Дифференциальные уравнения (лекция 4)

Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

§9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad (14)$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть если

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y) .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $$u(x,y) = C .$$

$\Rightarrow$ Задачи:

1) научиться определять, когда выражение
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$
является полным дифференциалом;

2) научиться находить функцию $u(x,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. *Необходимость.* Пусть $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y)$.

Покажем, что $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Но $du(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \quad \Rightarrow \boxed{M(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x}}, \ \boxed{N(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y}}$.

Тогда $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

По условию теоремы $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ – непрерывные $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

2. *Достаточность.* Пусть $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$.

Найдём такую функцию $u(x,y)$, что

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = du(x, y),$$

то есть для которой $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)}$, $\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)}$.

Сначала найдём такую функцию $u(x,y)$, что $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$,

для этого проинтегрируем это равенство по x:

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + \varphi(y).$$

Теперь необходимо подобрать функцию $\varphi(y)$, такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx + \varphi(y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x, y)dx\right) + \varphi'(y) = N(x, y) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)}$$

Следовательно, искомая функция $\varphi(y)$ будет существовать, если выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ не зависит от x.

Убедимся в этом, продифференцировав его по x,

в результате дифференцирования должен получиться ноль.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y)\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C.$$

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\ \varphi(y)=$$
$$=\int M(x,y)dx+\ \int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\ \right)\right]dy+C.$$

Способы нахождения функции $u(x, y)$:

1) используя алгоритм, предложенный в доказательстве теоремы 1;
2) используя одну из следующих формул:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} \underbrace{N(x, y)}_{x - const}dy$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \underbrace{M(x, y)}_{y - const}dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$.

3) методом ***интегрируемых комбинаций***.

Суть метода интегрируемых комбинаций: выделить в

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

выражения, являющиеся дифференциалами известных функций («***интегрируемые комбинации***») и привести его таким образом к виду $du(x, y)$.

ПРИМЕРЫ интегрируемых комбинаций:

$$x^n dx = d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \qquad \frac{dx}{x} = d\left(\ln|x|\right),$$

$$xdy + ydx = d(xy), \qquad \frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right).$$

§10. Интегрирующий множитель

Функция $\mu(x,y)$ *называется* ***интегрирующим множителем*** *уравнения* $$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0, \qquad (14)$$ *если после его умножения на* $\mu(x,y)$ *левая часть уравнения становится полным дифференциалом некоторой функции.*

Пусть функции $M(x\,,y)$, $N(x\,,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Если $\mu(x,y)$ – интегрирующий множитель, то уравнение

$\mu M(x,y)dx + \mu N(x,y)dy = 0$ – в полных дифференциалах.

Тогда $\dfrac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu N)}{\partial x} \Rightarrow \dfrac{\partial \mu}{\partial y} M + \dfrac{\partial M}{\partial y}\mu = \dfrac{\partial \mu}{\partial x} N + \dfrac{\partial N}{\partial x}\mu \Rightarrow$

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \mu}{\partial y} M \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \boxed{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial x}} N - \boxed{\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y}} M = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} N - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} M \Rightarrow$$

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

Для нахождения $\mu(x,y)$, надо проинтегрировать получившееся дифференциальное уравнение в частных производных.

В общем случае это сложно, рассмотрим частные случаи.

1. Пусть $\mu(x,y) = \mu(x)$. Тогда

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = N\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d \ln \mu}{dx} = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad \ln \mu(x) = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx + C$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

2. Пусть $\mu(x,y) = \mu(y)$. Тогда

$$N\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = -M\frac{d \ln \mu}{dy} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d \ln \mu}{dy} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \Rightarrow \ln \mu(y) = -\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy + C$$

$$\Rightarrow \mu(y) = e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}$$

ТЕОРЕМА 1 (о существовании интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ или $\mu(y)$).

Пусть

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N}=\varphi, \qquad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{M}=\psi.$$

1) *Если* $\varphi=\varphi(x)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(x)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\varphi(x);$$

2) *Если* $\psi=\psi(y)$, *то уравнение* (14) *имеет интегрирующий множитель* $\mu(y)$, *который является решением уравнения*

$$\frac{d\ln\mu}{dy}=-\psi(y).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найти интегрирующий множитель для линейного дифференциального уравнения первого порядка.
2) Найти интегрирующий множитель для уравнения Бернулли.
3) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3 + xy^2)dx + (x^2 y + y^3)dy + ydx - xdy = 0$$

4) Получить формулу (уравнение) для нахождения интегрирующего множителя вида $\mu = \mu(xy)$.

   Найти общий интеграл уравнения

$$\left(3\frac{y}{x} + 2 + \frac{2}{y}\right)dx + \left(6 + \frac{x}{y} + \frac{3}{xy}\right)dy = 0$$