Дифференциальные уравнения (лекция 11)

Понятие краевой задачи.
Задача Штурма – Лиувилля

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

§15. Понятие краевой задачи. Задача Штурма – Лиувилля

1. Понятие краевой задачи

Пусть на $[a;b]$ рассматривается дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \qquad (24)$$

Требуется найти его решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 \cdot y(a) + \alpha_1 \cdot y'(a) + \ldots + \alpha_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(a) = y_1 , \\ \beta_0 \cdot y(b) + \beta_1 \cdot y'(b) + \ldots + \beta_{n-1} \cdot y^{(n-1)}(b) = y_2 , \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

где α_i, β_i, y_i – некоторые числа.

Условия (25) называются ***граничными (краевыми) условиями*** для уравнения (24).

Нахождение решения уравнения (24), удовлетворяющего заданным краевым условиям, называется ***краевой (граничной) задачей*** для дифференциального уравнения (24).

Чтобы решить краевую задачу необходимо:

1) найти общее решение уравнения;

2) из граничных условий определить значения произвольных постоянных, входящих в общее решение.

2. Задача Штурма – Лиувилля

Уравнением Штурма – Лиувилля называется дифференциальное уравнение 2-го порядка вида

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]-q(x)\cdot y=-\lambda\cdot\rho(x)\cdot y, \qquad (26)$$

где $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$, $\rho(x)>0$ $\forall x\in(a;b)$,

причём $\rho(x)$ – ограниченная на $(a;b)$.

Пусть $y(x)$ – решение уравнения (26), удовлетворяющее одному из следующих условий

1) $y(a)=0$;

2) $y'(a)=0$;

3) $y'(a)+ky(a)=0 \quad (k>0)$;

4) $y(x)$ ограничена при $x\to a+0$.

В этом случае говорят, что *решение* $y(x)$ *удовлетворяет в точке* $x = a$ *граничному* (*краевому*) *условию соответственно* I, II, III *или* IV *рода* (или типа).

Замечания.

1) Краевые условия I, II или III рода ставятся в точке a только тогда, когда $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $\rho(x)$ определены и непрерывны на $[a;b)$, причём $p(a) \neq 0$.

2) Краевое условие IV рода ставится в точке a только тогда, когда $\rho(x) \to 0$ при $x \to a + 0$.

Аналогично граничные условия задаются и на правом конце интервала $(a;b)$.

Пусть задано уравнение Штурма – Лиувилля (26) и краевые условия в точках a и b (тип условия в точке a может не совпадать с типом условия в точке b).

Очевидно, что $y(x) \equiv 0$ всегда удовлетворяет такой краевой задаче («***тривиальное решение***»).

Значения λ для которых задача Штурма – Лиувилля имеет нетривиальные решения, удовлетворяющие заданным краевым условиям, называют ***собственными значениями*** (*или* ***собственными числами***) *данной краевой задачи*.

Нетривиальные (ненулевые) решения, соответствующие собственным значениям λ, называют ***собственными функциями*** (*или* ***собственными решениями***).

Задача нахождения всех собственных чисел и собственных функций уравнения Штурма – Лиувилля при краевых условиях 1-го, 2-го, 3-го или 4-го типов на концах интервала $(a;b)$ называется ***задачей Штурма – Лиувилля***.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1) *Все собственные числа неотрицательны и образуют бесконечную возрастающую последовательность:*

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n \ldots .$$

2) *Каждому собственному числу соответствует только одна (с точностью до постоянного множителя) собственная функция.*

   Каждой собственной функции отвечает только одно собственное число;

3) *Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям,* ***ортогональны на интервале (a;b) с весом ρ(x)*** *, то есть*

$$\int_a^b \rho(x) \cdot y_k(x) \cdot y_m(x) dx = 0, \quad k \neq m.$$