Дифференциальные уравнения (лекция 5)

Уравнения, не разрешённые относительно производной

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

§ 11. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

Дифференциальное уравнение 1-го порядка, ***разрешенное относительно производной***, – уравнение, которое можно записать в виде

$$y' = f(x,y).$$

В общем случае дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0 .$$

Если из уравнения $F(x, y, y') = 0$ нельзя выразить y', то уравнение называют ***не разрешенным относительно производной*.**

Рассмотрим некоторые частные случаи таких уравнений.

1. Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть $F(x, y, y') = 0$ таково, что его можно разрешить относительно y' неоднозначно.

Тогда уравнение $F(x, y, y') = 0$ эквивалентно k различным уравнениям

$$y' = f_1(x,y)\ ,\quad y' = f_2(x,y)\ ,\quad y' = f_3(x,y)\ ,\quad \ldots\ ,\quad y' = f_k(x,y)\ . \qquad (15)$$

Предположим, что для каждого из уравнений (15) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x\,, y\,, C) = 0\ ,\quad \Phi_2(x\,, y\,, C) = 0\ ,\quad \ldots.,\quad \Phi_k(x\,, y\,, C) = 0\ . \qquad (16)$$

Совокупность общих интегралов (16) *называется* ***общим интегралом уравнения, разрешаемого относительно y' неоднозначно.***

Замечания.

1) Совокупность (16) можно записать в виде

$$\Phi_1(x\,,y\,,C)\cdot\Phi_2(x\,,y\,,C)\cdot\ \ldots.\ \cdot\Phi_k(x\,,y\,,C)=0\ .$$

2) Если уравнение $F(x,\,y,\,y')=0$ разрешается относительно y' неоднозначно, то через каждую точку $M_0(x_0\,,y_0)$ области, в которой рассматривается уравнение, будет проходить в общем случае k интегральных кривых.

Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в точке M_0 будут иметь общую касательную.

ПРИМЕР. Найти общий интеграл уравнения

$$(y')^2-4\cdot x^2=0.$$

Найти решение, удовлетворяющее условию

а) $y(1)=1$, б) $y(0)=0$.

2. Неполные уравнения

а) Уравнения, содержащее только производную

Пусть уравнение имеет вид $F(y') = 0$.

Корни этого уравнения не зависят от x и y, то есть y' является константой.

Пусть $y' = k_i$ удовлетворяет уравнению $F(y') = 0$.

Тогда $$y = k_i x + C\ ,$$

$$\Rightarrow \quad k_i = \frac{y - C}{x}.$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения будет иметь вид $F\left(\dfrac{y - C}{x}\right) = 0.$

б) Уравнения, не содержащие искомой функции

Пусть уравнение имеет вид $F(x, y') = 0$, (17)

Возможны 2 случая:

1) (17) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
2) (17) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, то есть может быть заменено двумя уравнениями вида $x = \varphi(t)$, $y' = \boxed{\psi(t)}$.

   Тогда решения уравнения (17) могут быть найдены в параметрическом виде.

   Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \qquad \Rightarrow dy = \boxed{y'} \cdot \boxed{dx},$$

$$x = \varphi(t) \qquad \Rightarrow dx = \boxed{\varphi' \cdot dt},$$

$$\Rightarrow \quad dy = \psi(t) \cdot \varphi' \cdot dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (17) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t)\cdot\varphi'(t)dt + C. \end{cases} \qquad (18)$$

Замечания.

1) Общий интеграл уравнения (17) получается исключением параметра t из системы (18) (если это возможно).

2) Если уравнение (17) можно разрешить относительно x, то есть записать в виде $x = \varphi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда $x = \varphi(y') = \varphi(t)$, $y' = t = \psi(t)$.

Подставляя в (18), получаем:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t\cdot\varphi'(t)dt + C. \end{cases}$$

в) Уравнения, не содержащие независимой переменной

Пусть уравнение имеет вид $F(y, y') = 0$, (19)

Возможны 2 случая:

1) (19) разрешимо относительно y' неоднозначно – см. пункт 1;
2) (19) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, то есть может быть заменено двумя уравнениями вида $y = \varphi(t)$, $y' = \psi(t)$.

Тогда решения уравнения (19) могут быть найдены в параметрическом виде.

Имеем:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'},$$

$$y = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad dy = \varphi' \cdot dt,$$

$$\left.\begin{aligned} dy &= \varphi' \cdot dt, \\ y' &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (19) имеют параметрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases} \qquad (20)$$

Замечания.

1) Общий интеграл уравнения (19) получается исключением параметра t из системы (20) (если это возможно).

2) Если уравнение (19) можно разрешить относительно y, то есть записать в виде $y = \varphi(y')$, то в качестве параметра удобно брать $t = y'$.

Тогда $x = \varphi(y') = \varphi(t)$, $y' = t = \psi(t)$.

Подставляя в (20), получаем:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}$$

3. Уравнение Лагранжа

Уравнение $F(x, y, y') = 0$ *называется* ***уравнением Лагранжа***, *если оно является линейным относительно* x *и* y, *то есть имеет вид*: $F_1(y') \cdot x + F_2(y') \cdot y = G(y')$.

Так как $F_2(y') \neq 0$ (иначе это будет неполное уравнение), то уравнение Лагранжа можно записать в виде

$$y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y'). \qquad (21)$$

Общее решение уравнения Лагранжа можно найти в параметрическом виде.

Пусть $\boxed{y' = t}$. Тогда уравнение (21) запишется в виде:

$$y = \boxed{x \cdot \varphi(t)} + \boxed{\psi(t)}.$$

Продифференцируем это выражение по x:

$$y' = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$t-\varphi(t)=\left[x\varphi'(t)+\psi'(t)\right]\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}\left[t-\varphi(t)\right]-x\varphi'(t)=\psi'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt}-x\cdot\frac{\varphi'(t)}{t-\varphi(t)}=\frac{\psi'(t)}{t-\varphi(t)}, \quad \text{где} \quad t-\varphi(t)\neq 0.$$

Это уравнение линейное относительно x и $\dfrac{dx}{dt}$.

Пусть $x=\mu(t,C)$ – общее решение этого уравнения.

Тогда $y=x\cdot\varphi(t)+\psi(t)=\mu(t,C)\cdot\varphi(t)+\psi(t).$

Получаем, что если $\varphi(y')\not\equiv y'$, то общее решение уравнения (21) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x=\mu(t,C), \\ y=\mu(t,C)\cdot\varphi(t)+\psi(t). \end{cases}$$

Рассмотрим $t-\varphi(t)=0.$

$$\boxed{t-\varphi(t)=0}$$

Пусть это уравнение имеет действительные корни t_i.

Рассмотрим $\boxed{y = x\cdot\varphi(t_i)+\psi(t_i)}$.

Покажем, что это решения уравнения $\boxed{y} = x\cdot\varphi(\boxed{y'})+\psi(\boxed{y'})$.

$$y' = (x\cdot\varphi(t_i)+\psi(t_i))' = \varphi(t_i) = \boxed{t_i} \quad \Rightarrow$$

$$x\cdot\varphi(t_i)+\psi(t_i) = x\cdot\varphi(t_i)+\psi(t_i)$$

4. Уравнение Клеро

Пусть в уравнении Лагранжа $\varphi(y') \equiv y'$.

В этом случае, уравнение (21) называют уравнением Клеро.

$\Rightarrow$ *Уравнение* $F(x, y, y') = 0$ *называется* ***уравнением Клеро***, *если оно может быть записано в виде*

$$y = x \cdot y' + \psi(y') . \qquad (22)$$

Для интегрирования уравнения Клеро также применяют параметрический метод.

Пусть $\boxed{y' = t}$. Тогда уравнение (22) запишется в виде:

$$y = \boxed{x \cdot t} + \boxed{\psi(t)}.$$

Продифференцируем это выражение по x:

$$y' = t + x\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow$$

$$t = t + [x + \psi'(t)]\frac{dt}{dx} \quad \Rightarrow \quad [x + \psi'(t)]\frac{dt}{dx} = 0$$

1. $\dfrac{dt}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = C \quad \Rightarrow \quad y = x \cdot t + \psi(t) = \quad x \cdot C + \psi(C)$

$y = x \cdot C + \psi(C)$ – общее решение уравнения Клеро

$$y = x \cdot y' + \psi(y')$$

Замечание. Для получения общего решения уравнения Клеро, достаточно в исходном уравнении заменить производную y' на произвольную постоянную C.

2. $x + \psi'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \boxed{x} \cdot t + \psi(t) = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t)$

$$\begin{cases} x = -\psi'(t) \\ y = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t) \end{cases}$$

Можно показать, что если $\psi'(t) \neq \text{const}$, то это ***особое*** решение уравнения Клеро.