&-4\\1&-9&6\\1&3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&8&-4\\6&-9&1\\-2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}4&0&0\\-15&-16&-20\\9&12&16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-3.75&-4&-5\\2.25&3&4\end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 9.4. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1,e_2,e_3 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}15&-11&5\\20&-15&8\\8&-7&6\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу **B** этого оператора в базисе

$$\begin{aligned}e_1' &= 2e_1 + 3e_2 + e_3,\\ e_2' &= 3e_1 + 4e_2 + e_3,\\ e_3' &= e_1 + 2e_2 + 2e_3.\end{aligned}$$

Задача 9.5. Матрицей линейного оператора f в базисе e_1,e_2,e_3 некоторого линейного пространства является матрица

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&2&2\\1&-2&1\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу **B** этого оператора в базисе

$$\begin{aligned}e_1' &= e_2 + e_3,\\ e_2' &= e_1 + e_3,\\ e_3' &= e_1 + e_2.\end{aligned}$$

§ 10. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор $x \in L^{(n)}$ называется ***собственным вектором*** линейного оператора f, если существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \lambda_0 x$, при этом λ_0 называют ***собственным значением*** этого линейного оператора и говорят, что собственный вектор x ***относится*** к собственному значению λ_0.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 10.1. *Собственный вектор линейного оператора относится к единственному собственному значению.*

Доказательство.

Допустим, что собственный вектор x относится к собственным значениям λ_1 и λ_2. Тогда $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda_2 x$, откуда $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, то есть $(\lambda_1 - \lambda_2)x = o$.

Если $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $x = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 1.1). Но x – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Теорема доказана.

Теорема 10.2. (свойство собственных векторов). *Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно независимые собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к одному и тому же собственному значению λ, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором, относящимся к этому же собственному значению.*

Доказательство.

Так как $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к собственному значению λ, то

$$f(x_1) = \lambda x_1,\ \ f(x_2) = \lambda x_2,\ \ \ldots,\ \ f(x_n) = \lambda x_n.$$

Пусть $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$ – нетривиальная линейная комбинация векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то есть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ – числа, не все равные нулю одновременно. Тогда так как векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n \neq o$, причём,

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \alpha_n \cdot f(x_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \lambda \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot \lambda \cdot x_n = \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n).$$

Следовательно, $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \ldots + \alpha_n \cdot x_n$ – собственный вектор, относящийся к собственному значению λ.

Теорема доказана.

Теорема 10.3. *Собственные векторы x_1 и x_2 линейного оператора f, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство.

Векторы x_1 и x_2 являются собственными векторами линейного оператора f. Тогда $f(x_1) = \lambda_1 x_1$, $f(x_2) = \lambda_2 x_2$, причём из условия теоремы $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 = o. \qquad \textbf{(10.1)}$$

Векторы x_1 и x_2 – линейно независимы, если это равенство возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Покажем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Подействуем линейным оператором f на левую и правую часть равенства (10.1):

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = f(o) = o \quad \Rightarrow$$

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 = o \qquad \textbf{(10.2)}$$

1) Умножим равенство (10.1) на $-\lambda_2$ и прибавим к (10.2). Тогда

$$\alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot \lambda_2 \cdot x_1 = o \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 - \lambda_2 \cdot x_1) = \alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_1 = o.$$

По условию теоремы $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_1 = \alpha_1^{-1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 1.1). Но x_1 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_1 = 0$.

2) Умножим равенство (10.1) на $-\lambda_1$ и прибавим к (10.2). Тогда

$$\alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = o \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_2 \cdot (\lambda_2 \cdot x_2 - \lambda_1 \cdot x_2) = \alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot x_2 = o.$$

По условию теоремы $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. Если $\alpha_2 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_2 = \alpha_2^{-1} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 1.1). Но x_2 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_2 = 0$.

Теорема доказана.

Применяя метод математической индукции, по аналогии с доказательством теоремы 10.3. можно доказать более широкое утверждение.

Теорема 10.4. *Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

Задачи с решениями

Задача 10.1. Линейный оператор f задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе e_1, e_2. Выяснить, является ли вектор x собственным вектором этого линейного оператора. Если да, то к какому собственному значению он относится?

1) $x = e_1 - 2e_2$;

2) $x = e_1 + e_2$.

Решение.

1) Допустим, что вектор $x = e_1 - 2e_2$ является собственным вектором линейного оператора f. Тогда согласно определению собственного вектора, для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda \cdot x = \lambda(e_1 - 2e_2) = \lambda e_1 - 2\lambda e_2.$$

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ -2\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = & -1, \\ -2\lambda & = & -7 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \lambda & = & -1, \\ \lambda & = & 3{,}5. \end{cases}$$

Пришли к противоречию. Следовательно, вектор $x = e_1 - 2e_2$ не является собственным вектором линейного оператора f.

2) Допустим, что вектор $x = e_1 + e_2$ является собственным вектором линейного оператора f. Тогда для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lambda \cdot x = \lambda(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \lambda e_2.$$

Обозначим через $\mathbf{X}$ – столбец координат вектора x, через $\mathbf{Y}$ – вектора $f(x)$. Согласно теореме 8.1

$$\mathbf{Y}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{X} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda &= 2,\\ \lambda &= 2\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=2.$$

Получаем, что вектор $f(x)=2e_1+2e_2=2(e_1+e_2)=2x$. Следовательно, вектор $x=e_1+e_2$ – собственный вектор линейного оператора f, относящийся к собственному значению $\lambda=2$.

Задача 10.2. Линейный оператор f задан матрицей

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Выяснить, является ли вектор x собственным вектором этого линейного оператора. Если да, то к какому собственному значению он относится?

1) $x=e_1+e_2+2e_3$;

2) $x=3e_1-3e_2-4e_3$.

Решение.

1) Если вектор $x=e_1+e_2+2e_3$ является собственным вектором линейного оператора f, то для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\lambda\cdot x=\lambda(e_1+e_2+2e_3)=\lambda e_1+\lambda e_2+2\lambda e_3.$$

Аналогично решению предыдущего примера получаем

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \lambda\\ 2\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 3\\ 6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda &= 3,\\ \lambda &= 3,\\ 2\lambda &= 6\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lambda=3.$$

Следовательно, вектор $x=e_1+e_2+2e_3$ является собственным вектором линейного оператора f, относящимся к $\lambda=3$.

2) Если вектор $x=3e_1-3e_2-4e_3$ является собственным вектором линейного оператора f, то для некоторого $\lambda\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\lambda\cdot x=\lambda(3e_1-3e_2-4e_3)=3\lambda e_1-3\lambda e_2-4\lambda e_3,$$

откуда

$$\begin{pmatrix}3\lambda\\ -3\lambda\\ -4\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 3\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\ 9\\ -12\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}3\lambda &= -9,\\ -3\lambda &= 9,\\ -4\lambda &= -12\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases}\lambda &= -3,\\ \lambda &= -3,\\ \lambda &= 3.\end{cases}$$

Следовательно, вектор $x=e_1+e_2+2e_3$ не является собственным вектором линейного оператора f.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 10.3. Линейный оператор f задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в некотором базисе e_1, e_2, e_3. Выяснить, является ли вектор x собственным вектором этого линейного оператора. Если да, то к какому собственному значению он относится?

1) $x = -e_1 + 2e_2 - 2e_3$;

2) $x = e_1 - 3e_3$.

§ 11. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть f – линейный оператор, $\mathbf{A}$ – его матрица в некотором базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть λ – произвольное число, $\mathbf{E}$ – единичная матрица порядка n. Рассмотрим матрицу $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, её определитель

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \left| \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \ldots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \ldots & -a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \ldots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Заметим, что полученный определитель является многочленом степени n относительно λ.

Определение. Матрица $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ называется ***характеристической матрицей*** линейного оператора f, а определитель $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ – его ***характеристическим многочленом***.

Теорема 11.1. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора.*

Доказательство.

Пусть $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора f в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $\mathbf{B}$ – матрица этого линейного оператора в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, $\mathbf{T}$ – матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Надо доказать, что $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$.

По теореме 9.2 $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$. Используя определение обратной матрицы и свойства линейных операций над матрицами, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\lambda\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| =$$

$$= |\lambda\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot \lambda\mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot (\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}|$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей каждого из сомножителей,

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1}\cdot(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}|\cdot|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{T}|.$$

Но $\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}=\mathbf{E}$, следовательно, $|\mathbf{T}^{-1}\cdot\mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}|\cdot|\mathbf{T}| = |\mathbf{E}| = 1$. Тогда

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1}|\cdot|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{T}| = |\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|.$$

Теорема доказана.

Таким образом, характеристический многочлен линейного оператора определяется однозначно, независимо от того, в каком базисе была найдена его матрица.

Определение. Уравнение $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$ называют ***характеристическим уравнением*** линейного оператора f, а корни этого уравнения – ***характеристическими корнями*** линейного оператора f.

Теорема 11.2. *1) Любое собственное значение линейного оператора f является его характеристическим корнем.*

2) Любой вещественный характеристический корень линейного оператора f является его собственным значением.

Замечание. Из теоремы 11.2 следует, что для нахождения всех собственных значений линейного оператора достаточно найти все вещественные корни уравнения $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=0$.

Покажем, как находятся все собственные векторы и собственные значения линейного оператора, рассмотрев следующий пример.

Пример 11.1. Линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти собственные значения этого оператора, найдём его характеристические корни.

$$|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -2 & \lambda\end{vmatrix} = (\lambda-1)\lambda-(-2)(-1) = \lambda^2-\lambda-2=0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1=2$ и $\lambda_2=-1$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f. Других собственных значений этот оператор не имеет.

1) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_1=2$.

Пусть x_1, x_2 – координаты вектора x, а y_1, y_2 – координаты вектора $f(x)$ в базисе e_1, e_2,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 8.1 $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$. Но x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 2$, следовательно, $\mathbf{Y} = \lambda_1 \cdot \mathbf{X}$. Получаем

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \;\Rightarrow\; (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Для нахождения всех собственных векторов, относящихся к $\lambda_1 = 2$, достаточно найти все решения полученной системы.

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$, то есть любое решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_1 = 2$, являются векторы $x = ke_1 + ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Отметим, что условие $k \neq 0$ необходимо в связи с тем, что согласно определению собственными векторами являются только ненулевые векторы.

2) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_2 = -1$.

Аналогично предыдущему получаем

$$(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \;\Rightarrow\; \begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Общим решением этой системы является $x_2 = -2x_1$. Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_2 = -1$, являются векторы $x = ke_1 - 2ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Задачи с решениями

Задача 11.2. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора. Для этого найдем характеристические корни. Составляем характеристический многочлен

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ -3 & \lambda - 1 & -3 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по второму столбцу, получаем

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1) \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2.$$

Характеристическими корнями линейного оператора f являются решения уравнения

$$(\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f.

1) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_1 = 2$. Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты собственного вектора x, $\mathbf{X}$ – столбец, составленный из этих координат. Тогда

$$(\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 0 \\ -3 & 2-1 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$-3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$$

Общим решением является $x_2 = 3x_1 + 3x_3$. Придавая переменным в правой части произвольные значения $x_1 = k_1$, $x_3 = k_2$, получаем, что любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 3k_1 + 3k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственными векторами линейного оператора f, относящимися к $\lambda_1 = 2$, являются векторы, имеющие в исходном базисе координаты $k_1,\ 3k_1 + 3k_2,\ k_2$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, k_1 и k_2 не равны нулю одновременно (если $k_1 = k_2 = 0$, то вектор является нулевым, то есть не является собственным).

2) Найдем все собственные векторы x, относящиеся к $\lambda_2 = 1$. Аналогично предыдущему

$$(\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -3 & 1-1 & -3 \\ 0 & 0 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 & & = & 0, \\ -3x_1 & -3x_3 & = & 0, \\ & -x_3 & = & 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_2 - \text{любое число.}$$

Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_2 = 1$, – это векторы, имеющие в исходном базисе координаты $0,\ k_3,\ 0$, где $k_3 \in \mathbb{R}$, $k_3 \neq 0$.

Задача 11.3. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора.

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ 0 & -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda - 1) = 0.$$

Линейный оператор f имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

1) Пусть $\lambda_1 = 2$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & 1 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ 0 & -2 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 = 0, \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_1 \text{ – любое число.}$$

Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственными векторами линейного оператора f, относящимися к $\lambda_1 = 2$, являются векторы с координатами k_1, 0, 0, где $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq 0$.

2) Пусть $\lambda_2 = -1$. Получаем

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 1 & 1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ 0 & -2 & -1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_2 = -1$, – это векторы с координатами 0, $-k_2$, k_2, где $k_2 \in \mathbb{R}$, $k_2 \neq 0$.

3) Пусть $\lambda_3 = 1$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 & 1 \\ 0 & 1+1 & 0 \\ 0 & -2 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_2 = 0, \\ -2x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_3 \\ 0 \\ k_3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_3 = 1$, – это векторы с координатами k_3, 0, k_3, где $k_3 \in \mathbb{R}$, $k_3 \neq 0$.

Задача 11.4. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по второму столбцу, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = (-1)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} + (\lambda-2)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-2) + (\lambda-2)\big((\lambda-2)\lambda - 1\big) = (\lambda-2)(1+\lambda^2-2\lambda-1) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda) = (\lambda-2)^2\lambda = 0.$$

Линейный оператор f имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 0$.

1) Пусть $\lambda_1 = 2$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2-2 & -1 & -1 \\ 1 & 2-2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = -x_3, \\ x_1 = 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2k_1 \\ -k_1 \\ k_1 \end{pmatrix} \text{ – общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_1 = 2$, – это векторы с координатами $2k_1$, $-k_1$, k_1, где $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 \neq 0$.

2) Пусть $\lambda_2 = 0$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 0-2 & -1 & -1 \\ 1 & 0-2 & -2 \\ -1 & 0 & 2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -k_2 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ – общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_2 = 0$, – это векторы с координатами $0,\ -k_2,\ k_2$, где $k_2 \in \mathbb{R}$, $k_2 \neq 0$.

Задача 11.5. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

Раскладывая этот определитель по третьей строке, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = 1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ \lambda+3 & -3 \end{vmatrix} + (\lambda+2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+3 \end{vmatrix} =$$
$$= (-3 + 2(\lambda+3)) + (\lambda+2)\big((\lambda-2)(\lambda+3)+5\big) =$$
$$= 2\lambda + 3 + (\lambda+2)(\lambda^2 + \lambda - 6 + 5) = 2\lambda + 3 + (\lambda+2)(\lambda^2 + \lambda - 1) =$$
$$= 2\lambda + 3 + \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 2\lambda^2 + 2\lambda - 2 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 =$$
$$= (\lambda+1)^3 = 0$$

Линейный оператор f имеет единственное собственное значение $\lambda = -1$.

Найдем собственные векторы:

$$\begin{pmatrix} -1-2 & 1 & -2 \\ -5 & -1+3 & -3 \\ 1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ -5x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ -x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса. Основной матрицей системы является

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поменяем местами первую и третью строки, затем ко второй строке прибавим первую, умноженную на 5, а к третьей – первую, умноженную на 3. Тогда

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k \\ -k \\ k \end{pmatrix} \text{ – общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda = -1$, – это векторы с координатами $-k,\ -k,\ k$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

Задача 11.6. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -4 & -6 \\ -4 & \lambda-5 & -6 \\ 4 & 4 & \lambda+5 \end{vmatrix} =$$

(вычтем из первого столбца второй)

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & -4 & -6 \\ -\lambda+1 & \lambda-5 & -6 \\ 0 & 4 & \lambda+5 \end{vmatrix} =$$

(вынесем из первого столбца за знак определителя множитель $(\lambda-1)$)

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ -1 & \lambda-5 & -6 \\ 0 & 4 & \lambda+5 \end{vmatrix} =$$

(прибавим ко второй строке первую)

$$= (\lambda - 1)\begin{vmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 0 & \lambda - 9 & -12 \\ 0 & 4 & \lambda + 5 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по первому столбцу, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda - 9 & -12 \\ 4 & \lambda + 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)((\lambda - 9)(\lambda + 5) + 48) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda - 45 + 48) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) =$$

$$= (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Линейный оператор f имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$.

1) Пусть $\lambda_1 = 1$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 1-5 & -4 & -6 \\ -4 & 1-5 & -6 \\ 4 & 4 & 1+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ -4x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_1 = -\frac{1}{4}(4x_2 + 6x_3) = -4x_2 - 1.5x_3 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -k_1 - 1.5k_2 \\ -k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \text{ – общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_1 = 1$, – это векторы с координатами $-k_1 - 1.5k_2$, $-k_1$, k_2, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, k_1 и k_2 не равны нулю одновременно.

2) Пусть $\lambda_2 = 3$.

$$\begin{pmatrix} 3-5 & -4 & -6 \\ -4 & 3-5 & -6 \\ 4 & 4 & 3+5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 0, \\ 4x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса.

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ -4 & -2 & -6 \\ 4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 3x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = -x_3. \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} -k_3 \\ -k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} \text{ – общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_2 = 3$, – это векторы с координатами $-k_3,\ -k_3,\ k_3$, где $k_3 \in \mathbb{R}$, $k_3 \neq 0$.

Задача 11.7. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Найдем собственные значения этого линейного оператора.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -3 & 1 \\ 3 & \lambda-5 & 1 \\ 3 & -3 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

(прибавим ко второму столбцу первый)

$$= \begin{vmatrix} \lambda+1 & \lambda-2 & 1 \\ 3 & \lambda-2 & 1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

(вынесем из второго столбца $(\lambda-2)$)

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} =$$

(вычтем из первой строки вторую)

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

Раскладывая этот определитель по первой строке, получаем

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = (\lambda-2)(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2(\lambda-1) = 0.$$

Линейный оператор f имеет собственные значения $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 1$.

1) Пусть $\lambda_1 = 2$. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2+1 & -3 & 1 \\ 3 & 2-5 & 1 \\ 3 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_3 = 3x_2 - 3x_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ 3k_2 - 3k_1 \end{pmatrix} \text{– общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_1 = 2$, – это векторы с координатами k_1, k_2, $3k_2 - 3k_1$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, k_1 и k_2 не равны нулю одновременно.

2) Пусть $\lambda_2 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1+1 & -3 & 1 \\ 3 & 1-5 & 1 \\ 3 & -3 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему с помощью метода Гаусса.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ \quad - x_2 = -x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} k_3 \\ k_3 \\ k_3 \end{pmatrix} \text{– общее решение.}$$

Следовательно, собственные векторы линейного оператора f, относящиеся к $\lambda_2 = 1$, – это векторы с координатами k_3, k_3, k_3, где $k_3 \in \mathbb{R}$, $k_3 \neq 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 11.8. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.9. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.10. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.11. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.12. Найти все собственные векторы и собственные значения линейного оператора f, заданного в некотором базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 12. Диагонализируемость линейного оператора

Ранее уже было отмечено, что в различных базисах линейный оператор имеет различные матрицы.

Определение. Линейный оператор называется ***диагонализируемым***, если существует базис, относительно которого его матрица является диагональной.

Оказывается, что не все линейные операторы являются диагонализируемыми.

Теорема 12.1 (критерий диагонализируемости линейного оператора). *Линейный оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в линейном пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.*

Доказательство.

1) Пусть f – диагонализируемый линейный оператор. Тогда существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, относительно которого его матрица $\mathbf{A}$ – диагональная:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы линейного оператора, в первом столбце матрицы $\mathbf{A}$ находятся координаты вектора $f(e_1)$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, во втором – координаты вектора $f(e_2)$ и так далее. Таким образом,

$$\begin{aligned} &f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n = \lambda_1 \cdot e_1, \\ &f(e_2) = 0 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n = \lambda_2 \cdot e_2, \\ &\ldots \\ &f(e_n) = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + \lambda_n \cdot e_n = \lambda_n \cdot e_n, \end{aligned}$$

то есть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – собственные векторы линейного оператора f.

2) Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора f. Тогда из определения собственного вектора следует, что

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1, \;\; f(e_2) = \lambda_2 \cdot e_2, \;\; \ldots, \;\; f(e_n) = \lambda_n \cdot e_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ – собственные значения линейного оператора f. Тогда в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрица линейного оператора f имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица – диагональная, откуда следует, что f – диагонализируемый оператор.

Теорема доказана.

Замечание. С помощью теоремы 12.1 можно выяснить, является ли линейный оператор диагонализируемым.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 12.1. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализируемым. Для этого найдём все собственные векторы этого линейного оператора. Если из них можно выбрать векторы, образующие базис линейного пространства $L^{(2)}$, то согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1), линейный оператор f – диагонализируемый, в противном случае – нет.

Найдем собственные значения линейного оператора f.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f.

Обозначим через x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 1$, через y – собственный вектор, относящийся к $\lambda_2 = 3$. Согласно теореме 10.3, собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, – линейно независимы. Следовательно, x и y – линейно независимы. Линейное пространство $L^{(2)}$ имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$, поэтому векторы x и y являются базисом этого пространства. Таким образом, линейный оператор f – диагонализируемый.

Найдём матрицу линейного оператора f в базисе x, y. Согласно определению матрицы линейного оператора, элементы первого столбца этой матрицы – это коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису x, y, а второго столбца – коэффициенты в разложении $f(y)$. Так как

$$f(x) = \lambda_1 \cdot x = x = 1 \cdot x + 0 \cdot y,$$

$$f(y) = \lambda_2 \cdot y = 3 \cdot y = 0 \cdot x + 3 \cdot y,$$

матрица линейного оператора f в базисе x, y имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 12.2. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализируемым.

Найдём собственные значения линейного оператора f.

$$|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 1(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень $\lambda = 2$, который и является собственным значением линейного оператора f.

Найдем все собственные векторы линейного оператора f, то есть все собственные векторы, относящиеся к $\lambda = 2$.

$$(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 - 1 & -1 \\ 1 & 2 - 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$. Фундаментальная система состоит из одного решения, например,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда все остальные решения линейно выражаются через это решение, то есть любые два собственных вектора линейного оператора f пропорциональны, откуда следует, что они линейно зависимы. Получаем, что в линейном пространстве $L^{(2)}$, которое имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$, не существует базиса из собственных векторов линейного оператора f. Согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1), линейный оператор f не является диагонализируемым.

Задачи с решениями

Задача 12.3. Является ли линейный оператор f, заданный в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение.

Воспользуемся критерием диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1), согласно которому линейный оператор – диагонализируемый, если в линейном пространстве существует базис из собственных векторов этого оператора.

Из определения матрицы линейного оператора следует, что её порядок равен размерности линейного пространства. Так как матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок три, базис линейного пространства состоит из трех векторов.

При решении задачи 11.3 были найдены все собственные значения и собственные векторы линейного оператора f. Собственным значениями линейного оператора f являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$.

Обозначим через e_1 – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 2$, через e_2 – собственный вектор, относящийся к $\lambda_2 = -1$, через e_3 – собственный вектор, относящийся к $\lambda_3 = 1$.

Согласно теореме 10.4, собственные векторы, относящиеся к попарно различным собственным значениям, – линейно независимы. Следовательно, векторы e_1, e_2, e_3 – линейно независимы, то есть образуют базис линейного пространства. Тогда согласно критерию диагонализируемости линейного оператора, f – диагонализируемый оператор.

Найдем матрицу $\mathbf{D}$ линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3.

$f(e_1) = \lambda_1 e_1 = 2e_1 = 2e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$,

$f(e_2) = \lambda_2 e_2 = -1 \cdot e_2 = 0 \cdot e_1 - 1 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$,

$f(e_3) = \lambda_3 e_3 = 1 \cdot e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$,

откуда получаем, что

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.4. Является ли линейный оператор f, заданный в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение.

Воспользуемся критерием диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1). Покажем, что в рассматриваемом линейном пространстве не существует базиса из собственных векторов линейного оператора f. Заметим, что базис линейного пространства состоит из трёх векторов, так как матрица $\mathbf{A}$ имеет порядок три.

При решении задачи 11.4 было получено, что собственные векторы линейного оператора f – это векторы с координатами $2k_1,\ -k_1,\ k_1$ и $0,\ -k_2,\ k_2$, где $k_1, k_2 \in \mathbb{R},\ k_1 \neq 0,\ k_2 \neq 0$. Следовательно, любой собственный вектор линейного оператора f пропорционален либо вектору с координатами $2, -1, 1$, либо вектору с координатами $0, -1, 1$. Таким образом, система из любых трех собственных векторов линейного оператора f обязательно содержит два пропорциональных вектора, откуда следует, что она является линейно зависимой, то есть не является базисом линейного пространства. Тогда согласно критерию диагонализируемости линейного оператора, линейный оператор f не является диагонализируемым.

Задача 12.5. Является ли линейный оператор f, заданный в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение.

При решении задачи 11.5 было получено, что собственные векторы линейного оператора f – это векторы с координатами $-k,\ -k,\ k$, где $k \in \mathbb{R},\ k \neq 0$. Следовательно, любой собственный вектор линейного оператора f пропорционален вектору с координатами $-1, -1, 1$. Тогда система из любых трех собственных векторов линейного оператора f обязательно содержит пропорциональные векторы, откуда следует, что она является линейно зависимой. Таким образом, так как линейное пространство имеет размерность три, в нём не существует базиса из собственных векторов линейного оператора f. Получаем, что линейный оператор f не является диагонализируемым согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1).

Задача 12.6. Является ли линейный оператор f, заданный в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение.

При решении задачи 11.2 были найдены все собственные значения и собственные векторы линейного оператора f.

Собственными значениями являются $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$. Собственные векторы, относящиеся к $\lambda_2 = 1$, – это векторы с координатами 0, k_3, 0, где $k_3 \in \mathbb{R}$, $k_3 \neq 0$. Координаты собственных векторов, относящихся к $\lambda_1 = 2$, находятся из общего решения системы линейных однородных уравнений, имеющего вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ 3k_1 + 3k_2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

Найдем фундаментальную систему решений этой системы. Она состоит из двух решений.

1) $k_1 = 1,\ k_2 = 0 \Rightarrow 3k_1 + 3k_2 = 3,$

2) $k_1 = 0,\ k_2 = 1 \Rightarrow 3k_1 + 3k_2 = 3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – фундаментальная система решений.

Обозначим через e_1 – собственный вектор линейного оператора f с координатами $1, 3, 0$, через e_2 – собственный вектор с координатами $0, 3, 1$, через e_3 – собственный вектор с координатами $0, 1, 0$.

Собственные векторы e_1 и e_2 относятся к $\lambda_1 = 2$. Они линейно независимы, так как решения, входящие в фундаментальную систему решений, линейно независимы. Собственный вектор e_3 относится к $\lambda_2 = 1$. Из теоремы 10.3 следует, что собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы. Тогда векторы e_1, e_2, e_3 – линейно независимы. Линейное пространство имеет размерность три, следовательно, e_1, e_2, e_3 – базис. Таким образом, согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1), линейный оператор f – диагонализируемый.

Найдем матрицу $\mathbf{D}$ линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3.

$f(e_1) = \lambda_1 e_1 = 2e_1 = 2e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3,$

$f(e_2) = \lambda_1 e_2 = 2e_2 = 0 \cdot e_1 + 2e_2 + 0 \cdot e_3,$

$f(e_3) = \lambda_2 e_3 = e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3,$

откуда получаем, что

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.7. Является ли линейный оператор f, заданный в некотором базисе матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Решение.

При решении задачи 11.6 были найдены все собственные значения и собственные векторы линейного оператора f. Собственными значениями являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. Собственные векторы, относящиеся к $\lambda_2 = 3$, – это векторы с координатами $-k_3,\ -k_3,\ k_3$, где $k_3 \in \mathbb{R},\ k_3 \neq 0$. Координаты собственных векторов, относящихся к $\lambda_1 = 1$, находятся из общего решения системы линейных однородных уравнений, имеющего вид:

$$\begin{pmatrix} k_1 - 1.5k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Найдем фундаментальную систему решений этой системы. Она состоит из двух решений.

1) $k_1 = 1,\ k_2 = 0 \ \Rightarrow\ -k_1 - 1.5k_2 = -1,$

2) $k_1 = 0,\ k_2 = 2 \ \Rightarrow\ -k_1 - 1.5k_2 = -3,$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ – фундаментальная система решений.

Обозначим через e_1 – собственный вектор линейного оператора f с координатами $-1, 1, 0$, через e_2 – собственный вектор с координатами $-3, 0, 2$, через e_3 – собственный вектор, с координатами $-1, -1, 1$.

Собственные векторы e_1 и e_2 относятся $\lambda_1 = 1$, а e_3 относится к $\lambda_2 = 3$. Векторы e_1, e_2, e_3 – линейно независимы, следовательно, образуют базис. Тогда согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 12.1), линейный оператор f – диагонализируемый.

Матрицей линейного оператора f в базисе e_1, e_2, e_3 является

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 12.8. Выяснить, является ли линейный оператор f из задачи 11.8 диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Задача 12.9. Выяснить, является ли линейный оператор f из задачи 11.9 диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Задача 12.10. Выяснить, является ли линейный оператор f из задачи 11.10 диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Задача 12.11. Выяснить, является ли линейный оператор f из задачи 11.11 диагонализируемым? Если да, то найти диагональную матрицу этого оператора и указать базис, в котором она имеет такой вид.

Ответы к задачам для самостоятельного решения

2.17. Линейно зависимы. **2.18.** Линейно независимы. **2.19.** Линейно независимы. **2.20.** Линейно зависимы. **2.21.** Линейно независимы. **2.22.** Линейно зависимы. **2.23.** Линейно независимы.

3.18. Размерность 6. **3.19.** Бесконечномерное линейное пространство.

4.5. $b = -2a_1 + 2a_2$; $-2, 2$. **4.6.** $g(x) = \frac{1}{3} f_1(x) + \frac{1}{3} f_2(x) + \frac{1}{3} f_3(x)$; $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$. **4.7.** $\overline{\mathbf{a}} = 2\overline{\mathbf{p}} + 5\overline{\mathbf{q}}$; $2, 5$. **4.8.** $\overline{\mathbf{c}} = 2\overline{\mathbf{p}} - 3\overline{\mathbf{q}} + \overline{\mathbf{r}}$; $2, -3, 1$.

5.7. 1) Да. 2) Нет. 3) Да. **5.8.** 1) Да. 2) Да. 3) Нет. **5.9.** Размерность 3; базис $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6.10. Да. **6.11.** Нет. **6.12.** Да. **6.13.** Да. **6.14.** Да.

7.8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.9.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.10.** $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.11.** $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.7. $f(g(x)) = 12 - 6x$. **8.8.** $f(x) = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}$.

9.4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. **9.5.** $\begin{pmatrix} 3/2 & 2 & 5/2 \\ -5/2 & 0 & -5/2 \\ 5/2 & 3 & 7/2 \end{pmatrix}$.

10.3. 1) Нет. 2) Да, к собственному значению 0.

11.8. $\lambda_1 = -2$, $k_1, 0, 0$, где $k_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 1$, $k_2, -3k_2, k_2$, где $k_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 4$, $0, 0, k_3$, где $k_3 \neq 0$. **11.9.** $\lambda = 2$, $k_1, 2k_1, k_2$, где k_1 и k_2 не равны нулю одновременно. **11.10.** $\lambda_1 = 2$, $k_1 + k_2, k_1, k_2$, где k_1 и k_2 не равны нулю одновременно; $\lambda_2 = -1$, $-k_3, k_3, k_3$, где $k_3 \neq 0$. **11.11.** $\lambda_1 = -1$, $-2k_1, k_1, 0$, где $k_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 3$, $k_2, -k_2, k_2$, где $k_2 \neq 0$. **11.12.** $\lambda_1 = 3$, $k_1, k_1, 0$, где $k_1 \neq 0$; $\lambda_2 = 2$, $k_2, 0, k_2$, где $k_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 1$, k_3, k_3, k_3, где $k_3 \neq 0$.

12.8. Да, $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. **12.9.** Нет. **12.10.** Да, $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. **12.11.** Нет.

Рекомендуемая литература

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В, Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1986. – 272 с.
2. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1990. – 286 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
4. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006. – 320 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
6. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2: Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2004. – 368 с
7. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.
8. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – СПб.: Лань, 2005. – 416 с.
9. Фаддеев, Д. К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

Учебное издание

ШЕРСТНЁВА Анна Игоревна
ЯНУЩИК Ольга Владимировна

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Учебное пособие

Научный редактор *доктор физико-математических наук*,
профессор К.П. Арефьев
Редактор *А.И. Шерстнёва*
Компьютерная верстка *А.И. Шерстнёва*
Дизайн обложки *А.С. Пыжик*

Подписано к печати 05.11.2010. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,35. Уч.-изд.л. 4,84.
Заказ 1907-10. Тираж 100 экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru