Примеры решения типовых задач

Задача 1. Определить, является ли данная функция оригиналом: $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-3}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}.$

Решение. По определению функция *f(t)* называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(t)=0,\ t<0$
2. Существуют такие постоянные σ и *M*, что $|f(t)|< Me^{\sigma t}$, $t>0$
3. На любом конечном интервале [0,τ] функция *f(t)* имеет не более чем конечное число точек разрыва I рода, причем *f*(0)=*f*(+0).

Функция $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-3}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ оригиналом не будет, так как *t*=3 является для нее точкой разрыва II рода, т.е. нарушено третье условие определения оригинала.

Задача 2. Найти изображение $f(t)=\sin 5t\cdot\cos 7t$.

Решение. Воспользуемся тригонометрической формулой $\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$, чтобы избавиться от произведения. Тогда $f(t)=\frac{1}{2}\left[\sin 12t-\sin 2t\right]$. Так как $\sin 12t \risingdotseq \frac{12}{p^2+144}$, $\sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2+4}$ (см. таблицу), используя теорему линейности, окончательно имеем:

$$f(t)\risingdotseq\frac{12}{p^2+144}-\frac{2}{p^2+4}$$

Задача 3. Найти изображение $f(t)=e^{-2t}\sin(3+t)-e^{t}sh2t$.

Решение. Прежде всего, учитывая, что синус суммы $\sin(3+t)=\sin 3\cdot\cos t+\cos 3\cdot\sin t$, преобразуем *f(t)*: $f(t)=\sin 3\cdot e^{-2t}\cos t+\cos 3\cdot e^{-2t}\sin t-e^{t}sh2t$. Чтобы найти изображение *f(t)*, воспользуемся теоремой линейности, таблицей и теоремой смещения: если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p-\alpha)$, где $\operatorname{Re}(p-\alpha) > \sigma_0$. По теореме смещения имеем $e^t sh 2t \risingdotseq \dfrac{2}{(p-1)^2-4}$; $e^{-2t}\cos t \risingdotseq \dfrac{p+2}{(p+2)^2+1}$; $e^{-2t}\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{(p+2)^2+1}$. Таким образом, $f(t) \risingdotseq \dfrac{\sin 3\cdot(p+2)+\cos 3}{(p+2)^2+1} - \dfrac{2}{(p-1)^2-4}$.

Задача 4. Найти изображение $f(t) = \int\limits_0^t \tau^2 \cos\tau \, d\tau$.

Решение. В данном случае воспользуемся теоремой об интегрировании оригинала:

$$\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \text{ где } f(t) \risingdotseq F(p).$$

Тогда $\int\limits_0^t \tau^2 \cos\tau\, d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p}\Psi(p)$, где $\Psi(p)$ − изображение подынтегральной функции $\psi(t) = t^2 \cos t$. Функцию $\Psi(p)$ можно найти двумя способами:

а) по таблице: $\Psi(p) = \dfrac{2!\operatorname{Re}(p+i)^3}{(p^2+1)^3} = \dfrac{2(p^3-3p)}{(p^2+1)^3}$;

б) используя свойство дифференцирования изображения: $t^n \varphi(t) \risingdotseq (-1)^n \Phi^{(n)}(p)$, где $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$; отсюда $\Psi(p) = \left[\dfrac{p}{p^2+1}\right]''_{pp} = \left[\dfrac{1-p^2}{(p^2+1)^2}\right]'_{p} = \dfrac{2p^3-6p}{(p^2+1)^3}$. Окончательно имеем

$$\int\limits_0^t \tau^2 \cos\tau\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\cdot\frac{2(p^3-3p)}{(p^2+1)^3}$$

Задача 5. Найти изображение $f(t) = (t-1)\sin 2(t-3)\eta(t-3) + \cos(t+1)\eta(t-1)$.

Решение. Так как единичная функция в первом слагаемом действует с запаздыванием на три единицы, а во втором слагаемом на одну единицу, то сделаем преобразования:

$$t-1 = (t-3)+4,$$

$$\cos(t+1) = \cos\left[(t-1)+2\right] = \cos(t-1)\cdot\cos 2 - \sin(t-1)\cdot\sin 2.$$

Тогда

$$f(t)=(t-3)\sin 2(t-3)\eta(t-3)+4\sin 2(t-3)\eta(t-3)+$$
$$+\cos 2\cdot\cos(t-1)\eta(t-1)-\sin 2\cdot\sin(t-1)\eta(t-1).$$

Далее воспользуемся теоремой запаздывания:
если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $f(t-\tau)\eta(t-\tau)\risingdotseq e^{-p\tau}F(p)$, причем $f(t-\tau)=0$ при $t<\tau$. Затем, используя таблицу, имеем:

$$(t-3)\cdot\sin 2(t-3)\eta(t-3)\risingdotseq\frac{e^{-3p}\,\mathrm{Im}(p+2i)^2}{(p^2+4)^2}=\frac{4p\cdot e^{-3p}}{(p^2+4)^2};$$

$$\sin 2(t-3)\eta(t-3)\risingdotseq\frac{2e^{-3p}}{p^2+4};$$

$$\cos(t-1)\eta(t-1)\risingdotseq\frac{p\cdot e^{-p}}{p^2+1};\ \sin(t-1)\eta(t-1)\risingdotseq\frac{e^{-p}}{p^2+1}.$$

Окончательно получаем

$$f(t)\risingdotseq\frac{4p\cdot e^{-3p}}{(p^2+4)^2}+\frac{8e^{-3p}}{p^2+4}+\cos 2\cdot\frac{p\cdot e^{-p}}{p^2+1}-\sin 2\cdot\frac{e^{-p}}{p^2+1}.$$

Задача 6. Найти изображение функции $f(t)=\int_0^t\tau^3 sh6(t-\tau)d\tau$.

Решение. В данном случае изображение находится по теореме о свертке оригиналов:

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\risingdotseq F(p)\cdot G(p).$$

Поэтому $\int_0^t\tau^3 sh6(t-\tau)d\tau\risingdotseq\frac{3!}{p^4}\cdot\frac{6}{p^2-36}$.

Задача 7. Найти изображение функции, заданной графически (рис. 5.1).

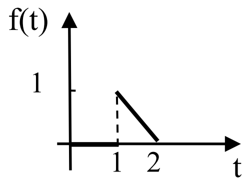

Рис. 5.1.

Решение. Найдем аналитическое выражение функции *f(t)*: $f(t)=\begin{cases}0, & 0<t\le 1\\ 2-t, & 1<t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$. Предполагая, что *f(t)*=0 для всех $t\ge 0$, найдем функцию $\psi_1(t)$, которую надо прибавить к *f(t)*=0, чтобы получить функцию *f(t)*=$2-t$ для всех $t>1$: $0+\psi_1=2-t\ \Rightarrow\ \psi_1(t)=(2-t)\eta(t-1)$. Затем найдем такую $\psi_2(t)$, чтобы в сумме с $f(t)=2-t$ иметь $f(t)=0$ для всех $t>2$: $2-t+\psi_2(t)=0 \Rightarrow$ $\psi_2(t)=(t-2)\eta(t-2)$. Поэтому

$$f(t)=\psi_1(t)+\psi_2(t)=(2-t)\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2) \Rightarrow$$

$$f(t)=-(t-1)\eta(t-1)+\eta(t-1)+(t-2)\eta(t-2).$$

Остается записать изображение этой функции, используя теорему запаздывания и таблицу:

$$f(t) \risingdotseq -\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{e^{-p}}{p}+\frac{e^{-2p}}{p^2}$$

Задача 8. Найти изображение функции $f(t)=(3t^2-1)\eta(t-1)$

Решение. Данная задача аналогична задачам 5 и 7. Т.е. так как единичная функция запаздывает на одну единицу ($\eta(t-1)$), необходимо выразить $(3t^2-1)$ через степени разностей $(t-1)$. Имеем

$$(3t^2-1)=3(t-1)^2+6(t-1)+2 \Rightarrow$$

$$f(t)=3(t-1)^2\eta(t-1)+6(t-1)\eta(t-1)+2\eta(t-1).$$

Используя теорему запаздывания, запишем изображение

$$f(t) \risingdotseq 6\frac{e^{-p}}{p^3}+6\frac{e^{-p}}{p^2}+2\frac{e^{-p}}{p}$$

Задача 9. Найти изображение функции $f(t)=\left[\left[t^2\eta(t)\right]'\cdot e^{-2t}\right]''\cdot t^2$.

Решение. То, что в данной функции в качестве сомножителя имеется t^2, подсказывает использовать свойство дифференцирования изображения: $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$. При n=2 получим: $\left[\left[t^2\eta(t)\right]'\cdot e^{-2t}\right]''\cdot t^2 \risingdotseq \left[\Psi(p)\right]''_{pp}$,

где $\Psi(p)$ – изображение функции $\left[\left[t^2\eta(t)\right]'\cdot e^{-2t}\right]''$. Функцию $\Psi(p)$ найдем пользуясь свойством дифференцирования оригинала: $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0)$. При n=2 получим:

$$\left[\left[t^2\eta(t)\right]'\cdot e^{-2t}\right]'' \risingdotseq p^2\Phi(p)-p\varphi(0)-\varphi'(0),$$

где функция $\Phi(p) \risingdotseq \left[t^2\eta(t)\right]' \cdot e^{-2t}$, причем, $\varphi(0)=0$, а $\varphi'(0)=2$, поэтому остается найти изображение функции $\left[t^2\eta(t)\right]' \cdot e^{-2t}$. Функцию $\Phi(p)$ также можно искать различными способами; укажем лишь, что $\Phi(p) = \dfrac{2}{(p+2)^2}$. Таким образом, возвращаясь по цепочке, найдем изображение исходной функции *f(t)*:

$$f(t) \risingdotseq \left[\frac{2p^2}{(p+2)^2} - 2\right]''_{pp} = \left[\frac{-8p-8}{(p+2)^2}\right]''_{pp} = -8\frac{2p-2}{(p+2)^4} = 16\frac{1-p}{(p+2)^4}$$

Задача 10. Найти изображение функции $\varphi(t) = \dfrac{d}{dt}\left[L^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+1}\right\}e^{-2t} \cdot \int\limits_0^t \eta(t)\,dt\right]$.

Решение. Так как $L^{-1}\left\{\dfrac{p}{p^2+1}\right\} = \cos 2t$, то требуется изобразить выражение $\varphi(t) = \left[\cos 2t \cdot e^{-2t} \cdot \int\limits_0^t \eta(t)\,dt\right]'$. Воспользуемся свойством дифференцирования оригинала: $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, где $F(p) \risingdotseq \cos 2t \cdot e^{-2t} t\eta(t)$. Для изображения же последней функции используем теорему смещения и таблицу: $t \cdot \cos\omega t \risingdotseq \dfrac{\mathrm{Re}\,(p+\omega i)^2}{(p^2+\omega^2)^2}$, поэтому $t \cdot e^{-2t}\cos 2t \risingdotseq \dfrac{\mathrm{Re}\,(p+2+2i)^2}{\left[(p+2)^2+4\right]^2} = \dfrac{(p+4)p}{\left[(p+2)^2+4\right]^2}$, откуда

$$f(t) \risingdotseq \begin{cases} \dfrac{(p+4)p}{\left[(p+2)^2+4\right]^2}, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$$

Задача 11. Найти изображение периодической функции *f(t)*, которая задана графически (рис. 5.2).

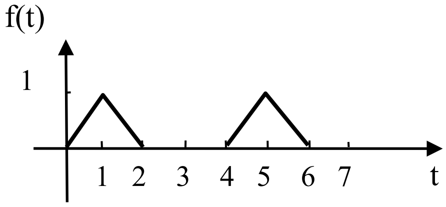

Рис. 5.2.

Решение. Для нахождения изображения периодической функции *f(t)* воспользуемся формулой: $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T f(t)e^{-pt}dt$, где T – период функции *f(t)*. Аналитическое выражение функции *f(t)* имеет вид: $f(t)=\begin{cases} t, & 0<t\le 1 \\ 2-t, & 1<t\le 2 \\ 0, & 2<t\le 4 \end{cases}$, а период T=4. Тогда изображение данной функции *f(t)* найдем по формуле:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-4p}}\left[\int\limits_0^1 te^{-pt}dt-\int\limits_1^2 (t-2)e^{-pt}dt\right],$$

откуда $\quad f(t)\risingdotseq\dfrac{1}{1-e^{-4p}}\cdot\dfrac{(1-e^{-p})^2}{p^2}$.

Задача 12. Найти изображение функции $f(t)=\dfrac{1}{t}\int\limits_0^t (t-te^{-2t})dt$.

Решение. Прежде всего используем свойство интегрирования изображения:

$$\text{если } f(t)\risingdotseq F(p)\text{, то } \frac{f(t)}{t}\risingdotseq\int\limits_p^\infty F(p)d\,p.$$

Таким образом, нам нужно найти функцию $\Psi(p)$, которая изображает $\int\limits_0^t (t-te^{-2t})dt$. Для этого используем свойство интегрирования оригинала, а именно:

$$\int\limits_0^t f(t)dt\risingdotseq\frac{F(p)}{p}\text{, где } f(t)\risingdotseq F(p).$$

Так как $t-te^{-2t}\risingdotseq\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{(p+2)^2}$, то $\int\limits_0^t (t-te^{-2t})dt\risingdotseq\dfrac{1}{p}\left[\dfrac{1}{p^2}-\dfrac{1}{(p+2)^2}\right]$.

Поэтому, окончательно имеем

$$f(t)\risingdotseq\int\limits_p^\infty\left[\frac{1}{p^3}-\frac{1}{p(p+2)^2}\right]d\,p=\frac{1}{2p^2}+\frac{1}{2(p+2)}-\frac{1}{4}\ln\frac{p+2}{p}$$

Задача 13. Найти оригинал для функции $F(p)=\dfrac{2e^{-3p}}{(p-4)^2}$.

Решение. Наличие сомножителя e^{-3p} подсказывает, что в оригинале аргумент запаздывает на $\tau=-3$ (т.е. пользуемся теоремой запаздывания); смещение аргумента изображения указывает на необходимость применения теоремы смещения. Таким образом,

$$F(p) \risingdotseq 2(t-3)e^{4(t-3)}\eta(t-3)$$

Задача 14. Найти оригинал $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-2p+2)}$.

Решение. Так как функция представляет собой правильную рациональную дробь, то для нахождения оригинала можно воспользоваться или второй теоремой разложения, или разложением функции *F(p)* на элементарные дроби с последующим использованием таблицы и свойств преобразования.

I способ: разлагаем функцию на элементарные дроби:

$$\frac{1}{p(p^2-2p+2)}=\frac{A}{p}+\frac{Bp+C}{p^2-2p+2}=$$

$$=\frac{1}{2p}-\frac{p}{2(p^2-2p+2)}+\frac{1}{2(p^2-2p+2)}\ ,$$

где коэффициенты *A, B, C* найдены методом неопределенных коэффициентов. Выделение полного квадрата знаменателя $p^2-2p+2=(p-1)^2+1$ приводит к выражению

$$F(p)=\frac{1}{2p}-\frac{p-1}{2\left[(p-1)^2+1\right]}+\frac{1}{2\left[(p-1)^2+1\right]}\Rightarrow$$

$$F(p) \risingdotseq \frac{1}{2}\left[1-e^t\cos t+e^t\sin t\right].$$

Последнее равенство получено с помощью таблицы и теоремы смещения.

II способ: найдем тот же оригинал, пользуясь II теоремой разложения. Находим особые точки функции $F(p)=\dfrac{1}{p(p^2-2p+2)}$:

$p_1=0,\ \ p_2=1+i,\ \ p_3=1-i$. Все три точки являются простыми полюсами функции $F(p)$, поэтому для нахождения оригинала воспользуемся формулой $f(t)=\sum\limits_{(p_k)}\dfrac{e^{pt}}{\left[p(p^2-2p+2)\right]'}$. Так как $\left[p(p^2-2p+2)\right]'=3p^2-4p+2$, то

$$f(t)=\frac{e^{0t}}{2}+\frac{e^{t+it}}{2i-2}+\frac{e^{t-it}}{-2i-2}=\frac{1}{2}\left[1+e^{t}(\sin t-\cos t)\right]$$

Задача 15. Найти оригинал $F(p)=\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

Решение. Разложим функцию на элементарные дроби: $F(p)=-\dfrac{1}{15(p+1)}+\dfrac{1}{6(p-2)}-\dfrac{p}{10(p^2+4)}-\dfrac{2}{5(p^2+4)}$. Использование таблицы и теоремы линейности позволяет найти оригинал:

$$f(t)=-\frac{e^{-t}}{15}+\frac{e^{2t}}{6}-\frac{1}{10}\cos 2t-\frac{1}{5}\sin 2t.$$

Задача 16. Решить дифференциальное уравнение: $x''+9x=f(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=1$, где функция *f(t)* задана графически (рис. 5.3).

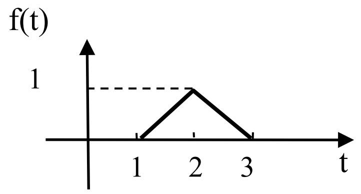

Рис. 5.3.

Решение. Запишем для функции *f(t)* ее аналитическое выражение:

$$f(t)=\begin{cases}0, & 0<t\le 1\\ t-1, & 1<t\le 2\\ 3-t, & 2<t\le 3\\ 0, & t>3\end{cases}.$$

Найдем функцию $\psi_1(t)$ такую, чтобы при $t>1$ выполнялось соотношение $0+\psi_1=t-1 \Rightarrow \psi_1(t)=(t-1)\eta(t-1)$. Затем найдем $\psi_2(t)$ такую, чтобы для всех $t>2$ было справедливо: $t-1+\psi_2(t)=3-t \Rightarrow \psi_2(t)=(t-3)\eta(t-3)$. Таким образом,

$$f(t)=(t-1)\eta(t-1)-2(t-2)\eta(t-2)+(t-3)\eta(t-3).$$

Теперь можно записать операторное уравнение, используя таблицу или различные свойства изображения: $p^2X(p)-1+9X(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2}-\dfrac{2e^{-p}}{p^2}+\dfrac{e^{-3p}}{p^2}$.

Выражаем функцию $X(p)$:

$$X(p)=\frac{1}{p^2+9}+\frac{e^{-p}}{p^2(p^2+9)}-\frac{2e^{-2p}}{p^2(p^2+9)}+\frac{e^{-3p}}{p^2(p^2+9)}.$$

Разложив дробь $\dfrac{1}{p^2(p^2+9)}$ на элементарные, получаем:

$$X(p)=\frac{1}{p^2+9}+\frac{e^{-p}}{9p^2}-\frac{e^{-p}}{9(p^2+9)}-\frac{2e^{-2p}}{9p^2}+\frac{2e^{-2p}}{9(p^2+9)}+\frac{e^{-3p}}{9p^2}-\frac{e^{-3p}}{9(p^2+9)}$$

Возвращаемся к оригиналам, используя теорему запаздывания и таблицу:

$$x(t)=\frac{\sin 3t}{3}+\frac{1}{9}\cdot\left[(t-1)-\frac{\sin 3(t-1)}{3}\right]\eta(t-1)-$$

$$-\frac{2}{9}\cdot\left[(t-2)-\frac{\sin 3(t-2)}{3}\right]\eta(t-2)+\frac{1}{9}\cdot\left[(t-3)-\frac{\sin 3(t-3)}{3}\right]\eta(t-3).$$

Задача 17. Решить уравнение: $x''+3x'-10x=47\cos 3t-\sin 3t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=3, x'(0)=-1$.

Решение. Пользуясь свойством дифференцирования оригинала, таблицей и теоремой линейности: $x''\risingdotseq p^2X(p)-3p+1$, $x'\risingdotseq pX(p)-3$, $x(t)\risingdotseq X(p)$; $\cos 3t\risingdotseq\frac{p}{p^2+9}$, $\sin 3t\risingdotseq\frac{3}{p^2+9}$

составим операторное уравнение:

$p^2X(p)-3p+1+3pX(p)-9-10X(p)=\frac{47p}{p^2+9}-\frac{3}{p^2+9}$, откуда

$X(p)=\frac{47p-3}{(p^2+9)(p^2+3p-10)}+\frac{3p+8}{p^2+3p-10}$. Раскладываем полученное выражение на элементарные дроби: $X(p)=\frac{-2p}{p^2+9}+\frac{3}{p^2+9}+\frac{3}{p+5}+\frac{3}{p-2}$.

Остается вернуться к оригиналу, используя свойства преобразования и таблицу:

$$x(t)=-2\cos 3t+\sin 3t+3e^{-5t}+3e^{2t}$$

Задача 18 решается аналогично.

Задача 19. Решить систему дифференциальных уравнений $\begin{cases}x'=3y-x\\ y'=y+x+e^{at}\end{cases}$ при заданных начальных условиях $x(0)=1,\quad y(0)=1$.

Решение. Запишем операторную систему. Обозначим

$$x(t)\risingdotseq X(p),\ y(t)\risingdotseq Y(p)\ \Rightarrow$$

$$\begin{cases} pX(p)-1-3Y(p)+X(p)=0 \\ pY(p)-1-Y(p)-X(p)=\dfrac{1}{p-a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (p+1)X(p)-3Y(p)=1 \\ -X(p)+(p-1)Y(p)=\dfrac{1}{p-a}+1 \end{cases}$$

Решим систему при помощи определителей:

$$X(p)=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ Y(p)=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \text{где}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} p+1 & -3 \\ -1 & p-1 \end{vmatrix}=p^2-4,$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ \dfrac{1+p-a}{p-a} & p-1 \end{vmatrix}=p+2+\frac{3}{p-a}$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} p+1 & 1 \\ -1 & \dfrac{1+p-a}{p-a} \end{vmatrix}=p+3+\frac{a+1}{p-a}$$

Следовательно, $$X(p)=\frac{p+2}{p^2-4}+\frac{3}{(p-a)(p^2-4)}$$

$$Y(p)=\frac{p+3}{p^2-4}+\frac{a+1}{(p-a)(p^2-4)}.$$

Осталось перейти от изображений функций $X(p)$ и $Y(p)$ к их оригиналам. Для этого разложим дроби на элементарные или используем вторую теорему разложения: дробь $\dfrac{1}{(p-a)(p^2-4)}$ имеет три простых полюса: $p=a,\ p=2,\ p=-2$. Поэтому для нахождения оригинала используем формулу $f(t)=\sum\limits_{(p_k)}\dfrac{e^{pt}}{Q'(p)}$. Откуда

$$x(t)=e^{2t}+\frac{3e^{at}}{a^2-4}+\frac{3e^{2t}}{4(2-a)}+\frac{3e^{-2t}}{4(2+a)}$$

$$y(t)=\frac{5}{4}e^{2t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1+a}{a^2-4}e^{at}+\frac{1+a}{4(2+a)}e^{-2t}+\frac{1+a}{4(2-a)}e^{2t}.$$

Окончательно имеем:

$$x(t)=\frac{3e^{at}}{a^2-4}+\frac{3e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}$$
$$y(t)=\frac{(1+a)e^{at}}{a^2-4}-\frac{e^{-2t}}{4(2+a)}+\frac{(11-4a)e^{2t}}{4(2-a)}$$

Задача 20. Применяя формулу Дюамеля, решить дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях: $x''+x=\dfrac{1}{\cos^2 t+1}$ $x(0)=x'(0)=0$.

Решение. Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$x_1''+x_1=1 \quad x_1(0)=x_1'(0)=0$$

Применяя операционный метод, находим: $X_1(p)=\dfrac{1}{p}\cdot\dfrac{1}{(p^2+1)}$, откуда по свойству интегрирования оригинала $x_1(t)=\int\limits_0^t \sin t dt=-\cos t+1$.

Формула Дюамеля имеет вид: $x(t)=\int\limits_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau$, где $f(\tau)=\dfrac{1}{1+\cos^2\tau}$, $x_1'(t)=\sin t$. Поэтому

$$x(t)=\int\limits_0^t \frac{1}{1+\cos^2\tau}\cdot\sin(t-\tau)d\tau=\frac{\sin t}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sin t-\sqrt{2}}{\sin t+\sqrt{2}}\right|+$$
$$+\cos t\cdot arctg(\cos t)-\frac{\pi}{4}\cos t.$$