# Дифференциальные уравнения (лекция 8)

Линейные однородные уравнения высших порядков (часть 1)

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

# §14. Линейные дифференциальные уравнения $n$-го порядка

## 1. Общие понятия и определения

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка*** *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции* $y$ *и ее производных* $y'$, $y''$, …, $y^{(n)}$, то есть уравнение вида

$$p_0(x)\cdot y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = g(x)\,, \qquad (7)$$

где $p_i(x)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным однородным***.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение (7) называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Так как $p_0(x) \not\equiv 0$ , то уравнение (7) можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \qquad (8)$$

Уравнение (8) называют ***приведенным***.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$.

Тогда в области

$$D = \{(x, y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \mid \forall x \in [a;b] , \ \forall y_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

для уравнения (8) будут выполняться условия теоремы существования и единственности решения.

Следовательно, для $\forall x_0 \in [a;b]$ и $\forall y_0 , y_{0i} \in \mathbb{R}$ существует единственное решение уравнения (8), удовлетворяющее условию

$$y(x_0) = y_0 , y'(x_0) = y_{01} , y''(x_0) = y_{02} , \ \ldots , \ y^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1} .$$

## 2. Линейные однородные уравнения $n$-го порядка

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение порядка $n$, то есть уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 . \qquad (9)$$

ТЕОРЕМА 1 (свойство решений линейного однородного дифференциального уравнения).

*Если* $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ *являются решениями уравнения* (9), *то*

$$y_1(x) + y_2(x) \ \text{и} \ C \cdot y_1(x) \ (\forall C \in \mathbb{R})$$

*тоже является решениями уравнения* (9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) Покажем, что $y_1 + y_2$ является решением уравнения (9).

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot (y_1 + y_2)' + a_n(x) \cdot (y_1 + y_2) =$$

$$[y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1] + [y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2] \equiv$$

$$\equiv 0 + 0 \equiv 0$$

2) Покажем, что $C \cdot y_1$ является решением уравнения (9).

$$(C \cdot y_1)^{(n)} + a_1(x) \cdot (C \cdot y_1)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot (C \cdot y_1)' + a_n(x) \cdot (C \cdot y_1) =$$

$$C \cdot [y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1] \equiv C \cdot 0 \equiv 0$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если* $y_1$, $y_2$, …, $y_n$ – *решения уравнения* (9), *то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$$

*тоже является решением уравнения* (9) *для любых постоянных* $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Обозначим: $S[a;b]$ – множество решений уравнения (9),
$C[a;b]$ – множество функций, непрерывных на $[a;b]$.

$C[a;b]$ – вещественное линейное пространство.

$$S[a;b] \subset C[a;b]$$

Выясним, является ли $S[a;b]$ подпространством $C[a;b]$.

ТЕОРЕМА (критерий подпространства). Пусть $L$ – вещественное линейное пространство. $L_1$ – непустое подмножество в $L$. $L_1$ является подпространством $L$ тогда и только тогда, когда для любых элементов $a,b$ из $L_1$ и любого вещественного $\alpha$ выполняются два условия:

$$1)\ \ a - b \in L_1; \qquad 2)\ \ \alpha \cdot a \in L_1.$$

Из теоремы 1 $\Rightarrow$ $S[a;b]$ – линейное подпространство $C[a;b]$

ЗАДАЧА. Изучить $S[a;b]$ как линейное пространство.

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции. Запишем для них определитель порядка $n$ вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель $W$ – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и называют ***определителем Вронского*** (***вронскианом***) функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.

ТЕОРЕМА 3 (необходимое условие линейной зависимости функций). *Если функции* $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ $n-1$ *раз дифференцируемы и линейно зависимы на* $[a;b]$, *то их определитель Вронского на* $[a;b]$ *тождественно равен нулю.*

# ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Функции $y_1(x)$ , $y_2(x)$ , … , $y_n(x)$ линейно зависимы на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по определению существуют числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, …, $\alpha_n$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a;b].$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n$, где $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$.

Тогда $y_1' = \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n', \quad \ldots, \quad y_1^{(n-1)} = \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)}$.

Получаем, что $W[y_1, y_2, \ldots , y_n] =$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n & y_2 & \ldots & y_n \\ \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения).

*Если $n$ решений уравнения (9) линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$, такое, что $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$.

Обозначим

$$
\begin{array}{lll}
y_1(x_0) = y_{10}, & y_2(x_0) = y_{20}, & \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0}; \\
y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, & y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, & \dots, \quad y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)}; \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, & \dots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}.
\end{array}
$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, у которой коэффициентами являются полученные числа.

$$\begin{cases} C_1 y_{10} & + & C_2 y_{20} & + & \dots & + & C_n y_{n0} & = & 0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} & + & C_2 y_{20}^{(1)} & + & \dots & + & C_n y_{n0}^{(1)} & = & 0, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} & + & C_2 y_{20}^{(n-1)} & + & \dots & + & C_n y_{n0}^{(n-1)} & = & 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы $A$ этой системы

$$|A| = W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0 \quad \Rightarrow$$

система имеет ненулевое решение $C_1$, $C_2$, …, $C_n$.

Рассмотрим функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$.

Согласно следствию 2, $y$ – решение уравнения (9), причём

$y(x_0) = 0$ (из 1-го уравнения системы)

$y'(x_0) = 0$ (из 2-го уравнения системы)

…

$y^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из ($n$–1)-го уравнения системы)

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 . \qquad (9)$$

Решением этого уравнения также является функция $y(x) \equiv 0$, которая удовлетворяет тем же самым начальным условиям:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Так как по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0.$$

Коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не все равны нулю одновременно

$\Rightarrow$ противоречие с тем, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы.

СЛЕДСТВИЕ 5 (теоремы 3 и 4).

*Пусть* $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ *решения уравнения* (9). *Тогда*

1) *либо* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \equiv 0$ *и это означает, что решения линейно зависимы;*
2) *либо* $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$, *и это означает, что решения линейно независимы.*

ТЕОРЕМА 6 (о размерности пространства решений линейного однородного дифференциального уравнения).

*Пространство решений* $S[a;b]$ *уравнения* (9) *конечномерно и его размерность совпадает с порядком дифференциального уравнения, то есть* $\dim S[a;b] = n$.

Система $n$ линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения $n$-го порядка (базис пространства $S[a;b]$) называется его ***фундаментальной системой решений***.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

**1.** Покажем, что для уравнения (9) можно найти $n$ линейно независимых решений.

Пусть $x_0 \in [a;b]$, $\qquad \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

По теореме существования и единственности решения имеем:

1) существует единственное решение $y_1(x)$, удовлетворяющее

$$y_1(x_0) = 1,\ y_1'(x_0) = 0,\ y_1''(x_0) = 0,\ \dots,\ y_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

2) существует единственное решение $y_2(x)$, удовлетворяющее

$$y_2(x_0) = 0,\ y_2'(x_0) = 1,\ y_2''(x_0) = 0,\ \dots,\ y_2^{(n-1)}(x_0) = 0$$

…

$n$) существует единственное решение $y_n(x)$, удовлетворяющее

$$y_n(x_0) = 0,\ y_n'(x_0) = 0,\ y_n''(x_0) = 0,\ \dots,\ y_n^{(n-1)}(x_0) = 1$$

Тогда $\; W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = \Delta_n \neq 0 \;\; \Rightarrow \;\;$ по следствию (5)

$y_1, y_2, \dots, y_n$ – линейно независимы.

**2.** Покажем, что любое решение уравнения (9) может быть представлено как линейная комбинация $n$ линейно независимых решений.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые решения, $y(x)$ – решение уравнения (9), удовлетворяющее условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0^{(1)}, \ldots, \ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = y_0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} + C_2 y_{20}^{(1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(1)} = y_0^{(1)}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$ $(i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,n-1})$.

Решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – линейно независимые $\Rightarrow$ определитель матрицы $A$ этой системы $|A| = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) \neq 0$ $\Rightarrow$ система имеет ненулевое решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рассмотрим функцию $z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Согласно следствию 2, $z$ – решение уравнения (9), причём

$z(x_0) = y_0$ (из 1-го уравнения системы)

$z'(x_0) = y_0^{(1)}$ (из 2-го уравнения системы)

…

$z^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ (из ($n$–1)-го уравнения системы)

Но тем же самым условиям удовлетворяет и $y(x)$ $\Rightarrow$ по теореме существования и единственности решения

$$z = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n = y.$$

$$\begin{cases} C_1 y_{10} & + & C_2 y_{20} & + & \ldots & + & C_n y_{n0} & = & y_0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} & + & C_2 y_{20}^{(1)} & + & \ldots & + & C_n y_{n0}^{(1)} & = & y_0^{(1)}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} & + & C_2 y_{20}^{(n-1)} & + & \ldots & + & C_n y_{n0}^{(n-1)} & = & y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

где $y_{i0} = y_i(x_0)$, $y_{i0}^{(k)} = y_i^{(k)}(x_0)$ $(i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n-1})$.

Из теоремы 6 следует, что *задача интегрирования линейного однородного уравнения n-го порядка сводится к отысканию фундаментальной системы его решений*.

Если $y_1, y_2, \dots, y_n$ – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения, то его общее решение имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.}$$