Дифференциальные уравнения (лекции 6 и 7)

Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

Глава II. Дифференциальные уравнения высших порядков

§12. Основные понятия и определения

Дифференциальными уравнениями высшего порядка *называют уравнения порядка выше первого.*

В общем случае уравнение высшего порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

где $n > 1$.

Замечание. Функция F может и не зависеть от некоторых из аргументов $x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$.

Уравнение высшего порядка, которое можно записать в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}), \qquad (2)$$

называют ***уравнением, разрешенным относительно старшей производной***.

Дифференциальное уравнение порядка n имеет бесконечное множество решений (интегралов).

Чтобы выбрать одно из них, задают n условий, которым должно удовлетворять искомое решение.

Обычно, задают значение искомой функции и всех ее производных до порядка $n-1$ включительно при некотором значении аргумента $x = x_0$:

$$y(x_0) = y_0\,,\ y'(x_0) = y_{01}\,,\ y''(x_0) = y_{02}\,,\ \ldots\,,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}\,. \qquad (3)$$

Совокупность условий (3) называется ***начальными условиями*** для дифференциального уравнения n-го порядка.

Нахождение решения уравнения (1) (или (2)), удовлетворяющего заданным начальным условиям (3), называется решением ***задачи Коши*** для этого уравнения.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

выполняются два условия:

1) *функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;
2) *функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *имеет в этой области* D *ограниченные частные производные по переменным* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ *существует, и притом единственное, решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2)*, определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0*, и удовлетворяющее начальным условиям*

$$\varphi(x_0) = y_0, \ \varphi'(x_0) = y_{01}, \ \varphi''(x_0) = y_{02}, \ \dots, \ \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка $(n > 1)$ НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$.

Кривых через точку M_0 проходит бесконечное множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) Дифференциальное уравнение (2) имеет бесконечное множество решений.
2) Совокупность решений зависит от n произвольных постоянных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

в области D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

зависящая от x и n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любых допустимых значениях* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ *она удовлетворяет уравнению* (2);

2) *каковы бы ни были начальные условия*

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_{01}, y''(x_0) = y_{02}, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} \qquad (3)$$

(где $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0n-1}) \in D$*), можно найти единственный набор значений* $C_1 = C_{01}, C_2 = C_{02}, \ldots, C_n = C_{0n}$ *такой, что функция* $y = \varphi(x, C_{01}, C_{02}, \ldots, C_{0n})$ *удовлетворяет заданным начальным условиям.*

Уравнение $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения***.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения (2) представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от n параметров.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретных значениях постоянных C_i (включая $C_i = \pm\infty$), является частным.

Решение (интеграл), в каждой точке которого нарушено условие единственности, называется ***особым***.

Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. Оно всегда «теряется» в процессе интегрирования.

§13. Уравнения, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $F(x,y^{(n)}) = 0$

Возможны 2 случая:
1) уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$,
2) уравнение нельзя разрешить относительно $y^{(n)}$.

1) Пусть уравнение разрешено относительно $y^{(n)}$, то есть имеет вид

$$y^{(n)} = f(x)\ , \qquad (4)$$

где $f(x)$ непрерывна на $(a;b)$.

Общее решение уравнения (4) получается в результате n-кратного последовательного интегрирования правой части.

$$\left.\begin{array}{l} y^{(n)} = f(x) \\ y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x) \quad \Rightarrow$$

$$dy^{(n-1)} = f(x)dx \quad \Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2$$

$$y^{(n-3)} = \int(\int dx \int f(x)dx + C_1 x + C_2)dx =$$

$$= \int dx \int dx \int f(x)dx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$y^{(n-4)} = \int dx \int dx \int dx \int f(x)dx + \frac{C_1 x^3}{2 \cdot 3} + \frac{C_2 x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

$$\boxed{y = \int dx \int dx \ldots \int f(x)dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1} x + C_n}$$

2) Пусть уравнение $F(x,y^{(n)}) = 0$ не разрешено относительно $y^{(n)}$.

Если уравнение допускает параметрическое представление

$$x = \varphi(t), \quad y^{(n)} = \psi(t),$$

то его решение можно найти в параметрическом виде.

Действительно,

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot dx;$$

$$\left.\begin{aligned} y^{(n)} &= \psi(t) \\ dx &= \varphi'(t)dt \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad dy^{(n-1)} = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow \quad y^{(n-1)} = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Аналогично найдем $y^{(n-2)}$, $y^{(n-3)}$, … y', y и получим общее решение

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi_n(t, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases}$$

2. Уравнение не содержит искомой функции и ее производных до порядка (k – 1) включительно

Пусть уравнение имеет вид

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 , \quad (1 \le k < n) . \qquad (5)$$

Уравнение (5) допускает понижение порядка на k единиц.

Действительно, сделаем замену $y^{(k)} = z(x)$.

Тогда $y^{(k+1)} = z'(x)$, $y^{(k+2)} = z''(x)$, …, $y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$

и уравнение примет вид

$$F(x , z , z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 . \qquad (5_1)$$

Пусть $z = \varphi(x , C_1 , C_2 , \ldots, C_{n-k})$ – общее решение (5_1).

Тогда $y^{(k)} = \varphi(x , C_1 , C_2 , \ldots, C_{n-k})$.

$\Rightarrow$ общее решение уравнения (5) получается k-кратным интегрированием функции $\varphi(x , C_1 , C_2 , \ldots, C_{n-k})$.

3. Уравнение не содержит независимого переменного

Пусть уравнение имеет вид

$$F(y\,, y'\,, y''\,, \ldots\,, y^{(n)}) = 0\,, \qquad (6)$$

Уравнение (6) допускает понижение порядка на единицу.

Сделаем замену $y' = z(y)$. Тогда

$$y'' = (y')'_x = (z(y))'_x = z'_y \cdot y'_x = z'_y \cdot z = z' \cdot z$$

$$y''' = (y'')'_x = (z' \cdot z)'_x = (z')'_x \cdot z + z' \cdot z'_x = (z')'_y \cdot y'_x \cdot z + z' \cdot z'_y \cdot y'_x =$$

$$= z'' \cdot z \cdot z + z' \cdot z' \cdot z = z'' \cdot z^2 + (z')^2 \cdot z$$

…………………………

$$y^{(n)} = \omega(z\,, z'\,, z''\,, \ldots\,, z^{(n-1)})\,.$$

Подставляя эти выражения в (6), получаем уравнение (n – 1)-го порядка.

Пусть $z = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – общее решение получившегося после замены уравнения.

Тогда $$y' = \varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = dx.$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (6) будет иметь вид

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})} = x + C.$$

4. Уравнение, однородное относительно неизвестной функции и ее производных

Уравнение $F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$

называется ***однородным относительно*** $\boldsymbol{y, y', y'', \ldots, y^{(n)}}$, *если при всех* $t \neq 0$ *выполняется тождество*

$$F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}) = t^m \cdot F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) .$$

Порядок такого уравнения может быть понижен на единицу заменой $y' = yz$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция.

Для любого t имеем:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = \frac{1}{t^m} F(x, ty, ty', ty'', \ldots, ty^{(n)}).$$

Пусть $t = \dfrac{1}{y}$, получаем

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = y^m F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) \Rightarrow$$

$$y^m \cdot F\left(x, 1, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \ldots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0$$

$$y' = \boxed{yz} \quad \Rightarrow \quad y'' = (yz)' = \boxed{y'z + yz'} = \boxed{y(z^2 + z')}$$

$$y''' = (y'z + yz')' = \boxed{y''}z + 2\boxed{y'}z' + yz'' = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = y \cdot \omega_n(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)})$$

Тогда $\dfrac{y'}{y} = z, \quad \dfrac{y''}{y} = z^2 + z', \quad \ldots, \quad \dfrac{y^{(n)}}{y} = \omega_n\left(z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}\right),$

то есть уравнение принимает вид:

$$y^m \cdot \Phi\left(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(x, z, z', z'', \ldots, z^{(n-1)}\right) = 0$$

Пусть $z = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})$ – общее решение этого уравнения

$$\Rightarrow \quad y' = yz = y \cdot \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx \quad \Rightarrow$$

$$\ln|\,y\,| = \int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx + C_n \quad \Rightarrow$$

$$y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx}, \quad C_n \neq 0$$

В процессе преобразований было потеряно решение y=0.

Оно может быть включено в общее решение при $C_n = 0 \quad \Rightarrow$

$$\boxed{y = C_n \cdot e^{\int \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1})dx}}$$

5. Уравнение, левая часть которого является точной производной

Пусть уравнение имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad \text{где}$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Такое уравнение называют ***уравнением в точных производных***.

Его порядок можно понизить на единицу.

$$\frac{d}{dx}\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$$

первый интеграл уравнения.

Замечание. Если уравнение не является уравнением в точных производных, то можно попытаться найти такую функцию, после умножения на которую уравнение станет уравнением в точных производных.