Дифференциальные уравнения (лекция 9)

Линейные однородные уравнения высших порядков (часть 2)

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

Из теоремы 6 следует, что *задача интегрирования линейного однородного уравнения n-го порядка сводится к отысканию фундаментальной системы его решений*.

Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения, то его общее решение имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.}$$

3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Пусть линейное однородное уравнение имеет вид

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0 , \qquad (10)$$

где $a_1 , a_2 , \ldots , a_n$ – некоторые действительные числа.

Уравнение (10) называется ***линейным однородным уравнением n–го порядка с постоянными коэффициентами***.

Решения уравнения (10) будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x} , \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} , \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x} , \quad \ldots , \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x} .$$

Подставляем $y , y' , y'' , \ldots , y^{(n)}$ в уравнение (10) и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0 ,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0 . \qquad (11)$$

Уравнение (11) называется ***характеристическим уравнением*** (для) уравнения (10).

Многочлен в левой части (11) называется ***характеристическим многочленом***.

Корни уравнения (11) называются ***характеристическими корнями*** уравнения (10).

Замечания.

1. Формально характеристическое уравнение (11) получается из (10) заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

2. Уравнение (10) – алгебраическое уравнение n-й степени.

$\Rightarrow$ оно имеет n корней, но

1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;

2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений уравнения (10).

ТЕОРЕМА 7.

Пусть λ *– характеристический корень уравнения* (10). *Тогда*

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11) , *то решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\lambda x},\ x \cdot e^{\lambda x},\ x^2 \cdot e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

2) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– корень кратности* k *уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (11), *а решениями* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\ \ x e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\ \ x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\ \ \ldots,\ \ x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ \ x e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ \ x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\ \ \ldots,\ \ x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\ .$$

Найденные таким образом n *решений уравнения* (10) *образуют его фундаментальную систему решений.*

ПРИМЕР 1. Найти общее решение уравнения

$$y''' + 4y'' - 3y' - 18y = 0$$

ПРИМЕР 2. Найти общее решение уравнения

$$y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$$

ПРИМЕР 3. Найти общее решение уравнения

$$y^{(5)} + 4y^{(4)} + 8y''' + 8y'' + 4y' = 0$$

4. Уравнения Эйлера

Линейное однородное уравнение вида

$$x^n \cdot y^{(n)} + a_1 x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x \cdot y' + a_n \cdot y = 0\,, \qquad (12)$$

(где $a_i \in \mathbb{R}$) называется ***уравнением Эйлера***.

Уравнение Эйлера сводится к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$.

1) $x = e^t \;\Rightarrow\; y$ – функция от переменной t, $\;y = y(x(t)) \;\Rightarrow$

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t = y' \cdot e^t \;\Rightarrow\; y' = y'_t \cdot e^{-t}$$

2) $x = e^t \;\Rightarrow\; y'$ – функция от переменной $t \;\Rightarrow$

$$(y')'_t = (y')'_x \cdot e^t \;\Rightarrow\; y'' = (y')'_t \cdot e^{-t} = (y'_t \cdot e^{-t})'_t \cdot e^{-t} =$$

$$= (y''_t \cdot e^{-t} - y'_t \cdot e^{-t}) \cdot e^{-t} = (y''_t - y'_t) \cdot e^{-2t} \;\Rightarrow\; y'' = (y''_t - y'_t) \cdot e^{-2t}$$

…

n) $y^{(n)} = (y_t^{(n)} + b_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + b_{n-2} y''_t + b_{n-1} y'_t) \cdot e^{-nt}$, где $b_i \in \mathbb{R}$

Подставим полученные выражения в уравнение (12), учитывая

$x^n = e^{nt},\; x^{n-1} = e^{(n-1)t}, \ldots,\; x = e^t \;\Rightarrow$

$$y_t^{(n)} + c_1 y_t^{(n-1)} + \ldots + c_{n-1} y_t' + c_n y(t) = 0, \quad \text{где } c_i \in \mathbb{R}$$

линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами

$\Rightarrow$ по теореме 7 фундаментальная система решений состоит из функций вида

$$t^m \cdot e^{\lambda t}$$

$$t^m e^{\alpha t} \cos \beta t \qquad x = e^t \;\Rightarrow\; t = \ln x$$

$$t^m e^{\alpha t} \sin \beta t$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\ln^m x \cdot x^{\lambda} \\ &\ln^m x \cdot x^{\alpha} \cdot \cos(\beta \ln x) \\ &\ln^m x \cdot x^{\alpha} \cdot \sin(\beta \ln x) \end{aligned}}$$

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ – *корень кратности* k *уравнения* (11), *то решениями уравнения* (10) *являются функции*

$$e^{\lambda x},\; x \cdot e^{\lambda x},\; x^2 \cdot e^{\lambda x},\; \ldots,\; x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

2) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ – *корень кратности* k *уравнения* (11), *то* $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k *уравнения* (11), *а решениями* (10) *являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad x e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad x e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad \ldots,\quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x .$$

Замечание. На практике, при интегрировании уравнения Эйлера, можно сразу записать его характеристическое уравнение.

Действительно, характеристическое уравнение – это условие для λ, при котором $e^{\lambda t}$ является решением линейного однородного уравнения.

Но $e^{\lambda t} = x^{\lambda}$. Следовательно, то же самое условие для λ получится, если потребовать, чтобы функция $y = x^{\lambda}$ являлась решением уравнения Эйлера.

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

5. Линейные однородные уравнения 2-го порядка с произвольными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$y'' + a_1(x)\cdot y' + a_2(x)\cdot y = 0\,. \qquad (13)$$

Пусть $y_1(x)$ любое ненулевое решение уравнения (13).

Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = y_1\left(C_1 + C_2\frac{y_2}{y_1}\right) = y_1\cdot u(x)$$

Найдём функцию $u(x)$. Имеем

$$y' = y_1'u + y_1u', \qquad y'' = y_1''u + 2y_1'u' + y_1u'' \quad \Rightarrow$$

$$u + 2y_1'u' + y_1u'' + a_1(x)\cdot(y_1'u + y_1u') + a_2(x)\cdot y_1u = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) + u\cdot\underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_{0} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u''\cdot y_1 + u'\cdot(2y_1' + a_1(x)y_1) = 0$$

$$u''\cdot y_1+u'\cdot(2y_1'+a_1(x)y_1)=0$$

$$z(x)=u' \quad\Rightarrow\quad z'\cdot y_1+z\cdot(2y_1'+a_1(x)y_1)=0 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{dz}{z}=-\frac{2y_1'+a_1(x)y_1}{y_1}dx \quad\Rightarrow\quad \ln|z|=-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1}+a_1(x)\right)dx+C_1 \quad\Rightarrow$$

$$\ln|z|=-2\ln|y_1|-\int a_1(x)dx+C_1 \quad\Rightarrow\quad z=\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}$$

$$u'=\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx} \quad\Rightarrow\quad du=\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx \quad\Rightarrow$$

$$u=\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx+C_2$$

$$\boxed{y=y_1u=y_1\cdot\left(\int\left[\frac{C_1}{(y_1)^2}\cdot e^{-\int a_1(x)dx}\right]dx+C_2\right).}$$

ПРИМЕР. Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$,

если известно, что его решением является функция

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}$$