

### Векторы. Скалярное произведение.

1. На векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  построен треугольник. Выразить медианы этого треугольника через векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

2. Найти вектор  $\vec{x}$ , направленный по биссектрисе угла между векторами  $\vec{a} = 7\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$  и  $\vec{b} = -2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ , если  $|\vec{x}| = 3\sqrt{6}$ .

$$\{1, -7, 2\}$$

3. Найти длину вектора  $\vec{a} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = 2$ ,  $|\vec{n}| = 1$ ,

$$(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/3.$$

$$\sqrt{13}$$

4. Найти единичный вектор  $\vec{x}$ , перпендикулярный оси  $Ox$  и образующий с осью  $Oz$  острый угол, причём такой, что  $(\vec{x}, \vec{a}) = 1$ , где  $\vec{a} = \{3, 2, -1\}$ .

$$\{0, 4/5, 3/5\}$$

5. Найти  $(\vec{a} + 2\vec{b}, 3\vec{a} - \vec{b})$ , если  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 2$ ,  $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 2\pi/3$ .

$$242$$

6. Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 1$ ,

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \pi/4.$$

$$\arccos(1/\sqrt{5})$$

7. Найти проекцию вектора  $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$  на вектор  $\vec{b} = 2\vec{m} - \vec{n}$ , если  $|\vec{m}| = \sqrt{3}$ ,  $|\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/6$ .

$$-0.5$$

8. Даны векторы  $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ .

Найти вектор  $\vec{x}$ , удовлетворяющий условиям  $(\vec{x}, \vec{a}) = -5$ ,

$$(\vec{x}, \vec{b}) = -10, (\vec{x}, \vec{c}) = 20.$$

$$\{2, 3, -2\}$$

## Векторное и смешанное произведение.

1. Найти вектор, длина которого равна 6, ортогональный векторам  $\vec{a} = 3i - j + 2k$ ,  $\vec{b} = -i + 3j - k$  и образующий с осью  $Ox$  острый угол.

$$\left\{ \frac{10}{\sqrt{10}}, \frac{-2}{\sqrt{10}}, \frac{-16}{\sqrt{10}} \right\}$$

2. Найти высоту параллелограмма ABCD, опущенную из вершины C на сторону AB, если  $\vec{AB} = \vec{m} + \vec{n}$ ,  $\vec{AD} = 3\vec{m} - \vec{n}$ ,  $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{n}| = 2$ ,  $(\vec{m} \wedge \vec{n}) = \pi/4$ .

$$2\sqrt{2}$$

3. Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = 2i + j - 3k$ ,  $\vec{b} = i + 2j + k$ ,  $\vec{c} = i - 3j + k$ , опущенную на грань, построенную на векторах  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ .

$$5/\sqrt{2}$$

4. Найти вектор  $\vec{x}$ , ортогональный векторам  $\vec{a} = \{2, -3, 1\}$  и  $\vec{b} = \{1, -2, 3\}$  и удовлетворяющий условию  $(\vec{x}, i + 2j - 7k) = 10$ .

$$\{7, 5, 1\}$$

5. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  образуют угол  $30^\circ$ . Найти площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} - 2\vec{b}$  и  $3\vec{a} + 2\vec{b}$ , если  $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 3$ .

$$18$$

6. В треугольнике с вершинами A(4, -14, 8), B(2, -18, 12), C(12, -8, 12) найти длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

$$10$$

7. Даны вершины пирамиды A(5, 1, -4), B(1, 2, -1), C(3, 3, -4), M(2, 2, 2). Найти длину высоты, опущенной из вершины M на грань ABC.

$$4/\sqrt{3}$$

8. Вычислить  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ , если  $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n} + \vec{p}$ ,  $\vec{b} = 2\vec{m} + \vec{n} - \vec{p}$ ,  $\vec{c} = \vec{m} - 2\vec{n} + \vec{p}$ , а  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{p}$  – попарно ортогональные единичные векторы, образующие левую тройку.

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -2\vec{m} - 3\vec{n} - 7\vec{p}$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = -3$$