

Дополнительные задачи для подготовки к экзамену.

1. Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Найти ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

3. Доказать, что система совместна. Найти решение матричным методом, по формулам Крамера и методом Гаусса:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z = -7 \\ x + y + z = -4 \\ 4x - 3y - 5z = -11 \end{cases}$$

4. Найти размерность и некоторый базис пространства решений системы однородных линейных уравнений:

$$\begin{cases} -2x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

5. Треугольник ABC – прямоугольный, гипотенуза BC поделена точкой M пополам, $|\overline{AB}| = 3$, $|\overline{AC}| = 4$. Найти $np_{AC}\overline{CB}$, $np_{AB}\overline{CB}$, $np_{AC}\overline{AB}$, $np_{AB}\overline{2MB}$.

6. На векторах \overline{a} и \overline{b} построен треугольник. Выразить медианы этого треугольника через векторы \overline{a} и \overline{b} .

7. Найти проекцию вектора $\overline{a} = \overline{m} - 2\overline{n}$ на вектор $\overline{b} = 2\overline{m} - \overline{n}$, если $|\overline{m}| = \sqrt{3}$, $|\overline{n}| = 2$, $(\overline{m} \wedge \overline{n}) = \pi/6$.

8. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a} = 2i + j - 3k$, $\overline{b} = i + 2j + k$, $\overline{c} = i - 3j + k$, опущенную на грань, построенную на векторах \overline{b} и \overline{c} .

9. Доказать, что множество \mathbf{R}^3 является линейным пространством.

10. Проверить, является ли множество $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$ подпространством линейного пространства квадратных матриц второго порядка.

11. Проверить, какие из следующих векторов $\{-12, 7, 6\}$, $\{5, -3, 0\}$, $\{0, -2, 0\}$ являются собственными оператором, заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

К каким собственным значениям они относятся?

12. Составить уравнение прямой, перпендикулярной прямой $5x - 2y - 6 = 0$ и проходящей через точку $(3, -5)$.

13. Записать уравнение прямой, образующей с осью Ox угол 45° и проходящей через точку $(3, 2)$.

14. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $(2, 3, -1)$.

15. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, -1, 0)$ параллельно векторам $\overline{l}_1 = \{1; 2; 1\}$ и $\overline{l}_2 = \{0; 1; 3\}$.

16. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - z = 0$ и $x + y - z + 5 = 0$, перпендикулярно к плоскости $7x - y + 4z - 3 = 0$.

17. Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+z-2=0 \\ 2x-3y-7=0 \end{cases}$$

18. Составить уравнение плоскости, проходящей через две пересекающиеся прямые:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 3t + 7 \\ y = 2t + 2 \\ z = -2t + 1 \end{cases}.$$

19. Даны вершины треугольника $A(6,2)$, $B(3,-2)$, $C(-3,-2)$. Найти точку пересечения биссектрисы, проведенной из вершины B , и медианы, проведенной из вершины A .

20. Найти точку пересечения прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + 21 = 0 \\ 2x - z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+2}{1}.$$

21. Найти угол между прямыми $y = 5x + 7$ и $y = -1.5x$.

22. Найти двухгранные углы, которые образуют плоскости $3y - z = 0$ и $2y + z = 0$.

23. Найти угол между плоскостью $3x + 5y - z - 2 = 0$ и прямой

$$\frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}.$$

24. Построить плоскости: а) $2x - 5y + z - 10 = 0$, б) $2x - 5y - 10 = 0$, в) $2x + z - 10 = 0$, г) $z - 10 = 0$, д) $-5y + z = 0$, е) $2x + z = 0$, ж) $2x - 5y + z = 0$.

25. Доказать, что прямые лежат в одной плоскости:

$$\begin{cases} x = 3t - 2 \\ y = 0 \\ z = -t + 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 0 \\ z = t - 3 \end{cases}.$$

26. Доказать, что следующая прямая лежит в плоскости $4x - 3y + 7z - 7 = 0$:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}.$$

27. Доказать, что прямая, проходящая через точку $M_0(1;0;1)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{1; \sqrt{2}; 1\}$, и плоскость $x + \sqrt{2}y - z + 2 = 0$ пересекаются.

28. Доказать, что прямая, проходящая через точки $M_1(-4;3;-3)$ и $M_2(2;-6;9)$, пересекается с прямой $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$.

29. Доказать, что прямые скрещиваются:

$$\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t - 2 \\ z = -6t + 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{cases}.$$

30. Даны уравнения двух сторон квадрата $5x + 2y - 7 = 0$ и $5x + 2y - 36 = 0$. Найти его площадь.

31. Точка $A(4;6)$ является вершиной прямоугольника, две стороны которого лежат на прямых $x - 2y - 2 = 0$ и $2x + y + 6 = 0$. Найти площадь этого прямоугольника.

32. Найти объём куба, если две его грани лежат на плоскостях $2x - 2y + z - 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 5 = 0$.

33. Найти расстояние между прямыми:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{3} = \frac{y-5}{-1} = \frac{z-9}{4}.$$

34. Найти расстояние между прямыми:

$$\frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2} \quad \text{и} \quad \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}.$$