Дифференциальные уравнения (лекция 10)

Линейные неоднородные уравнения высших порядков

Лектор – Шерстнёва Анна Игоревна

6. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка. Метод вариации произвольных постоянных

Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) . \qquad (14)$$

Если известно общее решение соответствующего ему однородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 , \qquad (15)$$

то можно найти и общее решение неоднородного уравнения.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений уравнения (15). Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n , \qquad (16)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Полагаем, что решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением однородного, то есть имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n(x) \cdot y_n , \qquad (17)$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные y', y'', …, $y^{(n-1)}$ функции

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n(x)\cdot y_n, \qquad (17)$$

структурно совпадали с производными функции

$$y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2 + \ldots + C_n\cdot y_n, \qquad (16)$$

то есть чтобы они получались из соответствующих производных функции (16) заменой констант C_i функциями $C_i(x)$.

$$y' = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1' + \ldots + C_n(x)y_n'\right] =$$
$$= C_1(x)y_1' + \ldots + C_n(x)y_n'$$

$$y'' = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n'\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1'' + \ldots + C_n(x)y_n''\right] =$$
$$= C_1(x)y_1'' + \ldots + C_n(x)y_n''$$

…

$$y^{(n-1)} = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}\right] =$$
$$= C_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = \left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right] + \left[C_1(x)y_1^{(n)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}\right]$$

Получили (n – 1) условий для нахождения функций $C_i(x)$:

$$C_1'(x)y_1^{(k)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(k)}=0 \text{ для всех } k \text{ от 0 до } (n-2).$$

Функция y – решение уравнения (14):

$$y^{(n)}+a_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\cdot y'+a_n(x)\cdot y=f(x).$$

Подставим в него полученные производные:

$$\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right]+\left[C_1(x)y_1^{(n)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n)}\right]+$$

$$+a_1(x)\cdot(C_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n(x)y_n^{(n-1)})+\ldots+$$

$$+a_{n-1}(x)\cdot(C_1(x)y_1'+\ldots+C_n(x)y_n')+$$

$$+a_n(x)\cdot(C_1(x)y_1+\ldots+C_n(x)y_n)=f(x)\quad\Rightarrow$$

$$\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right]+$$

$$C_1(x)\cdot\underbrace{[y_1^{(n)}+a_1(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y_1]}_{0}+\ldots+$$

$$C_n(x)\cdot\underbrace{[y_n^{(n)}+a_1(x)y_n^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y_n]}_{0}=f(x)\quad\Rightarrow$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)}+\ldots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}=f(x)$$

– ещё одно условие для нахождения функций $C_i(x)$.

Таким образом, функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_n(x)$ должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases} \quad (18)$$

(18) – система n линейных уравнений с n неизвестными.
Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Так как y_1, y_2, …, y_n образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по теореме 4 [§14(2)] $W[y_1, y_2, \dots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

$\Rightarrow$ система (18) совместна и имеет единственное решение:

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + C_i,$$

где C_i – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + C_i\right) y_i. \tag{19}$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

7. Неоднородные уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Раскроем скобки в (19) и сгруппируем слагаемые:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + C_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i .$$

Первая сумма – общее решение однородного уравнения, вторая сумма – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C_i = 0$).

ТЕОРЕМА 8 (о структуре решения неоднородного уравнения).

Общее решение линейного неоднородного уравнения n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{y}(x)$ *неоднородного уравнения, то есть имеет вид*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) , \qquad (20)$$

где $y_1 , y_2 , \ldots , y_n$ *– фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения.*

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) \, , \qquad (20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. Покажем, что $y(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) \, . \qquad (14)$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right]^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{\left[y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_i(x)\right]}_{0} +$$

$$+ \underbrace{\left[\tilde{y}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \tilde{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot \tilde{y}(x)\right]}_{f(x)} =$$

$$= 0 + f(x) = f(x)$$

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x)\,, \qquad (20)$$

2. Покажем, что любое решение $\hat{y}(x)$ неоднородного линейного уравнения может быть получено из (20) при некоторых значениях констант C_1, C_2, … , C_n.

Рассмотрим разность $\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)$.

Эта функция является решением однородного уравнения.

$$\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right] =$$
$$= \left[\hat{y}^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot\hat{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot\hat{y}(x)\right] -$$
$$-\left[\tilde{y}^{(n)}(x) + a_1(x)\cdot\tilde{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x)\cdot\tilde{y}(x)\right] = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда $\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)$ является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения

$$\hat{y}(x) - \tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad \Rightarrow$$
$$\hat{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \tilde{y}(x).$$

Пусть правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (21)$$

где $P_s(x)$, $P_k(x)$ – многочлены степени s и k соответственно, α и β – некоторые числа.

Функцию (21) принято называть ***функцией специального вида*.**

ТЕОРЕМА 9 (о структуре частного решения).

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид (21), *то частным решением уравнения является функция вида*

$$\bar{y} = x^{\ell} \cdot e^{\alpha x} \cdot [R_m(x) \cdot \cos\beta x + T_m(x) \cdot \sin\beta x\,], \qquad (22)$$

где $R_m(x)$ *и* $T_m(x)$ *–многочлены степени* m (неизвестные), m *– наибольшая из степеней многочленов* $P_s(x)$, $P_k(x)$, ℓ *– кратность характеристического корня* $\alpha \pm \beta i$ ($\ell = 0$, *если* $\alpha \pm \beta i$ *не характеристический корень*).

ПРИМЕРЫ. Записать структуру частного решения линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами, если его правая часть $f(x)$ имеет вид:

1) $f(x) = P_s(x)$;

2) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x}$, где a – число;

3) $f(x) = P_s(x) \cdot e^{\alpha x}$;

4) $f(x) = a \cdot \cos\beta x + b \cdot \sin\beta x$, где a, b – числа;

5) $f(x) = a \cdot \cos\beta x$ (или $f(x) = a \cdot \sin\beta x$)

6) $f(x) = P_s(x) \cdot \cos\beta x + P_k(x) \cdot \sin\beta x$;

7) $f(x) = a \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + b \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x$.

ТЕОРЕМА 10 (о наложении решений).

Если $\bar{y}_1(x)$ *и* $\bar{y}_2(x)$ – *решения соответственно уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_2(x),$$

то функция

$$\bar{y}(x) = \bar{y}_1(x) + \bar{y}_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x) + f_2(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

$$\left[\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right] =$$

$$= \left[\bar{y}_1^{(n)} + a_1(x)\cdot\bar{y}_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot\bar{y}_1\right] +$$

$$+ \left[\bar{y}_2^{(n)} + a_1(x)\cdot\bar{y}_2^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot\bar{y}_2\right] = f_1(x) + f_2(x)$$