Дифференциальные уравнения

Лектор – Шерстнёва
Анна Игоревна

ГЛАВА I. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Основные понятия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** *называется уравнение, связывающее независимую переменную* x, *искомую функцию* $y = y(x)$ *и ее производные* $y'(x)$, $y''(x)$, … , $y^{(n)}(x)$.

$\Rightarrow$ в общем случае имеет вид

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0 .$$

Порядок старшей производной, входящей в уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

ПРИМЕР. Определить порядок уравнений:

$$y' + xy - x^2 = 0, \qquad x(y')^2 + e^x = 0, \qquad (y')^5 + e^{y^2} = 0,$$

$$xy'' - (y')^3 - y = 0, \qquad y'' - y' = 1, \qquad y^2 - y''' + x^5 = 0.$$

Замечание. Уравнение, связывающее неизвестную функцию n переменных, ее аргументы и ее частные производные, называется ***уравнением в частных производных***.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** на интервале $(a;b)$, если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала $(a;b)$.

ПРИМЕР.

1) $y = \cos x$ – решение ДУ $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$;

2) $y = \sqrt{1 - x^2}$ – решение ДУ $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1; 1)$.

Уравнение $\Phi(x,y) = 0$, задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения, называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***.

Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций.

§2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x,y)$

Общий вид дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$F(x, y, y') = 0 \,, \qquad (1)$$

где x – независимое переменное, y – неизвестная функция, F – заданная функция трех переменных.

Дифференциальное уравнение первого порядка, которое можно записать в виде $y' = f(x,y)$ (2)

называется ***уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной***.

ТЕОРЕМА 1 (Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области D плоскости* xOy,

2) $f'_y(x,y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2)*, определенное в некотором интервале* $(a;b)$*, содержащем точку* x_0*, и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \varphi(x)$.

Условие $y(x_0) = y_0$ называется ***начальным условием***.

Задача нахождения решения дифференциального уравнения $F(x,y,y')=0$*, удовлетворяющего начальному условию* $y(x_0) = y_0$*, называется* ***задачей Коши***.

Теорему 1 называют ***теоремой существования и единственности решения задачи Коши*** для ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной**.**

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0,y_0), через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

Из теоремы 1 $\Rightarrow$

1) вся область D покрыта интегральными кривыми уравнения (2), которые нигде между собой не пересекаются;
2) дифференциальное уравнение (2) имеет множество решений.

Замечание. Теорема 1 дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

$\Rightarrow$ Возможно, что в точке (x_0,y_0) условия теоремы 1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2), удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$, существует и единственно.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***.

Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т.е. через каждую точку кривой $y = \psi(x)$ проходит еще хотя бы одна, отличная от $y = \psi(x)$, интегральная кривая), называется ***особым***.

График особого решения называют ***особой интегральной кривой уравнения***.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *в области* D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

зависящая от x *и одной произвольной постоянной* C, *которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной* C *она удовлетворяет уравнению* (2);
2) *каково бы ни было начальное условие* $y(x_0) = y_0$ *(где* $(x_0, y_0) \in D$), *можно найти единственное значение* $C = C_0$ *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*.**

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$), является частным.

Замечание. Интегрируя дифференциальное уравнения, необходимо всегда проверять, не были ли потеряны в процессе преобразования какие-либо решения.

Особое решение не входит в общее решение дифференциального уравнения. Оно всегда «теряется» в процессе интегрирования и обладает тем свойством, что может быть включено в общее решение, если допустить $C = C(x)$.

§3. Уравнения с разделенными переменными

Дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно y', имеет две формы записи:

1) обычную, то есть $y' = f(x,y)$,

2) ***дифференциальную***, то есть

$$P(x\,,y)dx + Q(x\,,y)dy = 0\ . \qquad (3)$$

1. $y' = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Rightarrow$

$dy - f(x,y)dx = 0$, то есть $P(x,y) = -f(x,y)$, $\quad Q(x,y) = 1$

2. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x,y)dy = -P(x,y)dx \quad \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, то есть $\quad f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Замечание. Если уравнение записано в виде (3), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальным уравнением с разделенными переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0 , \qquad (4)$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции.

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = 0 \qquad (4)$$

Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$,
$\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$.

Тогда $f(x)dx = dF$ и $\varphi(y)dy = d\Phi \Rightarrow$

$$f(x)dx + \varphi(y)dy = d(F) + d(\Phi) = d(F + \Phi).$$

Из (4) получаем, что $d(F + \Phi) = 0$, откуда

$F(x) + \Phi(y) = C$ или $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$

Замечание.
В теории дифференциальных уравнений символом

$$\int f(x)dx$$

принято обозначать ОДНУ из первообразных функции $f(x)$, а не все множество первообразных.

§4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение, дифференциальная форма которого имеет вид

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0\,, \tag{5}$$

где $f_1(x), f_2(x),\ \varphi_1(y),\ \varphi_2(y)$ – непрерывные функции.

Разделим обе части уравнения на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

$\Rightarrow$ Общий интеграл уравнения (5) имеет вид:

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C\,.$$

Замечания.

1) Деление на $\varphi_1(y)\cdot f_2(x)$ может привести к потере решений. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $\varphi_1(y)=0$, $f_2(x)=0$.

2) Обычная форма дифференциального уравнения с разделяющимися переменными имеет вид:

$$y'=f(x)\cdot\varphi(y)\ .$$

Уравнение с разделяющимися переменными:

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx+f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0 \quad \Rightarrow$$

$$f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy=-f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_1(x)\cdot\varphi_1(y)}{f_2(x)\cdot\varphi_2(y)}=-\boxed{\frac{f_1(x)}{f_2(x)}}\cdot\boxed{\frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}}=f(x)\cdot\varphi(y)$$

Рассмотрим уравнение

$$y' = f(ax + by + c)\,, \qquad (6)$$

где a, b и c – некоторые числа.

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by + c$.

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

Подставляем в (6):

$$\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

Тогда $\dfrac{dz}{bf(z)+a} = dx$ и $\displaystyle\int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + C$.