Дифференциальные уравнения (лекция 3)

Линейные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

§7. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка *называется ДУ 1-го порядка, линейное относительно неизвестной функции* y *и ее производной* y'.

$\Rightarrow$ В общем случае линейное уравнение 1-го порядка можно записать в виде $$y' + p(x) \cdot y = f(x)\,, \tag{8}$$ где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***.

Линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

$y' + p(x)y = 0$

Разделим переменные: $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = 0 \quad \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{y} = -p(x)dx,$ интегрируя это выражение, получаем:

$\ln|\,y\,| = -\int p(x)dx + \ln C,$ где $C > 0 \quad \Rightarrow$

$\ln|\,y\,| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C,$ где $C > 0 \quad \Rightarrow$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y=0$.

Тогда общее решение принимает вид:

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad \forall C. \qquad (9)$$

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение:

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\,. \qquad (8)$$

Существуют два метода его интегрирования.

I) ***Метод вариации постоянной (метод Лагранжа)***

1) Интегрируем однородное уравнение $y' + p(x)\cdot y = 0$, соответствующее данному неоднородному уравнению.

   Его общее решение имеет вид (9):

$$y = C\cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

2) Полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения.

   $\Rightarrow$ Оно имеет вид

$$y = C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\,.$$

   Функцию $C(x)$ найдем, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (8).

$$y = \boxed{C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x)}$$

Подставим эти выражения в уравнение $\boxed{y'} + p(x)\boxed{y} = f(x)$:

$$\frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC}{dx}\cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$\Rightarrow \quad dC = f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx$$

Интегрируя, находим $C(x) = \int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C$.

$$C(x)=\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C.$$

Таким образом, общее решение линейного неоднородного уравнения (8) имеет вид:

$$y=C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}=\left(\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx+C\right)\cdot e^{-\int p(x)dx} \qquad (10)$$

Замечание.

Раскроем скобки в (10):

$$y(x)=C\cdot e^{-\int p(x)dx}+e^{-\int p(x)dx}\cdot\int f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (11)$$

Заметим, что первое слагаемое в (11) – общее решение линейного однородного уравнения, а второе – частное решение линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C=0$).

II) *Метод Бернулли.*

Будем искать решение (8) в следующем виде:

$$y = u(x) \cdot v(x) .$$

Тогда $$y' = u' \cdot v + u \cdot v' .$$

Подставим y и y' в уравнение (8) и получим:

$$u' \cdot v + u \cdot v' + puv = f(x)$$

или $$u' \cdot v + u \cdot [\, v' + pv \,] = f(x) .$$

Полагаем, что функция $v(x)$ такова, что

Тогда $$\left.\begin{aligned} &[\, v' + pv \,] = 0 . \\ &u' \cdot v = f(x) . \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Условия (12) позволяют однозначно определить $v(x)$ и $u(x)$.

Первое уравнение – это линейное однородное уравнение

$$\Rightarrow \quad v(x) = Ce^{-\int p(x)dx}$$

Учитывая свободу выбора $v(x)$, положим $C = 1$, тогда

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Подставляем полученную функцию во второе уравнение:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \Rightarrow \quad du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \quad \Rightarrow$$

$$u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\Rightarrow \quad y = u(x) \cdot v(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

Замечание. Линейное неоднородное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = b$$

проще интегрировать как уравнение с разделяющимися переменными.

§8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)\cdot y = f(x)\cdot y^n , \qquad (13)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции,

$n \neq 0$, $n \neq 1$ (иначе это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого надо

1) обе части уравнения (13) разделить на y^n ,

2) сделать замену $z = y^{1-n}$.

Разделим обе части уравнения на y^n :

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = f(x) \qquad \text{или} \qquad y'\cdot y^{-n} + p(x)\cdot y^{1-n} = f(x)$$

Пусть $z = y^{1-n} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dz}{dx} = (1-n)\,y^{-n}\,\dfrac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^n}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$

Подставляем эти выражения в уравнение

$$y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{1}{y^n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x) \quad \Rightarrow$$

$\dfrac{dz}{dx} + (1-n) \cdot p(x) \cdot z = (1-n) \cdot f(x)$ – линейное уравнение относительно z и z'

Замечания.

1) Уравнение Бернулли при $n > 0$ имеет решение $y = 0$. Оно будет частным решением при $n > 1$ (обычно входит в общее при $C = \infty$) и особым при $0 < n < 1$.

2) Решив получившееся после замены линейное уравнение методом Бернулли, получим:

$$z = u(x) \cdot v(x) \,,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{y^{n-1}} = u(x) \cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1} = \frac{1}{u(x)} \cdot \frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y = \left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \cdot \left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \widetilde{u}(x) \cdot \widetilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.