Дифференциальные уравнения (лекция 2)

Однородные уравнения

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

§5. Однородные уравнения

Функция $M(x\,,y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx\,,ty) = t^m \cdot M(x\,,y)\,.$$

Подставляем в функцию $M(x, y)$: $\quad x \to tx \qquad y \to ty$

ПРИМЕРЫ однородных функций:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y\,, \qquad f(x, y) = \sqrt[4]{x^8 + y^8}\,,$$

$$f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}\,, \qquad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy}\,,$$

$$f(x, y) = \sin\frac{x}{y} + \ln y - \ln x\,.$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным*** *относительно* x *и* y, *если функция* $f(x, y)$ *является однородной нулевой степени.*

Для проверки подставляем в уравнение: $x \to tx \qquad y \to ty$

$$y' = f(tx, ty) = f(x, y) \quad \Rightarrow \quad \text{однородное}$$

Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – *однородные функции одного и того же измерения.*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = -\frac{M(tx, ty)}{N(tx, ty)} = -\frac{t^m M(x, y)}{t^m N(x, y)} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

Для проверки подставляем в уравнение: $x \to tx \qquad y \to ty$

$$M(tx, ty)dx + N(tx, ty)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad t^m M(x, y)dx + t^m N(x, y)dy = 0$$

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{однородное}$$

Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = \dfrac{y}{x}$

Тогда $y = xz, \qquad y' = x'z + xz', \qquad \boxed{\dfrac{dy}{dx} = z + x\dfrac{dz}{dx}}.$

Из определения однородного уравнения для любого t:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = f(x, y)$$

Пусть $t = \dfrac{1}{x}$, получаем

$$f(x, y) = f(t \cdot x, t \cdot y) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \boxed{f(1, z)}$$

Подставляем в уравнение: $y' = f(x, y) \quad \Rightarrow$

$$z + x\frac{dz}{dx} = \underbrace{f(1, z)}_{\varphi(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C$$

Замечание. При дифференциальной форме записи

$$dy = d(xz) = xdz + zdx.$$

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью замены

$$\frac{x}{y} = z(y)$$

Тогда $x = yz, \quad dx = ydz + zdy.$

§6. Уравнения, приводящиеся к однородным

1. Уравнения вида $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение $$y' = f\left(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) \qquad (7)$$

Если $c_1 = c_2 = 0$, то уравнение (7) будет однородным, т.к.

$$f\left(\frac{a_1 x + b_1 y}{a_2 x + b_2 y}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пусть $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$. Тогда уравнение (7) заменой переменных приводится либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному.

Это зависит от определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

а) ***Если $\Delta \neq 0$, то*** (7) ***приводится к однородному уравнению***.

Если $\Delta \neq 0$, то система уравнений

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $x = \alpha$, $y = \beta$.

Сделаем в (7) замену переменных: $x = t + \alpha$, $y = z + \beta$.

Тогда:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(z+\beta)}{d(t+\alpha)} = \frac{dz}{dt};$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha)+b_1(z+\beta)+c_1}{a_2(t+\alpha)+b_2(z+\beta)+c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}{a_2 t + b_2 z + (a_2\alpha + b_2\beta + c_2)}\right),$$

$$\underbrace{\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 z}{a_2 t + b_2 z}\right)}_{\text{однородное уравнение}}.$$

б) ***Если $\Delta = 0$, то уравнение*** (7) ***приводится к уравнению с разделяющимися переменными***.

Если $\mathbf{\Delta = 0}$, то строки определителя $\mathbf{\Delta}$ пропорциональны (см. курс «Линейная алгебра»),

то есть $a_2 = \lambda a_1 , \quad b_2 = \lambda b_1 .$

Тогда $y' = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}\right) = f\left(\dfrac{a_1 x + b_1 y + c_1}{\lambda(a_1 x + b_1 y) + c_2}\right)$

$$\Rightarrow \quad y' = \varphi(a_1 x + b_1 y) .$$

Это уравнение (6) (см. §4). Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z(x) = a_1 x + b_1 y .$$

2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение 1-*го порядка называется* ***обобщённо однородным***, *если существует такое рациональное число* α, *что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени m относительно* x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), *если считать*

x – величиной измерения 1, *y – величиной измерения* α, *y' и dy – величинами измерения* α – 1, *dx – величиной измерения* 0.

Для проверки подставляем: $x \to tx$, $\quad y \to t^{\alpha} y$, $\quad y' \to t^{\alpha-1} y'$,

$dy \to t^{\alpha-1} dy$, $\quad dx \to dx$.

Уравнение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ – обобщенно однородное, если $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что

$$P(tx, t^{\alpha}y)dx + Q(tx, t^{\alpha}y) \cdot (t^{\alpha-1}dy) = t^m \cdot [\, P(x, y)dx + Q(x, y)dy \,] .$$

Уравнение $y' = f(x, y)$ – обобщенно однородное, если $\exists \alpha \in \mathbb{Q}$ такое, что $(t^{\alpha-1}y') = f(tx, t^{\alpha}y) = t^{\alpha-1} f(x, y)$.

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой $y = z^{\alpha}$. (Доказать самостоятельно!)

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $y = zx^{\alpha}$.

Рассмотрим обобщённо однородное уравнение $y = zx^{\alpha}$

$$\boxed{P(x\,,y)}dx + \boxed{Q(x\,,y)}dy = 0.$$

Тогда для любого t: $\begin{array}{l} P(tx, t^{\alpha} y) = t^{m} \cdot P(x, y) \\ Q(tx, t^{\alpha} y) = t^{m-\alpha+1} Q(x, y) \end{array}$ Пусть $t = \dfrac{1}{x}$,

$$\boxed{P(x, y)} = \frac{1}{t^m} \cdot P(tx, t^{\alpha} y) = x^m \cdot P\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x^{\alpha}} \cdot y\right) = x^m \cdot P\left(1, \frac{y}{x^{\alpha}}\right) =$$

$$= \boxed{x^m \cdot P(1,\, z)}$$

$$\boxed{Q(x, y)} = \frac{1}{t^{m-\alpha+1}} \cdot Q(tx, t^{\alpha} y) = x^{m-\alpha+1} \cdot Q\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x^{\alpha}} \cdot y\right) =$$

$$= x^{m-\alpha+1} \cdot Q\left(1, \frac{y}{x^{\alpha}}\right) = \boxed{x^{m-\alpha+1} \cdot Q(1,\, z)}$$

$$\boxed{dy} = d(zx^{\alpha}) = zd(x^{\alpha}) + x^{\alpha} d(z) = \boxed{z \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx + x^{\alpha} dz}$$

Подставляем полученные результаты в уравнение:

$$x^m \cdot P(1,\, z)dx + x^{m-\alpha+1} \cdot Q(1,\, z) \cdot (z \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} dx + x^{\alpha} dz) = 0$$

$$(P(1,\, z) + Q(1,\, z) \cdot z \cdot \alpha)dx + x \cdot Q(1,\, z)dz = 0$$

$$(P(1,\ z)+Q(1,\ z)\cdot z\cdot\alpha)dx+x\cdot Q(1,\ z)dz=0\quad\Rightarrow$$

$$\frac{Q(1,\ z)dz}{(P(1,\ z)+Q(1,\ z)\cdot z\cdot\alpha)}=-\frac{dx}{x}$$ – уравнение с разделёнными переменными