Теория вероятностей и математическая статистика

Теория вероятностей

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.,
Шерстнёва Анна Игоревна

Классификация событий

1. ***Достоверные*** события.
   1) Наступление ночи каждые сутки.
   2) Появление листьев на деревьях с приходом весны
2. ***Невозможные*** события.
   1) Если в кармане лежит только 100 рублей, событие, что вы возьмёте из этого же кармана 1000 рублей
   2) Превращение воды в лёд при нагревании
3. ***Случайные*** события.
   1) Сдача экзамена с первого раза
   2) Выпадение решки при бросании монеты

Основные формулы комбинаторики

Пусть имеется множество из n элементов,
причём неважно какой природы эти элементы:

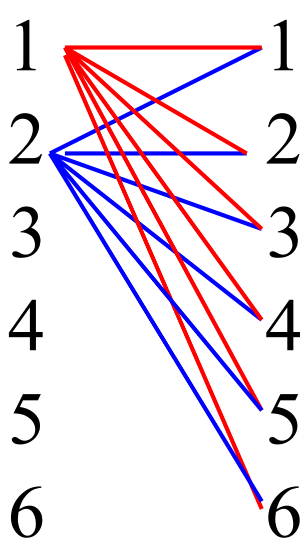
$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

Комбинаторика *– это раздел математики, в котором изучаются различные комбинации элементов конечного множества.*

На практике чаще представляет интерес не вид конкретной комбинации, а количество комбинаций, которых можно составить из элементов данного множества.

Правило умножения. Если из некоторого конечного множества первый элемент можно выбрать n_1 способами, а второй элемент – n_2 способами, то оба элемента в указанном порядке можно выбрать $n_1 \cdot n_2$ способами.

Пример. Сколько двузначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6?



6 чисел

6 чисел

6 чисел

6 чисел

6 чисел

6 чисел

36 чисел

$n_1 = 6$ $n_2 = 6$

$$n_1 \cdot n_2 = 36$$

Правило умножения аналогичным образом распространяется на случай, когда выбирается три и более элемента.

Пример. Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Всего 7 цифр.

Первая цифра – ~~7 способов~~ 6 способов.

Вторая цифра – 7 способов.

Третья цифра – 7 способов.

По правилу умножения: $6 \cdot 7 \cdot 7 =$ 294 числа

Правило сложения. Если из некоторого конечного множества первый элемент можно выбрать n_1 способами, а второй элемент – n_2 способами, причём первые и вторые способы не пересекаются, то один из этих элементов (первый или второй) можно выбрать $n_1 + n_2$ способами.

Пример. В ящике 20 красных, 30 жёлтых, 10 чёрных и 40 белых шаров. Сколькими способами можно выбрать красный или белый шар?

Красный шар – 20 способов. $n_1 = 20$

Белый шар – 40 способов. $n_2 = 40$

По правилу сложения: $n_1 + n_2 = 20 + 40 =$ 60 способов

Правило сложения аналогичным образом распространяется на случай трёх и более элементов.

Пример. В ящике 20 красных, 30 жёлтых, 10 чёрных и 40 белых шаров. Сколькими способами можно выбрать не белый шар?

Не белый шар – это либо красный, либо жёлтый, либо чёрный.

$n_1 = 20 \qquad n_2 = 30 \qquad n_2 = 10$

По правилу сложения:

$$n_1 + n_2 + n_3 = 20 + 30 + 10 = \boxed{60 \text{ способов}}$$

Пример. Сколько двузначных и трёхзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Двузначные числа.

Первая цифра – 6 способов, вторая – 7 способов.

По правилу умножения: $6 \cdot 7 = 42$ способа

Трёхзначные числа.

Первая цифра – 6 способов, вторая – 7, третья – 7.

По правилу умножения: $6 \cdot 7 \cdot 7 = 294$ способа

По правилу сложения:

$n_1 + n_2 = 42 + 294 =$ 336 чисел

Пусть имеется множество из n различных элементов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Перестановками называются комбинации, состоящие из всех элементов множества и отличающиеся только порядком их расположения.

Пример. $n=5$ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5

x_5, x_4, x_3, x_2, x_1

x_3, x_1, x_5, x_2, x_4

…

Число всех возможных перестановок:

$$P_n = n!$$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Примеры.

1) Сколько чисел можно составить из цифр 2, 3 и 5, если каждая цифра входит в число только один раз?

2, 3, 5   5, 3, 2   3, 5, 2   …

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

2) Сколькими способами можно рассадить 6 человек на 6 стульях?

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Пример. $n=6$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$m=4$ x_1, x_2, x_3, x_4

x_2, x_3, x_4, x_5

x_3, x_2, x_4, x_5

x_5, x_4, x_3, x_2

…

Число всех возможных размещений из n элементов по m элементов:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Примеры.

1) Имеется 5 карточек, на первой написана цифра 1, на второй – цифра 2, и т.д. Сколько трёхзначных чисел можно составить с помощью этих карточек?

$$n = 5 \quad m = 3 \quad A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{\cancel{1\cdot 2}\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{\cancel{1\cdot 2}} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60$$

2) Сколькими способами награды за I, II, III места могут быть распределены между 10 участниками соревнований?

$$n = 10 \quad m = 3 \quad A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8\cdot 9\cdot 10 = 720$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Пример. $n=6$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$

$m=4$ $x_1, x_2, x_3, x_4 = x_4, x_3, x_2, x_1 = x_3, x_4, x_2, x_1$

x_2, x_3, x_4, x_5

x_1, x_2, x_4, x_5

x_5, x_6, x_3, x_2

…

Число всех возможных сочетаний из n элементов по m элементов:

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}}$$

Примеры.

1) Сколькими способами можно выбрать 3 шара из 5 имеющихся?

$n = 5 \quad m = 3$

$$C_5^3 = \frac{\cancel{5!}}{\cancel{3!}(5-3)!} = \frac{\boxed{4 \cdot 5}}{2!} = 2 \cdot 5 = 10$$

2) Сколькими способами можно составить букет из 5 цветков, если всего имеется 10 цветков?

$n = 10 \quad m = 5$

$$C_{10}^5 = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{5!}(10-5)!} = \frac{\boxed{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 252$$

Определение вероятности

Вероятность *– это число, характеризующее степень возможности появления события.*

1. **Классическое** определение вероятности:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

n – общее число случаев,

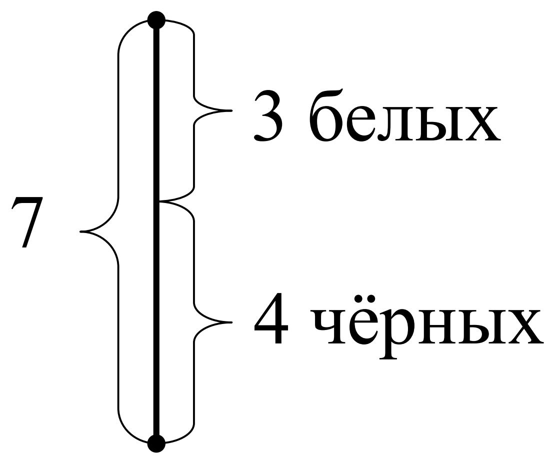
m – число случаев, благоприятствующих событию А, то есть при которых событие А имеет место.

$$p(A)=\frac{m}{n}$$

n – общее число случаев,

m – число благоприятствующих случаев.

Пример 1. В коробке 3 белых и 4 чёрных шара. С какой вероятностью наугад выбранный шар окажется белым?



$$p=\frac{m}{n}$$

$$n=7$$

$$m=3$$

$$p=\frac{3}{7}$$

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

n – общее число случаев,

m – число благоприятствующих случаев.

Пример 2. С какой вероятностью число от 1 до 10, выбранное наугад, окажется делящимся на 3?

3, 6, 9

10

3 делятся

7 не делятся

$$p = \frac{m}{n}$$

$n = 10$

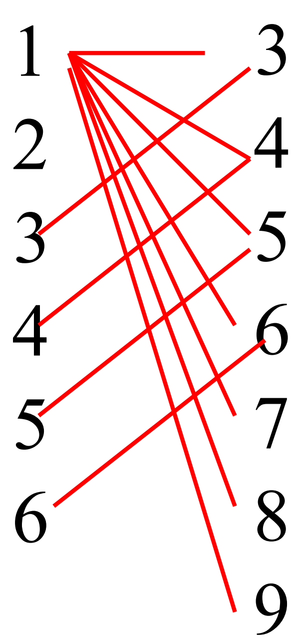
$m = 3$

$$p = \frac{3}{10}$$

$p(A)=\dfrac{m}{n}$

n – общее число случаев,
m – число благоприятствующих случаев.

Пример 3. В одном ящике лежат 6 карточек с цифрами от 1 до 6, а во втором – 7 с цифрами от 3 до 9. Из каждого ящика достают по одной карточке. Какова вероятность, что на карточках будут одинаковые цифры?



$m-?$ 3, 3 4, 4 5, 5 6, 6

$$m=4$$

$n-?$

1, 3 1, 4 1, 5 1, 6 1, 7 1, 8 1, 9

$$n=7+7+7+7+7+7=6\cdot 7=42$$

$$p=\frac{4}{42}=\frac{2}{21}$$

$$p(A)=\frac{m}{n}$$

n – общее число случаев,

m – число благоприятствующих случаев.

Пример 4. Мужчина зашёл в цветочный киоск купить букет. Продавец составил букет из 7 роз. Какова вероятность, что все розы были белые, если в киоске имелось 20 красных и 15 белых роз?

$$n=C_{35}^{7}=\frac{35!}{7!(35-7)!}=\frac{35!}{7!\cdot 28!}$$

$$m=C_{15}^{7}=\frac{15!}{7!(15-7)!}=\frac{15!}{7!\cdot 8!}$$

$$p=\frac{15!}{\cancel{7!}\cdot 8!}\cdot\frac{\cancel{7!}\cdot 28!}{35!}=\frac{9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{29\cdot 30\cdot 31\cdot 32\cdot 33\cdot 34\cdot 35}\approx 0.002$$

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

n – общее число случаев,
m – число благоприятствующих случаев.

Пример 5. Мужчина зашёл в цветочный киоск купить букет. Продавец составил букет из 7 роз. Какова вероятность, что в букете оказались 3 белые розы и 4 красные, если в киоске было 20 красных и 15 белых роз?

$$n = C_{35}^{7} = \frac{35!}{7! \cdot 28!}$$

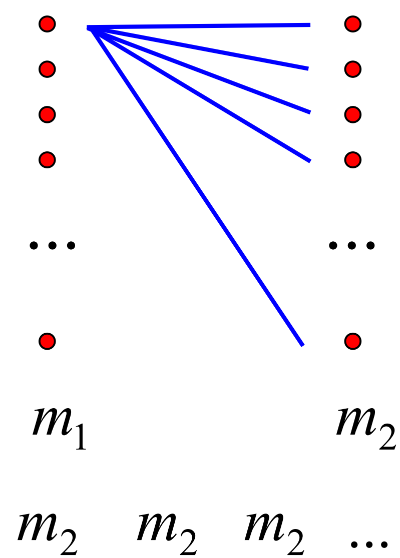
$$m_1 = C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!}$$

$$m_2 = C_{20}^{4} = \frac{20!}{4!16!}$$

$$m = m_1 \cdot m_2$$

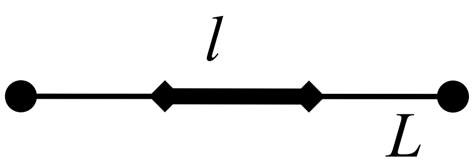
$$p = \frac{m}{n} = \frac{m_1 \cdot m_2}{n}$$

$$p \approx 0.656$$



2. **Геометрическое** определение вероятности.

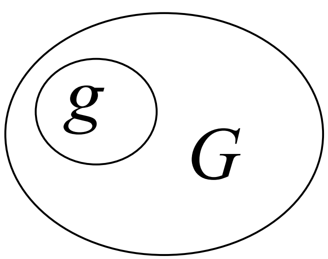
Отрезок l – часть отрезка L,
на отрезок L поставлена наудачу точка



вероятность попадания точки на отрезок l

$$p = \frac{\text{длина } l}{\text{длина } L}$$

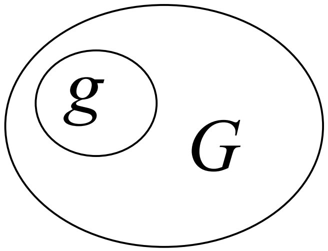
Плоская фигура g – часть фигуры G



вероятность попадания точки на фигуру g

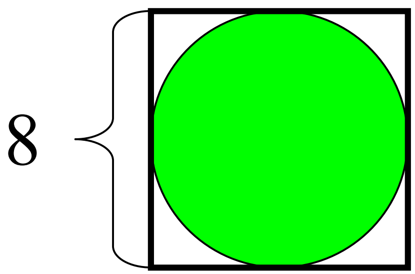
$$p = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}$$

Пример. В квадрат со стороной 8 см наудачу брошена точка. Какова вероятность, что эта точка окажется внутри вписанного в квадрат круга?



вероятность попадания точки на фигуру g

$$p = \frac{\text{площадь } g}{\text{площадь } G}$$



G – квадрат

Площадь квадрата – 64

g – круг

Площадь круга – $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi$

$$p = \frac{16\pi}{64} \approx 0.79$$

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна 1.

$$p = \frac{m}{n} \qquad m = n \quad \Rightarrow \quad p = \frac{n}{n} = 1$$

2. Вероятность невозможного события равна 0.

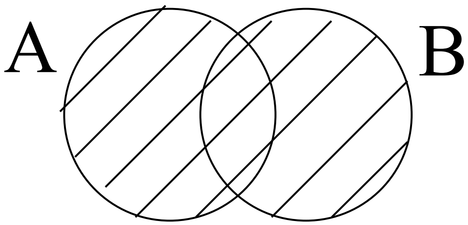
$$p = \frac{m}{n} \qquad m = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{0}{n} = 0$$

3. Вероятность случайного события $0 < p < 1$.

$$p = \frac{m}{n} \qquad 0 < m < n \quad \Rightarrow \quad \frac{0}{n} < \frac{m}{n} < \frac{n}{n} \quad \Rightarrow \quad 0 < p < 1$$

Сумма и произведение событий

Определение. ***Суммой*** A+B двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий, то есть в появлении события A, события B или обоих этих событий одновременно.



Пример.

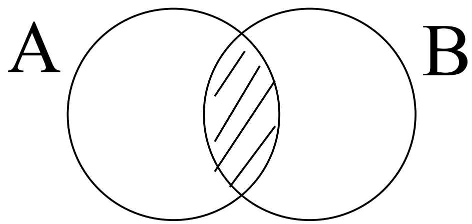
A – попадание при первом выстреле

B – попадание при втором выстреле

A+B – попадание хотя бы при одном из двух выстрелов, то есть только при первом, только при втором, или при обоих одновременно

Аналогично вводится понятие суммы нескольких событий: $A_1+A_2+\ldots+A_n$ – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Определение. ***Произведением*** AB двух событий A и B называют событие, состоящее в совместном появлении, то есть совмещении, этих событий.



Пример.

Случайным образом выбирается некоторое число.

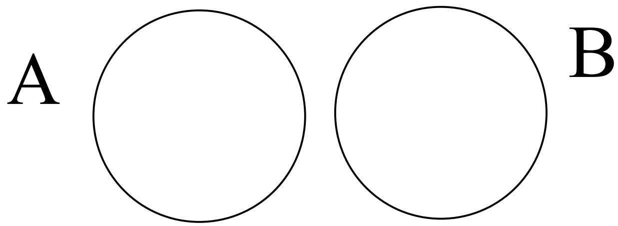
A – выбрано чётное число

B – выбрано число, делящееся на 5

AB – выбрано чётное число, делящееся на 5, то есть число, делящееся на 10

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Определение. События называют ***несовместными***, если появление одного из них исключает появление остальных.



Примеры.

1. Из ящика с деталями извлечена наугад 1 деталь.

A – извлечена бракованная деталь

B – извлечена стандартная деталь

A и B – несовместные события

2. Брошена монета .

A – выпадение герба

B – выпадение решки

A и B – несовместные события

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей каждого из них:

$$p(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}).$$

Следствие 1. Вероятность появления хотя бы одного из нескольких несовместных событий равна сумме вероятностей каждого из них:

$$p(\mathrm{A}_1+\mathrm{A}_2+\ldots+\mathrm{A}_n) = p(\mathrm{A}_1)+p(\mathrm{A}_2)+\ldots+ p(\mathrm{A}_\mathrm{n})$$

$$p(A_1+A_2+\ldots+A_n) = p(A_1)+p(A_2)+\ldots+ p(A_n)$$

Пример. В ящике 20 красных, 30 жёлтых, 10 чёрных и 40 белых шаров. Найти вероятность того, что вытащенный шар – не белый.

Не белый шар – это либо красный, либо жёлтый, либо чёрный , то есть хотя бы одного из этих цветов.

A_1 – вытащили красный шар

A_2 – вытащили жёлтый шар

A_3 – вытащили чёрный шар

A_1, A_2, A_3 – несовместные события

$$p(A_1) = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$p(A_2) = \frac{30}{100} = 0.3$$

$$p(A_3) = \frac{10}{100} = 0.1$$

$$p = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = 0.6$$

Определение. ***Противоположными*** называют два единственно возможных несовместных события.

А – событие, противоположное ему обозначают $\overline{A}$

Примеры.

1. Производится выстрел по цели.

А – попадание,

$\overline{A}$ – промах.

2. Брошена монета.

А – выпала решка,

$\overline{A}$ – выпал герб.

Следствие 2. $p(A)+p(\overline{A})=p(A+\overline{A})=1.$

Следствие 2. $p(A)+p(\overline{A})=p(A+\overline{A})=1.$

Пример. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «отлично» – 0.1, на «хорошо» – 0.3, на «удовлетворительно» – 0.4. С какой вероятностью этот студент не сдаст экзамен?

A – не сдаст экзамен

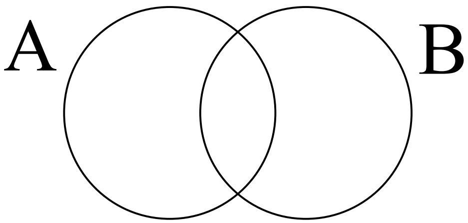
$\overline{A}$ – сдаст экзамен

$$p(\overline{A})=0.1+0.3+0.4=0.8$$

$$p(A)=1-p(\overline{A})=1-0.8=0.2$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Пусть события А и В – ***совместные***, то есть появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же случае.



Пример. Брошен игральный кубик.

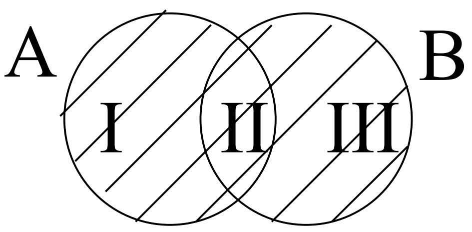
А – выпало четыре очка

В – выпало чётное число очков

А и В – совместные события

Пусть события А и В – совместные.

Найдём p(А+В).



События I, II, III – несовместные $\Rightarrow$

$$p(\mathrm{A+B}) = p(\mathrm{I}) + p(\mathrm{II}) + p(\mathrm{III}) =$$

$$= \underbrace{p(\mathrm{I}) + p(\mathrm{II})} + \underbrace{p(\mathrm{III}) + p(\mathrm{II})} - \underbrace{p(\mathrm{II})} =$$

$$= p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{AB})$$

Теорема сложения вероятностей. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий

$$p(\mathrm{A+B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{AB})$$

$$p(\mathrm{A+B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{AB})$$

Пример. Сотрудники некоторой компании обязаны свободно говорить на одном из иностранных языков: английском или немецком. Вероятность того, что сотрудник знает английский язык – 0.7, немецкий – 0.4. Какова вероятность, что некоторый сотрудник владеет и тем, и другим языком одновременно?

A – сотрудник владеет английским языком

B – сотрудник владеет немецким языком

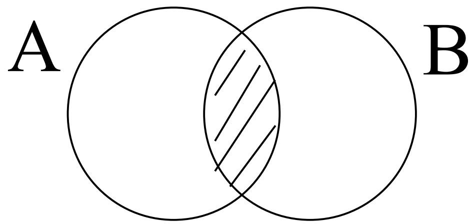
$$p(A) = 0.7 \qquad p(B) = 0.4 \qquad p(AB) = ?$$

$$p(A+B) = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 = 0.7 + 0.4 - p(AB) \quad \Rightarrow$$

$$p(AB) = 0.1$$

Теорема умножения вероятностей

Определение. ***Произведением*** AB двух событий A и B называют событие, состоящее в совместном появлении, то есть совмещении, этих событий.



Определение. ***Условной вероятностью*** $p_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

В коробке 3 белых и 7 чёрных шаров. Из неё дважды вынимают по одному шару, не возвращая их обратно.

A – первый шар оказался чёрным

B – второй шар оказался белым

Тогда $p_A(B)$ – вероятность появления вторым белого шара, если первый вытащенный шар – чёрный.

$$10 \begin{cases} 3 \text{ белых} \\ 7 \text{ чёрных} \end{cases} \Rightarrow 9 \begin{cases} 3 \text{ белых} \\ 6 \text{ чёрных} \end{cases}$$

$$p = \frac{m}{n}$$

$$p = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$p_A(B) = \frac{m}{n}$$

m – число случаев, благоприятствующих наступлению события B при условии, что A уже наступило $\Rightarrow$ благоприятствующих событиям A и B вместе $\Rightarrow$ $\boxed{\text{благоприятствующих событию } AB}$

n – число всех случаев, но при условии, что A наступило $\Rightarrow$ число случаев, $\boxed{\text{благоприятствующих событию } A}$

Обозначим через N – число всех возможных случаев.

$$p_A(B) = \frac{m}{n} = \frac{\boxed{m/N}}{\boxed{n/N}} = \frac{p(AB)}{p(A)} \quad \Rightarrow \quad p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)}$$

$$p_A(B)=\frac{\boxed{p(AB)}}{p(A)}$$

$p_A(B)$ – условная вероятность (вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило)

$p(AB)$ – вероятность совместного появления событий A и B (оба события одновременно наступили)

Теорема умножения вероятностей. Вероятность совместного появления двух событий

$$p(AB)=p(A)\cdot p_A(B)$$

Следствие 1.
$$p(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=$$
$$p(A_1)\cdot p_{A_1}(A_2)\cdot p_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot p_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n)$$

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$$

Пример. В коробке 3 белых и 7 чёрных шаров.

1) Найти вероятность того, что первый вытащенный шар – чёрный, а второй – белый.

A – первый шар оказался чёрным

B – второй шар оказался белым

$$10 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ белых} \\ 7 \text{ чёрных} \end{array} \right. \qquad 9 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ белых} \\ 6 \text{ чёрных} \end{array} \right.$$

$$p(A) = \frac{7}{10} \qquad p_A(B) = \frac{3}{9} \quad \Rightarrow \quad p(AB) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot p_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Пример. В коробке 3 белых и 7 чёрных шаров.

2) Найти вероятность того, что первый вытащенный шар – чёрный, второй – белый, третий – чёрный, четвёртый – чёрный.

$$10 \left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ белых} \\ 7 \text{ чёрных} \end{array} \right. \qquad 9 \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 6 \end{array} \right. \qquad 8 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 6 \end{array} \right. \qquad 7 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right.$$

$$p(A_1) = \frac{7}{10} \qquad p_{A_1}(A_2) = \frac{3}{9} \qquad p_{A_1 A_1}(A_3) = \frac{6}{8} \qquad p_{A_1 A_2 A_3}(A_4) = \frac{5}{7}$$

$$\Rightarrow \quad p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4) = \frac{7}{10} \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{1}{8}$$

Определение. Событие B называют ***независимым от события*** A, если появление события A не изменяет вероятности события B, то есть если

$$p_A(B) = p(B)$$

Теорема. Если B не зависит от A, то и A не зависит от B, то есть свойство независимости взаимно.

По теореме умножения вероятностей

$$p(AB) = p(A) \cdot p_A(B)$$

Но если события A и B – независимы, то

$$p_A(B) = p(B) \quad \Rightarrow \quad p(AB) = p(A) \cdot p_A(B) = p(A) \cdot p(B)$$

Следствие 2. События A и B – независимы тогда и только тогда, когда $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$

Определение. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми*** (***независимыми в совокупности***), если вероятность каждого из них не зависит от осуществления или неосуществления любого числа остальных событий.

По теореме умножения вероятностей

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot p_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$$

Но если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – независимые, то

$$p_{A_1}(A_2) = p(A_2), \quad p_{A_1 A_2}(A_3) = p(A_3), \ \ldots, \ p_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n) = p(A_n)$$

Следствие 3. Если $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – независимые, то

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \ldots \cdot p(A_n)$$

$$p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \ldots \cdot p(A_n)$$

Имеется 3 ящика по 10 деталей. В первом ящике 2 бракованные детали, во втором – 3, в третьем – 1. Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что все три детали – не бракованные.

$$10\left\{\begin{array}{l}2 \text{ брак}\\[2ex] 8 \text{ не брак}\end{array}\right. \qquad 10\left\{\begin{array}{l}3 \text{ брак}\\[2ex] 7 \text{ не брак}\end{array}\right. \qquad 10\left\{\begin{array}{l}1 \text{ брак}\\[2ex] 9 \text{ не брак}\end{array}\right.$$

$$p(A_1) = \frac{8}{10} \qquad p(A_2) = \frac{7}{10} \qquad p(A_3) = \frac{9}{10}$$

$$\Rightarrow \quad p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{9}{10} = 0.504$$

Формула полной вероятности

Определение. Несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют ***полную группу***, если в результате испытания обязательно появится одно из этих событий .

$$p(B_1) + p(B_2) + \ldots + p(B_n) = p(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = 1$$

Примеры.

1. В ящике чёрные, жёлтые и белые шары.
   Из него наудачу вынимается один шар.

   B_1 – достали чёрный шар
   B_2 – достали жёлтый шар
   B_3 – достали белый шар

   B_1, B_2, B_3 образуют полную группу

Формула полной вероятности

Определение. Несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$ образуют ***полную группу***, если в результате испытания обязательно появится одно из этих событий.

$$p(B_1) + p(B_2) + \ldots + p(B_n) = p(B_1 + B_2 + \ldots + B_n) = 1$$

Примеры.

2. В вазе лежат яблоки, сливы, груши и персики. Из него наудачу вынимается один фрукт.

B_1 – выбрано яблоко

B_2 – выбрана слива

B_3 – выбрана груша

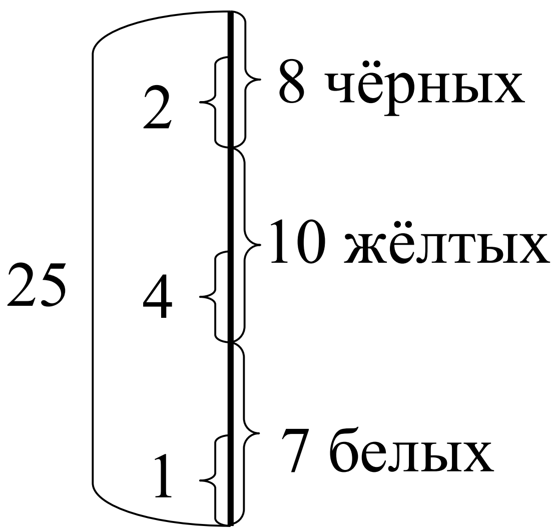
B_4 – выбран персик

B_1, B_2, B_3, B_4 образуют полную группу

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа несовместных событий.

И пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Пример. В ящике 8 чёрных, 10 жёлтых и 7 белых шаров. Среди чёрных шаров 2 с дефектом, среди жёлтых – 4, среди белых – 1. Наудачу вынимается один шар.



B_1 – достали чёрный шар

B_2 – достали жёлтый шар

B_3 – достали белый шар

A – появление шара с дефектом

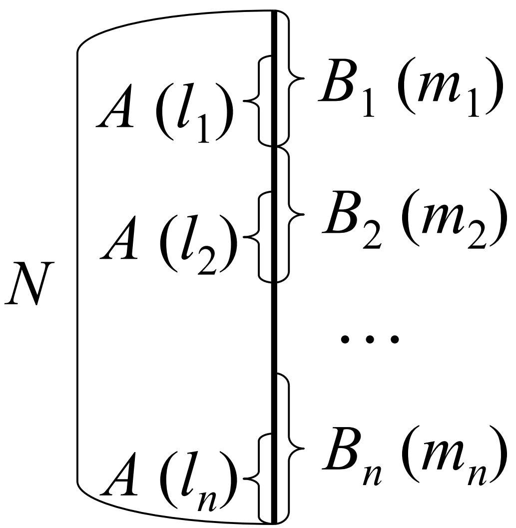
Найдём $p(A)$.

$$p(A) = \frac{7}{25}$$

$$2 + 4 + 1 = 7$$

Пусть B_1, B_2,…, B_n – полная группа несовместных событий.

И пусть событие A может наступить при условии появления одного из событий B_1, B_2,…, B_n.



$$p(A) = \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_n}{N} = \frac{l_1}{N} + \frac{l_2}{N} + \ldots + \frac{l_n}{N} =$$

$$= \boxed{\frac{m_1}{N}} \cdot \boxed{\frac{l_1}{m_1}} + \boxed{\frac{m_2}{N}} \cdot \boxed{\frac{l_2}{m_2}} + \ldots + \frac{m_n}{N} \cdot \frac{l_n}{m_n} =$$

$$= p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots$$

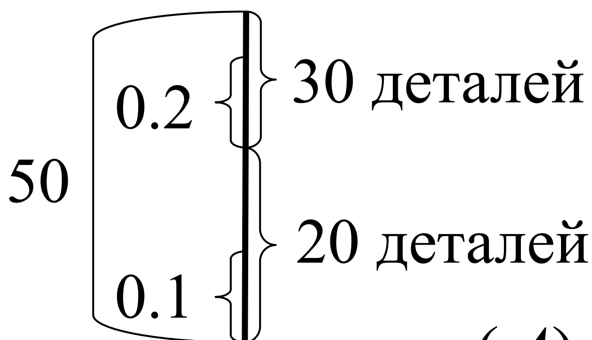
$$\ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)$$

$$p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)$$

– формула полной вероятности

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)$$

Пример. Имеется 2 ящика с деталями. В первом 30 деталей, во втором – 20. Вероятность бракованной детали в первом ящике 0.2, а во втором – 0.1. Найти вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется бракованной.



B_1 – деталь из первого ящика

B_2 – деталь из второго ящика

A – деталь бракованная

Найдём $p(A)$.

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)$$

$$p_{B_1}(A)=0.2 \qquad p_{B_2}(A)=0.1 \qquad p(B_1)=\frac{30}{50} \qquad p(B_2)=\frac{20}{50}$$

$$p(A)=\frac{30}{50}\cdot 0.2+\frac{20}{50}\cdot 0.1=0.16$$

Пример. Студент знает 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае шансы этого студента получить знакомый билет выше: когда он подходит тянуть билет первым или вторым?

A – получил знакомый билет

$$p_1(A) = \frac{10}{25}$$

$$p_2(A) = p(B_1)\cdot p_{B_1}(A) + p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)$$

$$= \frac{10}{25}\cdot\frac{9}{24} + \frac{15}{25}\cdot\frac{10}{24} = \frac{10}{25}\cdot\underbrace{\left(\frac{9}{24}+\frac{15}{24}\right)}_{1} = \frac{10}{25}$$

25: 10 знает, 15 нет

B_1 → 24: 9 знает, 15 нет

B_2 → 24: 10 знает, 14 нет

$$p(B_1) = \frac{10}{25}$$

$$p_{B_1}(A) = \frac{9}{24}$$

$$p(B_2) = \frac{15}{25}$$

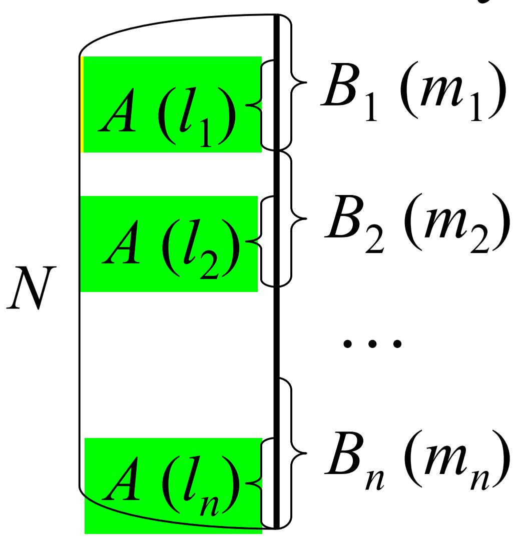
$$p_{B_2}(A) = \frac{10}{24}$$

Шансы одинаковы.

Формулы Байеса

Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_n$ – полная группа несовместных событий, A – событие, которое может наступить при условии появления одного из событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$.

Найдём вероятность события $\boxed{B_1}$, при условии, что событие A наступило.



$$p_A(B_1) = \frac{\boxed{l_1}}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = \frac{\frac{l_1}{N}}{\frac{l_1}{N} + \frac{l_2}{N} + \ldots + \frac{l_n}{N}} =$$

$$= \frac{\boxed{\frac{m_1}{N}} \cdot \boxed{\frac{l_1}{m_1}}}{\frac{m_1}{N} \cdot \frac{l_1}{m_1} + \frac{m_2}{N} \cdot \frac{l_2}{m_2} + \ldots + \frac{m_n}{N} \cdot \frac{l_n}{m_n}} =$$

$$= \frac{\boxed{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A)}}{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + \ldots + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)}$$

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)}$$

$$p_A(B_2)=\frac{p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)}$$

$$p_A(B_i)=\frac{p(B_i)\cdot p_{B_i}(A)}{\boxed{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)}}$$

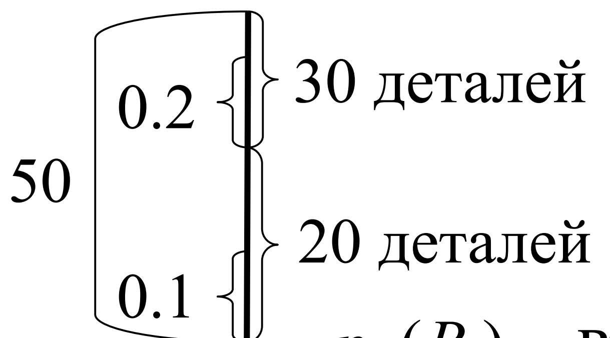
– ***формулы Байеса***

$$\boxed{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)=p(A)}$$

– ***формула полной вероятности***

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A)}$$

Пример. Имеется 2 ящика с деталями. В первом 30 деталей, во втором – 20. Вероятность бракованной детали в первом ящике 0.2, а во втором – 0.1. Выбранная наугад деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она из первого ящика.



B_1 – деталь из первого ящика

B_2 – деталь из второго ящика

A – деталь бракованная

$p_A(B_1)$ – веро ?

ся и

что она бракованная

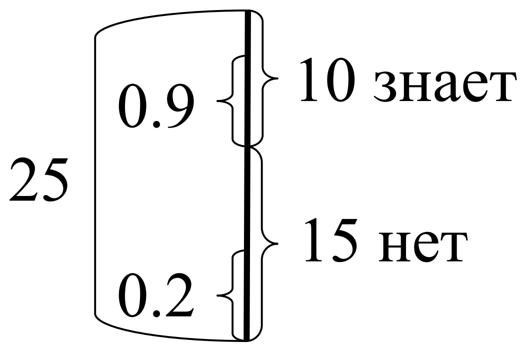
$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}$$

$p_{B_1}(A)=0.2$

$p_{B_2}(A)=0.1$

$p(B_1)=\frac{30}{50}$ $\quad p(B_2)=\frac{20}{50}$ $\quad\Rightarrow\quad \boxed{p_A(B_1)=0.75}$

Пример. Студент пришёл сдавать экзамен, зная 10 из 25 экзаменационных билетов. Знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0.9, незнание – с вероятностью 0.2. Студент сдал экзамен. Какова вероятность, что ему попался незнакомый билет?



B_1 – знакомый билет

B_2 – незнакомый билет

A – сдал экзамен

Найти вероятность, что студенту попался незнакомый билет, при условии, что он сдал экзамен.

$$p(B_1)=\frac{10}{25} \quad p(B_2)=\frac{15}{25}$$

$$p_{B_1}(A)=0.9$$

$$p_{B_2}(A)=0.2$$

$$p_A(B_2)=\frac{p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}$$

$$p_A(B_2)=\frac{\frac{15}{25}\cdot 0.2}{\frac{15}{25}\cdot 0.2+\frac{10}{25}\cdot 0.9}=\frac{\frac{15}{25}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{15}{25}\cdot\frac{2}{10}+\frac{10}{25}\cdot\frac{9}{10}}=\frac{15\cdot 2}{15\cdot 2+10\cdot 9}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Формула Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться, либо не появиться.

Пусть в каждом испытании вероятность события A

$$p(A) = p.$$

Найдём вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз.

Обозначим эту вероятность $p_n(k)$.

$p_7(3)$ – вероятность того, что при 7 испытаниях событие A появится ровно 3 раза

Пример. Имеется 5 ящиков деталей, вероятность брака в каждом из них – 0.1. Какова вероятность, что из пяти деталей, наугад выбранных по одной из каждого ящика, три окажутся бракованные?

$p_5(3)$ – ?

$$A \left| \begin{cases} 0.1 \text{ брак} \\ 0.9 \text{ не брак} \end{cases} \right._1 \quad A \left| \begin{cases} 0.1 \\ 0.9 \end{cases} \right._2 \quad A \left| \begin{cases} 0.1 \\ 0.9 \end{cases} \right._3 \quad A \left| \begin{cases} 0.1 \\ 0.9 \end{cases} \right._4 \quad A \left| \begin{cases} 0.1 \\ 0.9 \end{cases} \right._5$$

1, 2, 3 – брак, 4, 5 – не брак $\quad 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.9 = 0.1^3 \cdot 0.9^2$

1, 2, 4 – брак, 3, 5 – не брак $\quad 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.1^3 \cdot 0.9^2$

2, 3, 4 – брак, 1, 5 – не брак $\quad 0.9 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.1^3 \cdot 0.9^2$

$$p_5(3) = 0.1^3 \cdot 0.9^2 \cdot k \qquad k = C_5^3 = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!}$$

$$\boxed{p_5(3) = 0.1^3 \cdot 0.9^{5-3} \cdot C_5^3}$$

Найдём вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз.

$p_n(k)$ – ?

$$\underset{1}{\mathrm{A}\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}} \qquad \underset{2}{\mathrm{A}\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}} \qquad \ldots \qquad \underset{n}{\mathrm{A}\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}}$$

$$p_5(3) = 0.1^3 \cdot 0.9^{5-3} \cdot C_5^3$$

В общем виде аналогично получаем формулу:

$$p_n(k) = p^k \cdot (1-p)^{n-k} \cdot C_n^k$$

Обозначим через $q = 1 - p$. Тогда

$$p_n(k) = p^k \cdot q^{n-k} \cdot C_n^k$$ – ***формула Бернулли***

Пример. Вероятность попадания стрелком в мишень – 0.8. Какова вероятность, что при шести выстрелах он два раза промахнётся?

$$\left\{\begin{array}{l} 0.8 - \text{попадание} \\ 0.2 - \text{промах} \end{array}\right.$$

$$\boxed{p_n(k) = p^k \cdot q^{n-k} \cdot C_n^k}$$

$$\boxed{q = 1 - p}$$

n – количество выстрелов $\qquad n = 6$

k – количество промахов $\qquad k = 2$

p – вероятность промаха $\qquad p = 0.2 \qquad q = 1 - p = 0.8$

$$\boxed{p_6(2) = 0.2^2 \cdot 0.8^{6-2} \cdot C_6^2}$$

$$p_6(2) = 0.2^2 \cdot 0.8^4 \cdot \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 0.2^2 \cdot 0.8^4 \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} \approx 0.246$$

Приближенные формулы в схеме Бернулли

Формула Пуассона.

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятность p достаточно мала, причём их произведение $\lambda = np$ не мало и не велико (обычно $p \le 0.1$, $np \le 10$), то вероятность $p_n(k)$ того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз, можно приближенно найти по формуле

$$p_n(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Локальная формула Муавра – Лапласа.

Если число испытаний n достаточно велико, а вероятности p и $q = 1 - p$ не очень близки к нулю (обычно $n > 100$, $npq > 10$), то вероятность $p_n(k)$ того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз, можно приближенно найти по формуле

$$\boxed{p_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x)}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ – ***функция Гаусса***.

Интегральная формула Муавра – Лапласа.

В условиях локальной формулы Муавра – Лапласа вероятность $p_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что при n испытаниях событие A осуществится от k_1 до k_2 раз, можно приближенно найти по формуле

$$p_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

– ***функция Лапласа***.

Отклонение относительной частоты появления события A от его вероятности при независимых испытаниях.

Производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью p.

Вероятность того, что отклонение относительной частоты m/n от вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного ε > 0, то есть вероятность осуществления неравенства $\left| m/n - p \right| \le \varepsilon$, можно приближенно найти по формуле

$$p\left(\left| m/n - p \right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi(\varepsilon\sqrt{n/(pq)})$$

где $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ – ***функция Лапласа***.

Случайные величины

Определение. ***Случайной величиной*** называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, наперёд не известное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины: $X, Y, Z, \ldots$, их значения: $x, y, z, \ldots$

Примеры.

1. Количество родившихся мальчиков среди 100 новорождённых.

2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле.

Чем отличаются случайные величины из этих двух примеров?

1. Количество родившихся мальчиков среди 100 новорождённых.

Случайная величина принимает отдельные, изолированные значения.

Дискретная случайная величина.

2. Расстояние, которое пролетит снаряд при выстреле.

Случайная величина принимает любое значение из некоторого промежутка.

Непрерывная случайная величина.

Дискретные и ***непрерывные*** случайные величины.

Дискретная случайная величина

Как определить дискретную случайную величину?

1. Перечислить возможные значения.

Пример 1. Число, выпавшее при бросании кубика.

Пример 2. Число, выпавшее при бросании кубика со смещённым центром тяжести (часто выдаёт 6).

2. Указать вероятности возможных значений.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Закон распределения полностью определяет дискретную случайную величину.

Способы задания закона распределения дискретной случайной величины.

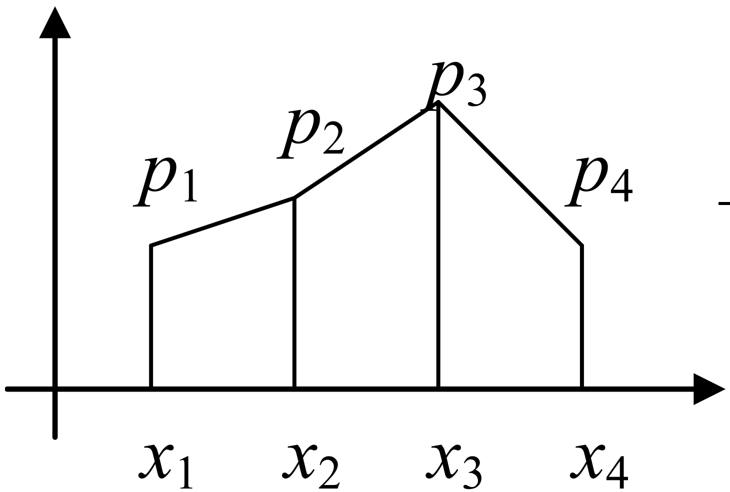
Таблично:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Аналитически: $p(x_i) = f(i), \quad i = 1, 2, ..., n$

Графически:



– ***многоугольник распределения***

Пример.

В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Среди них один билет с выигрышем в 10 тысяч рублей и десять – с выигрышем в 1 тысячу рублей.

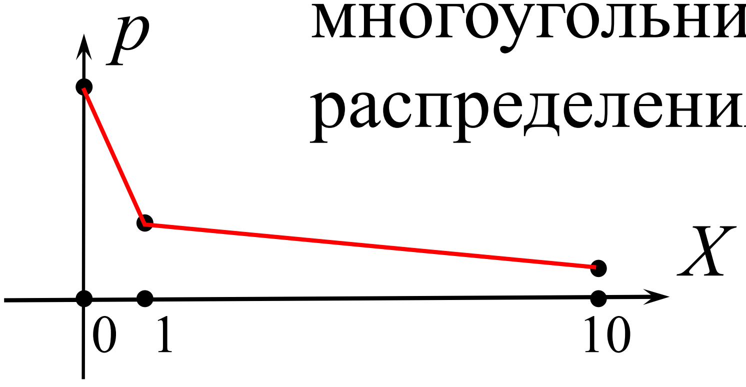
Случайная величина – сумма выигрыша.

Возможные значения: $x_1 = 0$ $x_2 = 1$ $x_3 = 10$

$p_1 = \frac{89}{100}$ $p_2 = \frac{10}{100}$ $p_3 = \frac{1}{100}$

X	0	1	10
p	$\frac{89}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{1}{100}$

закон распределения



многоугольник распределения

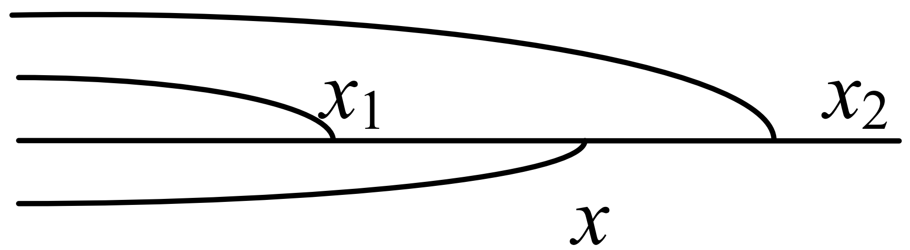
Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина принимает любое значение из некоторого промежутка.

Как определить непрерывную случайную величину?

Способ задания перечислением возможных значений не подходит.

$p(X < x)$



$p(X < x)$ – функция от переменной x

Определение. ***Функцией распределения*** случайной величины X называется функция $F(x)$, задающая вероятность того, что случайная величина X принимает значение, меньшее x, то есть

$$F(x) = p(X < x).$$

Функцию $F(x)$ также называют ***интегральной*** функцией распределения.

Функция распределения полностью определяет непрерывную случайную величину.

Замечание. Понятие функции распределения вводится таким образом не только для непрерывных случайных величин, но и для дискретных.

Свойства функции распределения

1) $0 \le F(x) \le 1$ $\quad$ $F(x) = p(X < x)$

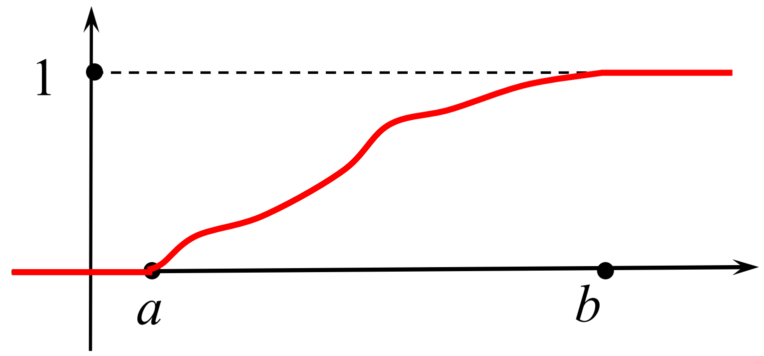
2) Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$

3) $p(a \le X < b) = p(X < b) - p(X < a) = F(b) - F(a)$

4) Если возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то а) $F(x)=0$ при $x \le a$ и б) $F(x)=1$ при $x \ge b$

5) Если X – непрерывная случайная величина, то вероятность того, что она примет одно определённое значение равна нулю: $p(X=x) = 0$.

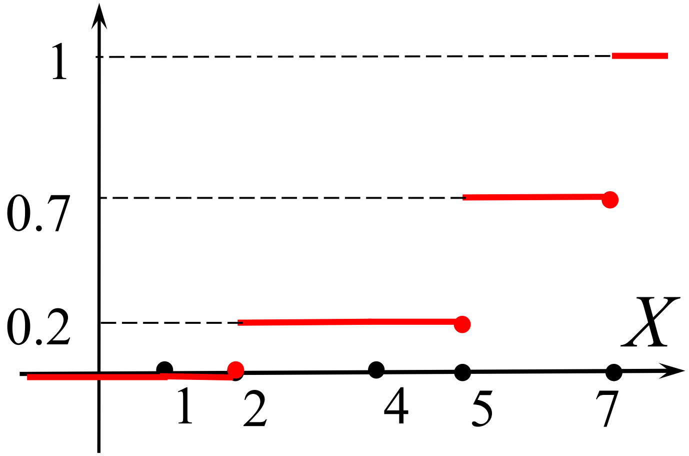
Случайная величина задана на отрезке (a, b).



Пример.

X	2	5	7
p	0.2	0.5	0.3

$$F(x) = p(X < x).$$



$$F(1) = p(X < 1) = 0$$

$$F(2) = p(X < 2) = 0$$

$$F(4) = p(X < 4) = 0.2$$

$$F(5) = p(X < 5) = 0.2$$

$$F(7) = p(X < 7) = 0.2 + 0.5 = 0.7$$

$$F(8) = p(X < 8) = 0.2 + 0.5 + 0.3 = 1$$

Непрерывную случайную величину можно задать функцией распределения.

Существует ещё один способ задания непрерывной случайной величины.

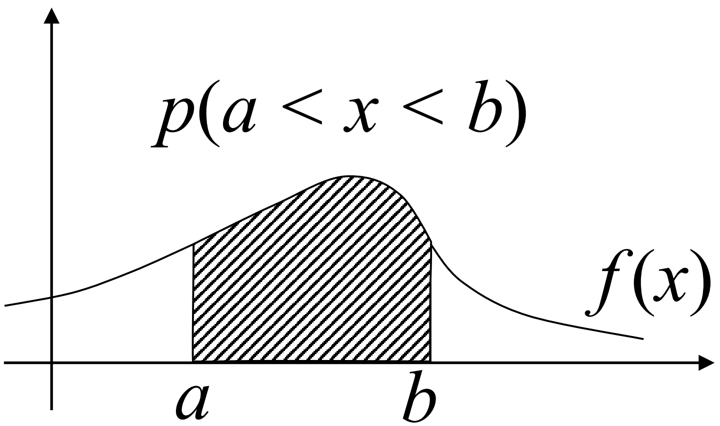
Определение. ***Плотностью распределения вероятностей*** непрерывной случайной величины X называют функцию, являющуюся производной от функции распределения:

$$f(x) = F'(x).$$

Также функцию $f(x)$ называют ***плотностью*** вероятности или ***дифференциальной*** функцией распределения.

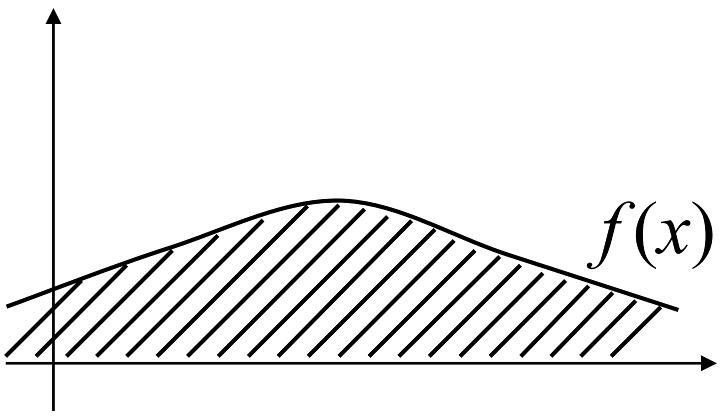
Свойства плотности распределения

1) $$p(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$



2) $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

3) $$f(x) \geq 0$$



4) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Характеристики случайных величин

1. Математическое ожидание

Возможные значения случайной величины сосредоточены вокруг некоторого среднего значения этой случайной величины.

Для характеристики этого среднего значения и служит математическое ожидание.

Для дискретной и непрерывной случайной величины математическое ожидание определяется по-разному.

Определение. ***Математическим ожиданием*** дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех возможных значений этой случайной величины на соответствующие им вероятности. Обозначается $M(X)$.

Пусть

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n$$

Если случайная величина X принимает бесконечное множество значений, то

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$$

Вероятностный смысл математического ожидания:

математическое ожидание приближённо равно среднему арифметическому значений случайной величины.

Пусть n – количество испытаний (достаточно большое).

Пусть случайная величина X принимала значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$$

Найдём среднее арифметическое всех значений:

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} = x_1 \cdot \boxed{\frac{m_1}{n}} + x_2 \cdot \boxed{\frac{m_2}{n}} + \ldots + x_k \cdot \boxed{\frac{m_k}{n}} \approx$$

$$x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_k \cdot p_k = M(X)$$

Определение. ***Математическим ожиданием*** непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называется определённый интеграл

$$M(X) = \int_a^b x f(x) dx$$

$f(x)$ – плотность распределения случайной величины

Если возможные значения случайной величины распределены по всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

2. Дисперсия

Пример.

X	-0.1	0.1
p	$1/2$	$1/2$

$$M(X) = -0.1\cdot\frac{1}{2} + 0.1\cdot\frac{1}{2} = 0$$

Y	-100	100
p	$1/2$	$1/2$

$$M(Y) = -100\cdot\frac{1}{2} + 100\cdot\frac{1}{2} = 0$$

$M(X) = M(Y)$, но X и Y сильно отличаются

Нужна оценка рассеяния возможных значений случайной величины от математического ожидания.

Вопрос: можно ли для оценки рассеяния возможных значений случайной величины вычислить отклонения каждого из этих значений от математического ожидания и затем найти их среднее?

$X-M(X)$	$x_1-M(X)$	$x_2-M(X)$	$\dots$	$x_n-M(X)$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_n

$$M(X-M(X))=$$

$$(x_1-M(X))\cdot p_1+(x_2-M(X))\cdot p_2+\ldots+(x_n-M(X))\cdot p_n=$$

$$\underbrace{x_1\cdot p_1+x_2\cdot p_2+\ldots+x_n\cdot p_n}_{M(X)}-M(X)\cdot\underbrace{(p_1+p_2+\ldots+p_n)}_{1}=$$

$$M(X)-M(X)=0$$

$(X-M(X))^2$	$(x_1-M(X))^2$	$(x_2-M(X))^2$	…	$(x_n-M(X))^2$
p	p_1	p_2	…	p_n

Определение. ***Дисперсией*** случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины X от её математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

1. Дискретная случайная величина

$$D(X) = M[X - M(X)]^2$$

$(X-M(X))^2$	$(x_1-M(X))^2$	$(x_2-M(X))^2$	$\ldots$	$(x_n-M(X))^2$
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 +$$

$$\ldots + (x_n - M(X))^2 p_n$$

$$D(X) = \sum_i (x_i - M(X))^2 p_i$$

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Пример.

X	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	$\boxed{7}$
p	0.2	0.5	0.3
$(X-M(X))^2$	9	0	4
X^2	4	25	49

Способ 1.

$$D(X)=\sum_i \boxed{(x_i-\boxed{M(X)})^2} p_i$$

$$M(X)=2\cdot 0.2+5\cdot 0.5+7\cdot 0.3$$

$$M(X)=5$$

$$(2-5)^2=(-3)^2=9$$
$$(5-5)^2=0^2=0$$
$$(7-5)^2=2^2=4$$

$$D(X)=9\cdot 0.2+0\cdot 0.5+4\cdot 0.3$$

$$D(X)=3$$

Способ 2.

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$$

$$D(X)=4\cdot 0.2+25\cdot 0.5+49\cdot 0.3-5^2=$$
$$=0.8+12.5+14.7-25=3$$

$$D(X)=3$$

2. Непрерывная случайная величина

По определению $D(X) = M[X - M(X)]^2$

Но $M(\boxed{X}) = \int_a^b \boxed{x} f(x)dx \Rightarrow$

$$M\boxed{[X - M(X)]^2} = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx \Rightarrow$$

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$$

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

3. Среднее квадратическое отклонение

Определение. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называют корень из её дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

4. *Начальный момент порядка k*

$$\alpha_k = M(X^k)$$

$$\alpha_k = \sum_i x_i^k \cdot p_i \quad \text{– дискретная}$$

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx \quad \text{– непрерывная}$$

Начальный момент первого порядка:

$\alpha_1 = M(X)$ – математическое ожидание

5. Центральный момент порядка k

$$\alpha_k = M(X - M(X))^k$$

$$\alpha_k = \sum_i (x_i - M(X))^k \cdot p_i$$ – дискретная

$$\alpha_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$$ – непрерывная

Центральный момент второго порядка:

$$\alpha_2 = M(X - M(X))^2$$ – дисперсия

6. *Мода*

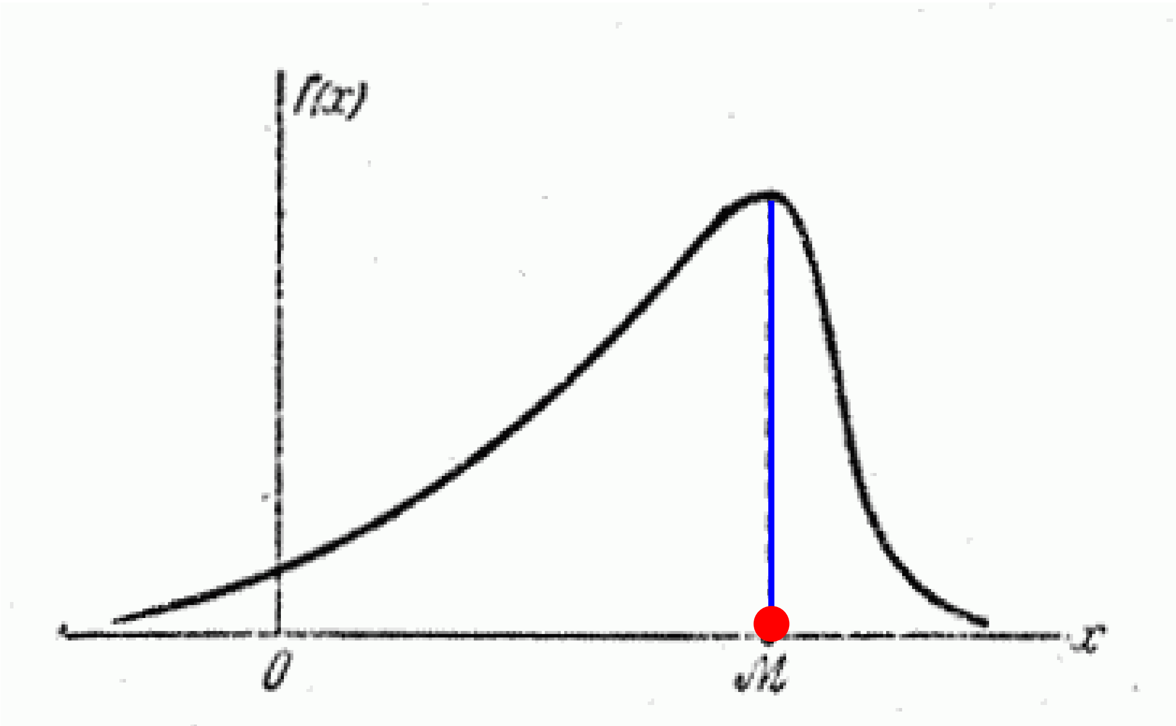
Для дискретной случайной величины ***мода*** – это наиболее вероятное по сравнению с двумя соседними значение.

x_i	10	20	30	40	50	60
p_i	0,24	0,36	0,20	0,15	0,03	0,02

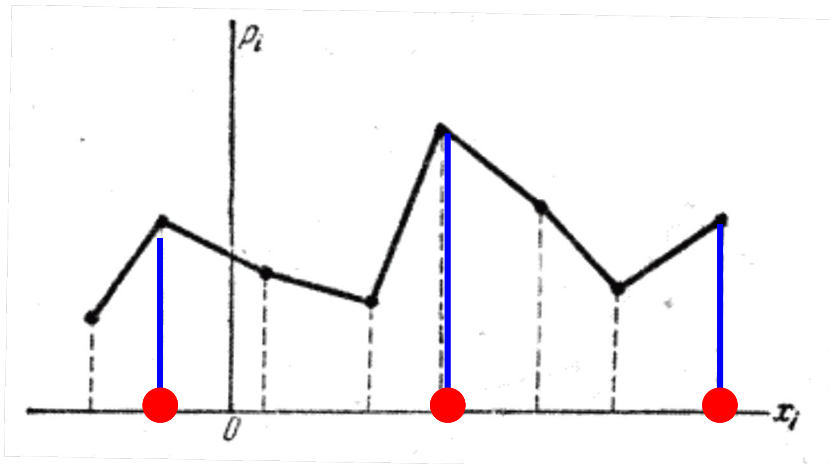
$$0{,}24 < 0{,}36 > 0{,}20$$

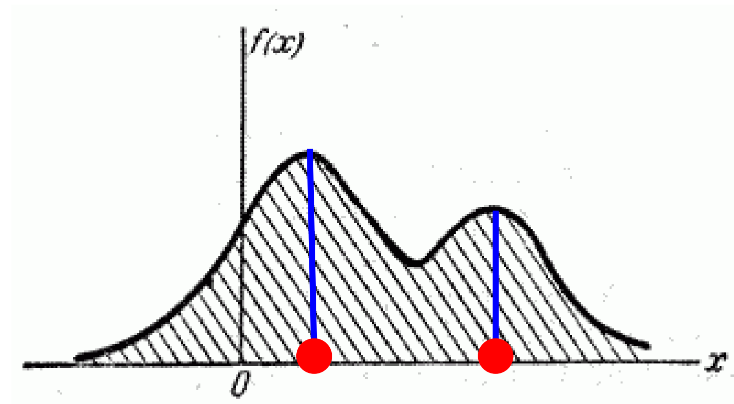
Мода: 20

Для непрерывной случайной величины ***мода*** – значение, при котором плотность распределения $f(x)$ достигает максимума.



У случайной величины может быть несколько мод.





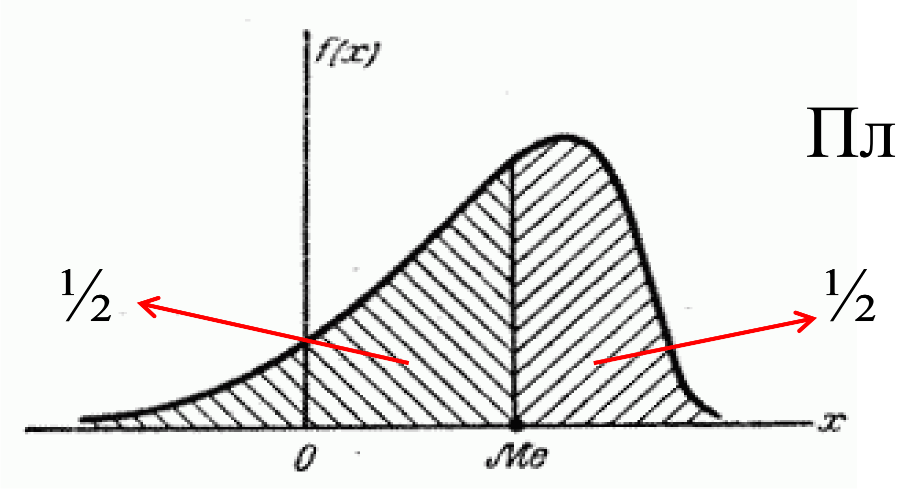
Распределения с одной, двумя или большим числом мод называются соответственно ***унимодальными***, ***бимодальными*** или ***мультимодальными***.

7. Медиана

такое число m, для которого одинаково вероятно, окажется ли случайная величина меньше m или больше m, то есть

$$p(X < m) = p(X > m) = 0.5$$

Геометрически медиана – это абсцисса точки, в которой площадь, ограниченная плотностью распределения, делится пополам.



Площадь всей фигуры: 1

8. *Квантиль уровня p*

такое число x_p, что $p(X < x_p) = p \quad \Leftrightarrow \quad F(x_p) = p$

$F(x)$ – функция распределения

$$x_p = F^{-1}(p)$$

$F^{-1}(x)$ – функция, обратная к функции распределения

Квантиль уровня 0.5 – это ***медиана***.

Квантили уровней ¼, ½, ¾ называют соответственно первым, вторым и третьим ***квартилями***.

Квантили уровней 0.1, 0.2, 0.3, …, 0.9 называют ***децилями***.

Квантили уровней 0.01, 0.02, 0.03, …, 0.99 называют ***процентилями***.

Основные дискретные распределения

1. Биномиальное распределение

p – вероятность события А

X – число появлений события А в n независимых испытаниях

Возможные значения: $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Обозначим $q = 1 - p$. Тогда

$$\boxed{p(k) = p^k q^{n-k} C_n^k}$$

p – параметр распределения

Бином Ньютона: $(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$

$\boxed{M(X) = np}$ и $\boxed{D(X) = npq}$

2. Распределение Пуассона

n – очень большое, p – очень мала, $np = \lambda$

X – число появлений события А в n независимых испытаниях

Возможные значения: $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

Тогда $p(k) = p^k q^{n\text{-}k} C_n^{\,k}$.

Можно показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p^k q^{n-k} = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \Rightarrow$

$$\boxed{p(k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

λ – параметр распределения

$$\boxed{M(X) = D(X) = \lambda}$$

3. Геометрическое распределение

p – вероятность события А

X – число испытаний, которое нужно провести до первого появления события А

Возможные значения: все натуральные числа $k = 1,\ 2,\ 3, \ldots$

Обозначим $q=1-p$. Тогда

$p(k) = q^{k-1}p$ p – параметр распределения

$p, qp, q^2p, q^3p, q^4p, \ldots$ – геометрическая прогрессия

$$M(x) = \frac{1}{p}$$ и $$D(X) = \frac{q}{p^2}$$

4. Гипергеометрическое распределение

В партии из N изделий имеется M стандартных.
Из партии случайно выбирают n изделий.

X – число стандартных изделий среди отобранных

Возможные значения: $k = 0, 1, 2, \ldots, \min(M,n)$

$$p(k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$$

N, M, n – параметры распределения

$$M(X) = \frac{n \cdot M}{N}$$

и

$$D(X) = \frac{M \cdot (N-M) \cdot (N-n) \cdot n}{N^2 \cdot (N-1)}$$

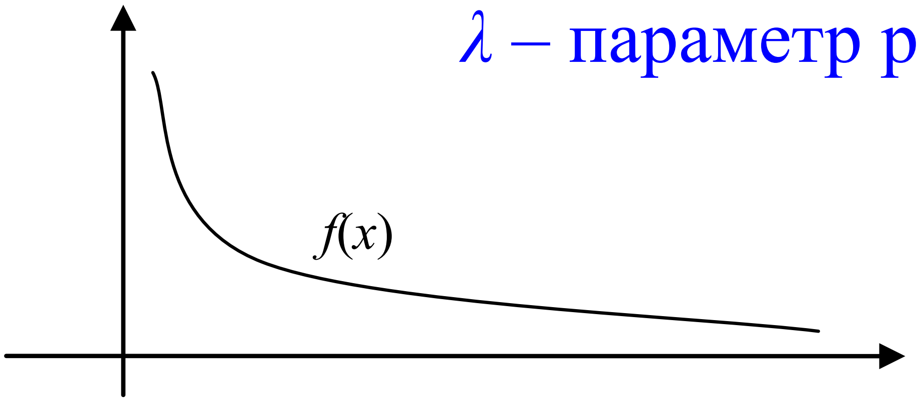
Основные непрерывные распределения

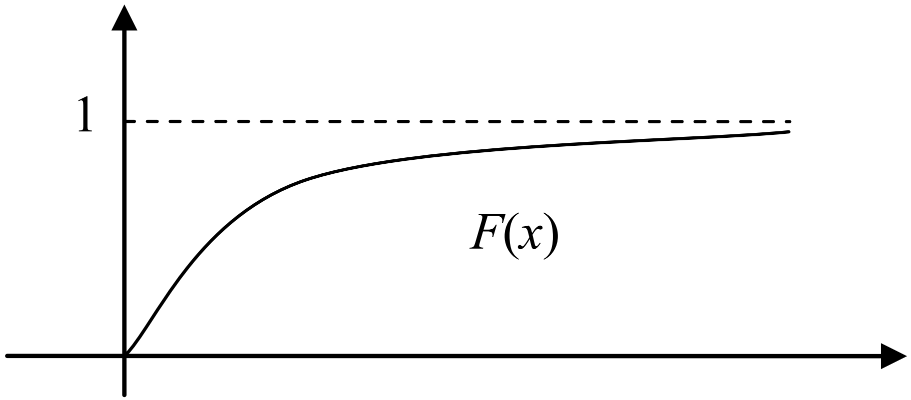
1. Показательное распределение

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

λ – параметр распределения





$$M(X) = \frac{1}{\lambda}$$ и $$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

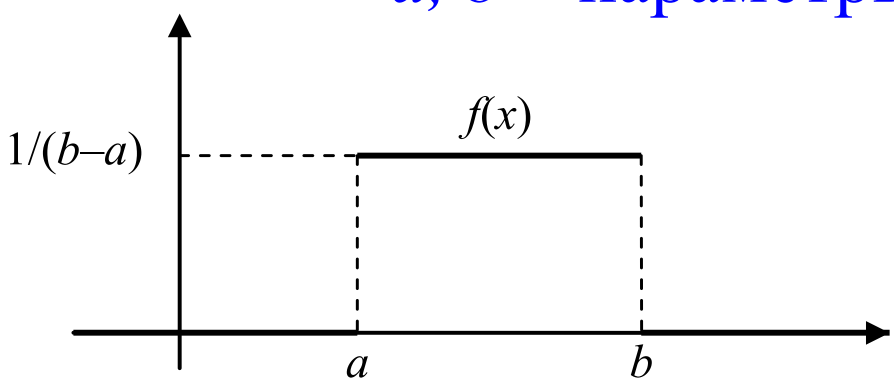
2. Равномерное распределение

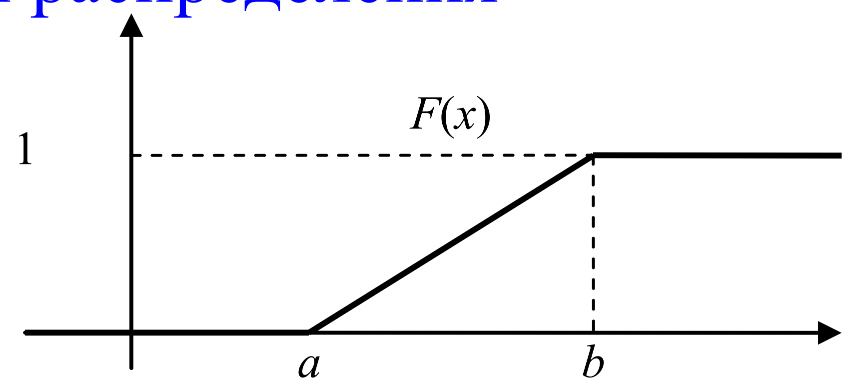
В интервале (a, b) постоянная плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

a, b – параметры распределения





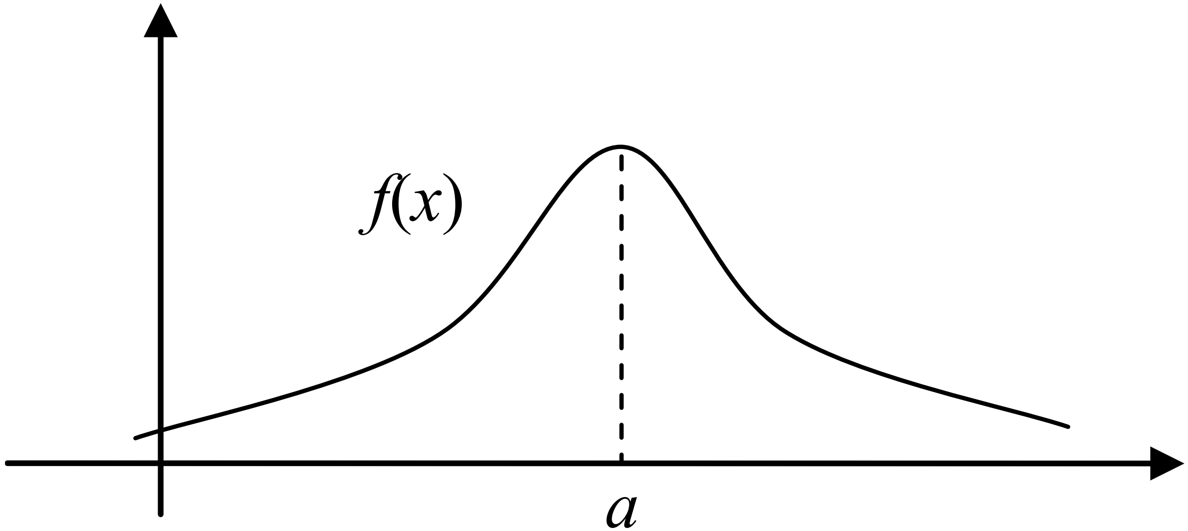
$$M(X)=\frac{a+b}{2}$$ и $$D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

3. Нормальное распределение

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$$

a, *σ* – параметры распределения



$$M(X) = a \quad \text{и} \quad D(X) = \sigma^2$$

4. Распределение χ^2 (распределение Пирсона)

Пусть независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_k$ имеют нормальное распределение, причём математическое ожидание каждой из них равно 0, а среднее квадратическое отклонение равно 1.

Тогда сумма квадратов этих величин:

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_k^2$$

имеет χ^2– распределение с k степенями свободы.

k – параметр распределения

1) Случайная величина $\chi^2 \geq 0$.

2) При увеличении числа степеней свободы распределение Пирсона медленно приближается к нормальному.

5. Распределение Стьюдента (t – распределение)

Пусть X и Y – независимые случайные величины.

X имеет нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 0, и средним квадратическим отклонением, равным 1.

Y имеет χ^2– распределение с k степенями свободы.

Тогда величина

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y / k}}$$

имеет распределение Стьюдента с k степенями свободы

k – параметр распределения

При увеличении числа степеней свободы распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному

6. Распределение Фишера (F – распределение)

Пусть X и Y – независимые случайные величины.

X имеет χ^2 – распределение с k_1 степенями свободы.

Y имеет χ^2 – распределение с k_2 степенями свободы.

Тогда величина

$$\boxed{F = \frac{X / k_1}{Y / k_2}}$$

имеет распределение Фишера с k_1 и k_2 степенями свободы.

k_1 и k_2 – параметры распределения

Так как $X \geq 0$ и $Y \geq 0$, то $F \geq 0$.