

Математика

Глава. Операционное исчисление

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

§1. Оригинал и изображение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $f(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Функция $f(t)$ называется **оригиналом**, если

- 1) $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ определены и непрерывны на \mathbb{R} за исключением может быть отдельных точек разрыва I рода, число которых на любом интервале конечно;
- 2) $f(t) = 0, \forall t < 0$;
- 3) $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$, где $M, s_0 - \text{const}$, $s_0 \geq 0$ (s_0 называют **порядком роста функции $f(t)$**).

ПРИМЕР. Единичная функция Хэвисайда:

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Замечание.

Если для функции $\varphi(t)$ выполняются условия 1 и 3 определения 1, то функция $\varphi(t) \cdot \eta(t)$ будет являться оригиналом.

В дальнейшем будем писать $\sin t$, $\cos t$ и т. д. подразумевая $\sin t \cdot \eta(t)$, $\cos t \cdot \eta(t)$ и т. д.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $f(t)$ – оригинал. **Изображением функции $f(t)$ (преобразованием Лапласа функции $f(t)$)** называется функция комплексного переменного $F(p)$, определяемая равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

ЗАПИСЫВАЮТ: $F(p) = L[f(t)]$, $F(p) \doteq f(t)$, $f(t) \doteq F(p)$.

ТЕОРЕМА.

Если $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0 , то его изображение $F(p)$ является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.

§2. Свойства преобразования Лапласа

Будем обозначать: $f(t)$, $g(t)$, $x(t)$, ... – оригиналы,
 $F(p)$, $G(p)$, $X(p)$, ... – их изображения.

1) Линейность изображения.

Если $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то $\alpha f(t) + \beta g(t)$ – оригинал
и
$$\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$$

2) Теорема подобия.

Справедливо утверждение: $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, $\forall \alpha > 0$

3) Теорема запаздывания (оригинала)

Справедливо утверждение: $f(t - \alpha) \doteq e^{-\alpha p} \cdot F(p)$

Замечание. Напомним, что

$$f(t) = f(t) \cdot \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ f(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

$$f(t - \alpha) = f(t - \alpha) \cdot \eta(t - \alpha) = \begin{cases} 0, & t - \alpha < 0; \\ f(t - \alpha), & t - \alpha \geq 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t - \alpha) = \begin{cases} 0, & t < \alpha; \\ f(t - \alpha), & t \geq \alpha. \end{cases}$$

4) Теорема сдвига (запаздывания изображения).

Справедливо утверждение: $F(p - \alpha) \doteq e^{\alpha t} \cdot f(t)$.

5) Дифференцирование оригинала

ТЕОРЕМА.

Если $f(t)$, $f'(t)$, ..., $f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то

$$f'(t) \doteq p \cdot F(p) - f(0),$$

$$f''(t) \doteq p^2 \cdot F(p) - p \cdot f(0) - f'(0),$$

$$f'''(t) \doteq p^3 \cdot F(p) - p^2 \cdot f(0) - p \cdot f'(0) - f''(0),$$

...

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(0) - p^{n-2} \cdot f'(0) - \dots - p \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0),$$

где $f^{(k)}(0) = \lim_{t \rightarrow +0} f^{(k)}(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)

6) Дифференцирование изображения

Справедливо утверждение:

$$F'(p) \doteq -t \cdot f(t) ,$$

$$F''(p) \doteq t^2 \cdot f(t) ,$$

$$F'''(p) \doteq -t^3 \cdot f(t) ,$$

.....

$$F^{(n)}(p) \doteq (-1)^{(n)} \cdot t^n \cdot f(t) .$$

7) Интегрирование оригинала

Если $f(t)$ – оригинал, то

$$g(t) = \int_0^t f(t) dt$$

тоже является оригиналом и справедливо утверждение:

$$\int_0^t f(t) dt \text{ J } \frac{F(p)}{p}$$

8) Интегрирование изображения

ТЕОРЕМА (об интегрировании изображения).

Пусть $f(t) \doteq F(p)$,

$$\int_p^\infty F(p) dp - \text{сходится абсолютно}$$

(путь интегрирования предполагается целиком лежащим в области аналитичности $F(p)$)

Тогда функция $\frac{f(t)}{t}$ является оригиналом и

$$\frac{f(t)}{t} \text{ J } \int_p^\infty F(p) dp$$

9) Умножение изображений

ТЕОРЕМА (Бореля, об умножении изображений).

Пусть $f(t)$, $g(t)$ – оригиналы,

$$f(t) \doteq F(p), \quad g(t) \doteq G(p).$$

Тогда функция $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

тоже является оригиналом и $\varphi(t) \doteq F(p) \cdot G(p)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ – оригиналы. *Интеграл*

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

называется **сверткой функций** $f(t)$ и $g(t)$.

ОБОЗНАЧАЮТ: $f(t) * g(t)$.

$$f(t) * g(t) = g(t) * f(t).$$

СЛЕДСТВИЕ (формула Дюамеля).

*Справедлива формула: $f'(t) * g(t) + f(0) \cdot g(t) \doteq p \cdot F(p) \cdot G(p)$.*

Т.е.

$$\int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau + f(0) \cdot g(t) \doteq p \cdot F(p) \cdot G(p) .$$

Таблица оригиналов и изображений

№	$f(t)$	$F(p)$
1	1	$\frac{1}{p}$
2	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
3	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^n e^{\alpha t}$	$\frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$
5	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$
6	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$

№	$f(t)$	$F(p)$
7	$e^{\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
8	$e^{\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p - \alpha}{(p - \alpha)^2 + \beta^2}$
9	$t \sin \beta t$	$\frac{2p\beta}{(p^2 + \beta^2)^2}$
10	$t \cos \beta t$	$\frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}$
11	$sh \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 - \beta^2}$
12	$ch \beta t$	$\frac{p}{p^2 - \beta^2}$

§3. Отыскание оригинала по изображению

Способ 1

ТЕОРЕМА (обращения).

Пусть $f(t)$ – оригинал, $f(t) \doteq F(p)$. Тогда в любой точке непрерывности функции $f(t)$ имеет место равенство

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(p) \cdot e^{pt} dp$$

где C – любая прямая $\operatorname{Re} p = a > s_0$.

Замечание.

$$\int_C F(p) \cdot e^{pt} dp = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{a-bi}^{a+bi} F(p) \cdot e^{pt} dp = \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

Способ 2

Изображение представляется в виде суммы более простых функций. Затем с помощью таблицы оригиналов и свойств преобразования Лапласа находят оригиналы для каждого слагаемого.

Способ 3

Изображение представляется в виде произведения двух изображений, оригиналы которых известны. Затем применяется теорема о свёртке.

Способ 4

ТЕОРЕМА (вторая теорема разложения).

Пусть функция $F(p)$ удовлетворяет условиям:

- 1) $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ (где s_0 – некоторое неотрицательное число);
- 2) в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s_0$ функция $F(p)$ имеет только конечное число полюсов p_1, p_2, \dots, p_n ;
- 3) $M(R) = \max_{p \in C_R} |F(p)| \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$

(где C_R – дуга окружности $|z| = R$, лежащая в полуплоскости $\operatorname{Re} p < s_0$);

- 4) интеграл $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i} F(p) \cdot e^{pt} dp$ сходится абсолютно для $\forall a > s_0$.

Тогда оригиналом для функции $F(p)$ является функция $f(t) \cdot \eta(t)$, где

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{p=p_k} [F(p) \cdot e^{pt}]$$

Замечание. Условиям этой теоремы удовлетворяют в частности функции вида

$$\frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \quad \text{и} \quad \frac{Q_m(p)}{Q_n(p)} \cdot e^{-\alpha p}$$

где $Q_m(p)$, $Q_n(p)$ – многочлены степени m и n соответственно, причем $m < n$.

Способ 5

ТЕОРЕМА (первая теорема разложения)

Если функция $F(p)$ аналитична в окрестности ∞ и ее ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид

$$F(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}$$

то оригиналом для функции $F(p)$ является функция

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1}$$

§4. Применение преобразования Лапласа

Метод решение задач математического анализа и других разделов математики с помощью преобразования Лапласа, называют *операционным исчислением*.

1. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

ПРИМЕР. Найти решение задачи Коши:

$$y' - y = 1, \quad y(0) = -1$$

В случае, если изображение для правой части $f(t)$ найти сложно, решение задачи

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= f(t), \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

можно выразить через решение задачи

$$\left. \begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= 1, \\ y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пусть $y(t)$ – решение уравнения (1), $y(t) \doteq Y(p)$;
 $y_1(t)$ – решение уравнения (2), $y_1(t) \doteq Y_1(p)$;
 $f(t) \doteq F(p)$;

тогда
$$Y(p) = p \cdot Y_1(p) \cdot F(p)$$

\Rightarrow по формуле Дюамеля

$$y(t) = y_1'(t) * f(t) = \int_0^t y_1'(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t y_1'(\tau) f(t-\tau) d\tau$$

2. Интегрирование систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

ПРИМЕР. Найти решение задачи Коши:

$$\begin{cases} x' + y = 2e^t, \\ y' + x = 2e^t; \end{cases}$$
$$x(0) = y(0) = 1.$$

3. Решение интегральных уравнений типа свертки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Уравнение вида

$$y(x) = f(x) + \int_0^x y(t) \cdot k(x-t) dt$$

где $f(x)$, $k(x)$ – известные функции, $y(x)$ – неизвестная функция, называется **интегральным уравнением типа свертки**.

Пусть $y(x)$, $f(x)$, $k(x)$ – оригиналы,

$$y(t) \doteq Y(p), \quad f(t) \doteq F(p), \quad k(t) \doteq K(p).$$

Тогда

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}.$$