

Математика

Глава. Теория функций комплексного переменного

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

§ 1. Комплексные числа

$$i = \sqrt{-1} \quad - \text{мнимая единица}$$

$$i^2 = -1$$

$$z = a + bi \quad - \text{комплексное число},$$

где a и b – действительные числа.

$$a = \operatorname{Re} z \quad - \text{действительная часть} \text{ комплексного числа}$$

$$b = \operatorname{Im} z \quad - \text{мнимая часть} \text{ комплексного числа}$$

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называются **комплексно сопряженными**.

Если $a = 0$, то число называют **чисто мнимым**.

Если $b = 0$, то число является действительным

$\Rightarrow$ множество действительных чисел является подмножеством множества комплексных чисел.

Множество комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

Действия над комплексными числами

Пусть $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$.

1. Сложение и вычитание.

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + b_1i) \pm (a_2 + b_2i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$$

2. Умножение.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) = a_1a_2 + b_1a_2i + a_1b_2i + b_1b_2i^2 = \\ &= (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i \end{aligned}$$

3. Деление.

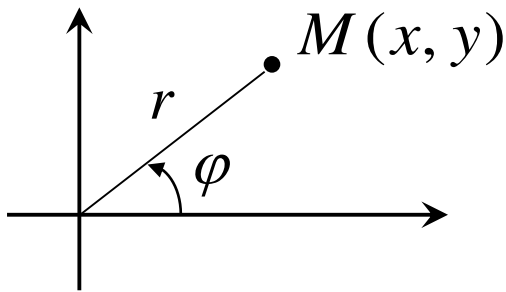
$$\begin{aligned} z_1 : z_2 &= \frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{(a_1 + b_1i)(a_2 - b_2i)}{(a_2 + b_2i)(a_2 - b_2i)} = \frac{a_1a_2 + b_1a_2i - a_1b_2i - b_1b_2i^2}{a_2^2 - b_2^2i^2} = \\ &= \frac{a_1a_2 + a_2b_2 + (b_1a_2 - a_1b_2)i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(b_1a_2 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}i \end{aligned}$$

Различные формы записи комплексных чисел

1. *Алгебраическая форма записи:* $z = x + yi$

2. *Тригонометрическая форма записи.*

Представим число $z = x + yi$ в виде точки $M(x, y)$ на плоскости:



Введём полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\Rightarrow z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Модуль комплексного числа: $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

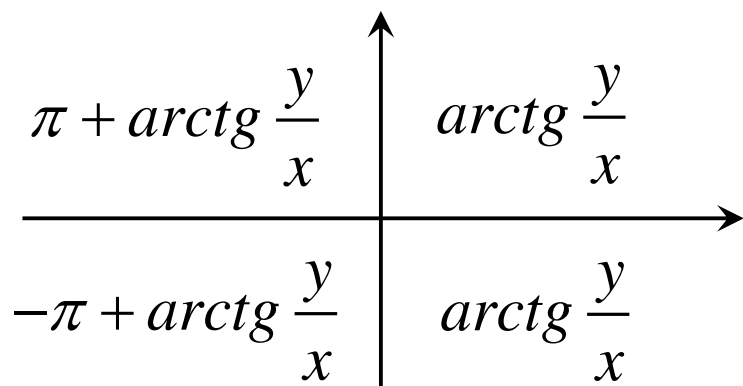
Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

Главное значение аргумента: $\operatorname{arg} z$ $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$
 $(0 \leq \operatorname{arg} z < 2\pi)$

Для $z = 0$ аргумент не определён.

Как найти аргумент комплексного числа?

$$\begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$



$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y > 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если } x < 0, y < 0 \end{cases}$$

3. Показательная форма записи.

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow z = re^{i\varphi}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме записи

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$
 $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

1. Умножение.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 i \sin \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{формула Муавра}$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной форме записи

Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$
 $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$

2. Деление.

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Извлечение корней из комплексных чисел

Пусть n – натуральное число.

Определение. Комплексное число w называется **корнем n -ой степени** из числа z , если $z = w^n$.

$$w = \sqrt[n]{z}$$

Пусть $z = re^{i\varphi}$
 $w = \rho e^{i\psi}$

$$\text{Но } z = w^n \Rightarrow re^{i\varphi} = \rho^n e^{in\psi} \Rightarrow \begin{aligned} \rho^n &= r \\ n\psi &= \varphi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow$$

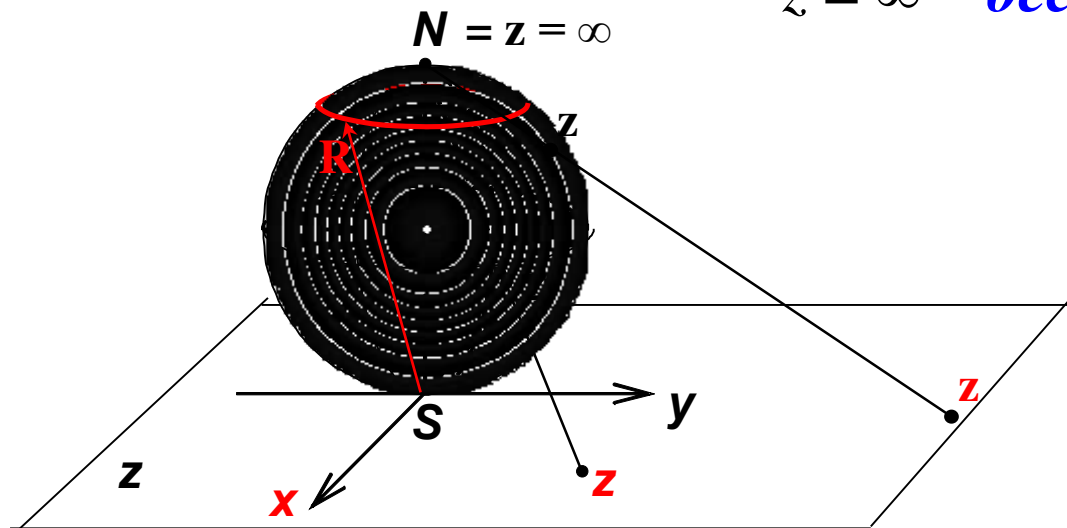
$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt[n]{r} \\ \psi &= \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

Для любого $z \neq 0$ корень n -ой степени из числа z имеет ровно n различных корней.

Сфера Римана и $z = \infty$

$z = \infty$ — *бесконечно удалённая точка*



Комплексная плоскость с
присоединенной
бесконечно удаленной
точкой называется
расширенной
комплексной плоскостью.

Изображается сферой
Римана.

Окрестностью бесконечно удаленной точки $z = \infty$ называется внешность круга с центром в точке 0 радиуса R , то есть множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R$.

ε -окрестность

$$R = \frac{1}{\varepsilon}$$

§ 2. Понятие функции комплексного переменного

Пусть D – произвольное множество в комплексной плоскости.

Определение. Если каждому комплексному числу $z \in D$ поставлено в соответствие некоторое комплексное число w , то говорят, что на D определена **однозначная функция** комплексного переменного z .

Если же каждому $z \in D$ соответствует несколько значений w , то говорят, что на D определена **многозначная функция** комплексного переменного z .

$$w = f(z)$$

Примеры.

1. $f(z) = |z|$ – однозначная функция.
2. $f(z) = \operatorname{Arg} z$ – многозначная функция.

Пусть задана функция $w = f(z)$.

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то

$$u = u(x,y) , \quad v = v(x,y) .$$

Тогда $f(x + iy) = u(x,y) + i v(x,y)$.

Таким образом, задание функции комплексного переменного равносильно заданию двух функций действительных переменных $u(x,y)$ и $v(x,y)$.

Функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ называются соответственно **действительной** и **мнимой частью функции** $f(z)$.

Обозначают: $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$.

Пример.

$$f(z) = z^2$$

Основные элементарные функции комплексного переменного

Пусть $z = x + iy$.

1. Показательная.

$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Если z — действительное число, то

$$y = 0 \Rightarrow w = e^z = e^x (\cos 0 + i \sin 0) = e^x \Rightarrow$$

показательная функция комплексного переменного совпадает с показательной функцией действительного переменного.

Если z — чисто мнимое число, то

$$x = 0 \Rightarrow w = e^{iy} = e^0 (\cos y + i \sin y) = \cos y + i \sin y \Rightarrow$$

получили формулу Эйлера.

Свойства показательной функции.

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$

2. $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$

3. $(e^z)^n = e^{zn}$ (n – натуральное число)

4. $e^z \neq 0$ для всех z

~~5. $e^z > 0$~~ **Неверно!**

5. $w = e^z$ – периодическая функция с периодом $T = 2\pi i$

Примеры.

1. e^2

2. $e^{1+\pi/3i}$

2. Логарифмическая функция.

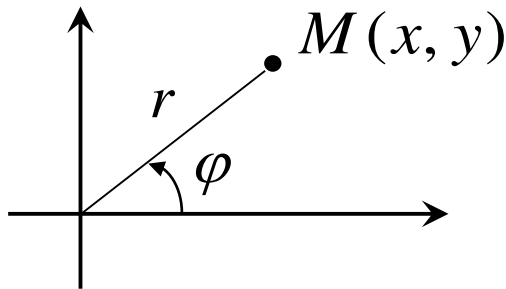
$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Логарифмическая функция обратна показательной $\Rightarrow$

w — **логарифм** числа z , если $e^w = z$.

$$w = \operatorname{Ln} z \quad z \neq 0 \quad (\text{так как } e^w \neq 0)$$

Пусть $w = u + iv \Rightarrow z = e^w = e^{u+iv} = e^u (\cos v + i \sin v)$



Введём полярную систему координат:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\Rightarrow z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Модуль комплексного числа: $|z| = r$

Аргумент комплексного числа: $\operatorname{Arg} z = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |z| = e^u &\Rightarrow u = \ln |z| \\ v = \operatorname{Arg} z &\Rightarrow \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \end{aligned}$$

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k) \quad k \in \mathbb{Z}$$

Логарифмическая функция имеет бесконечно много значений, то есть многозначная функция.

При $k = 0$ получаем однозначную функцию, называемую **главным значением логарифма**: $\ln z = \ln |z| + i \arg z$

Примеры.

1. $\operatorname{Ln} e$
2. $\operatorname{Ln}(-1)$

Свойства логарифмической функции.

1. $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln}(z_1) + \operatorname{Ln}(z_2)$
2. $\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln}(z_1) - \operatorname{Ln}(z_2)$
3. $\operatorname{Ln} z^n = n \cdot \operatorname{Ln} z$
4. $\operatorname{Ln} \sqrt[n]{z} = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{Ln} z$

3. Степенная функция.

Пусть a – комплексное число. Как задать $w = z^a$?

1. $a = n$ – натуральное число

$$w = z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad \text{формула Муавра}$$

2. $a = 1/n$, где n – натуральное число

$$w = z^{1/n} = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

3. $a = m/n$, где m и n – натуральные числа

$$w = z^{m/n} = (z^{1/n})^m = \sqrt[n]{|z|^m} \left(\cos \frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n} + i \sin \frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n} \right)$$
$$k = 0, 1, \dots, n-1$$

4. a – произвольное комплексное число

$$e^{\operatorname{Ln} z} = z \quad \Rightarrow \quad z^a = e^{\operatorname{Ln} z^a} \Rightarrow \text{по свойству логарифма}$$

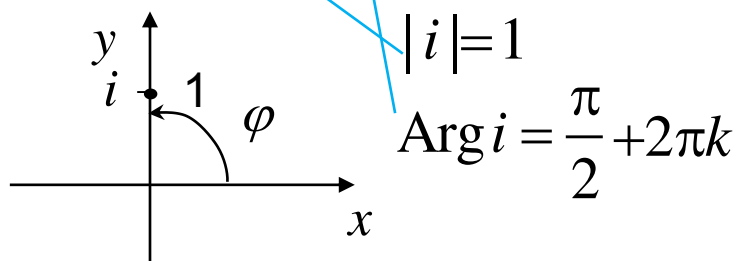
$$w = z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}$$

Пример.

$$w = i^i$$

$$i^i = e^{i \cdot \text{Ln} i} = e^{i \cdot i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)}$$

$$\text{Ln} i = \ln |i| + i \text{Arg} i = \ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$$



$$z^a = e^{a \cdot \text{Ln} z}$$

$$\text{Ln} z = \ln |z| + i \text{Arg} z$$

Другой вариант решения

$$i^i = \left(e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} \right)^i = e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \cdot i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)}$$

$$i = 1 \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)} = e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)}$$

$$z = r e^{\varphi i}$$

4. Тригонометрические функции.

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Пусть z – действительное число.

$$e^{iz} = e^0 (\cos z + i \sin z) = \cos z + i \sin z$$

$$e^{-iz} = e^0 (\cos(-z) + i \sin(-z)) = \cos z - i \sin z$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

Свойства тригонометрических функций.

1. Тригонометрические функции комплексного переменного в случае, когда комплексное число является действительным, совпадают с тригонометрическими функциями действительного переменного.
2. Синус является нечётной функцией, а косинус – чётной. Тангенс и котангенс – нечётные функции.
3. Все известные из тригонометрии формулы сохраняются и для функций комплексного переменного.

4. Синус и косинус – периодические функции с периодом $T = 2\pi$.
Тангенс и котангенс – периодические с периодом $T = \pi$.

$$\begin{aligned} |\cos z| &\leq 1 \\ |\sin z| &\leq 1 \end{aligned}$$

Неверно!

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \cos z = \infty$$

$$\lim_{\operatorname{Im} z \rightarrow \pm\infty} \sin z = \infty$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

5. Гиперболические функции.

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$$

$$\operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$$

Гиперболические функции также периодические: гиперболические синус и косинус имеют период $T = 2\pi i$, а тангенс и котангенс – период $T = \pi i$.

Существует связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями:

$$\operatorname{sh} iz = i \cdot \sin z$$

$$\operatorname{ch} iz = \cos z$$

$$\operatorname{th} iz = i \cdot \operatorname{tg} z$$

$$\operatorname{cth} iz = -i \cdot \operatorname{ctg} z$$

6. Обратные тригонометрические функции.

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} \left(iz + \sqrt{1 - z^2} \right)$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln} \left(z + \sqrt{z^2 - 1} \right)$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{1 + iz}{1 - iz} \right)$$

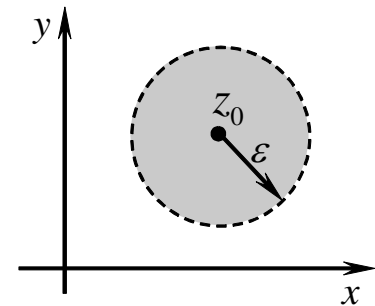
$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \left(\frac{iz - 1}{iz + 1} \right)$$

Все обратные тригонометрические функции – многозначные.

§ 3. Предел, непрерывность и дифференцируемость функции комплексного переменного

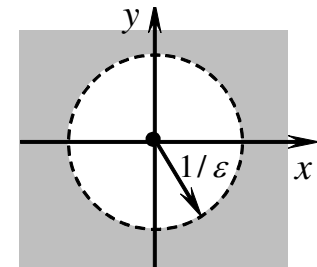
ε -окрестность числа z_0 — это внутренность круга с центром в точке z_0 радиуса ε

$$|z - z_0| < \varepsilon$$



ε -окрестность бесконечно удаленной точки $z = \infty$ — это внешность круга с центром в точке 0 радиуса $1/\varepsilon$

$$|z| > \frac{1}{\varepsilon}$$



Определение. Комплексное число w_0 называется *пределом функции $f(z)$* в точке z_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого $z \neq z_0$ из δ -окрестности z_0 число $f(z)$ принадлежит ε -окрестности w_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ существует} \Leftrightarrow \text{существуют}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} u(x, y) = u_0 \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v(x, y) = v_0$$

Свойства пределов.

1. $\lim_{z \rightarrow z_0} (c \cdot f(z)) = c \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
2. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) + \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$
3. $\lim_{z \rightarrow z_0} (f_1(z) \cdot f_2(z)) = \lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z) \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)$
4. $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f_1(z)}{f_2(z)} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} f_1(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} f_2(z)}$

Пусть функция $f(z)$ определена в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и некоторой её окрестности.

Определение. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в точке** z_0 , если справедливо равенство

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Определение. Функция $f(z)$ называется **непрерывной в области** D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$$

$$z_0 = x_0 + iy_0$$

Теорема. Функция $f(z)$ непрерывна в точке $z_0 \Leftrightarrow$ функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0) .

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена в некоторой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и некоторой её окрестности.

Определение. *Производной функции* $w = f(z)$ *в точке* z называется предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

(если он существует и конечен).

Определение. Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z , если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно Δz части и бесконечно малой более высокого порядка чем Δz , то есть

$$\Delta w = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

где A — комплексное число, α — бесконечно малая при $\Delta z \rightarrow 0$.

Слагаемое $A \cdot \Delta z$ называют *дифференциалом функции* $w = f(z)$ *в точке* z и обозначают: $dw(z)$ или $df(z)$.

Теорема (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z \Leftrightarrow \exists f'(z)$.

При этом для её дифференциала в точке z справедливо равенство $df(z) = f'(z) \cdot \Delta z$.

Функция $w = f(z)$ дифференцируемая в точке z :

$$\Delta w = A \cdot \Delta z + \alpha \cdot \Delta z,$$

где A – комплексное число, α – бесконечно малая при $\Delta z \rightarrow 0$.

$$f'(z) \quad \quad \quad df(z)$$

Пусть $w = z$. Найдём $dw = dz$.

$$dz = \Delta z \Rightarrow df(z) = f'(z) \cdot \Delta z = f'(z) \cdot dz \Rightarrow f'(z) = \frac{df(z)}{dz}$$

Производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного.

Замечание. Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует её непрерывность в этой точке. Обратное утверждение **неверно**.

Теорема (необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции).

Если функция $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки z , причём в этой точке действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, то $w = f(z)$ дифференцируема в $z \Leftrightarrow$ выполняются равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

**условия Коши-Римана
(Эйлера-Даламбера)**

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

Пример.

$$f(z) = z^2$$

$$f'(z) = ?$$

Свойства производных.

1. $(c \cdot f(z))' = c \cdot f'(z)$

2. $(f_1(z) + f_2(z))' = f_1'(z) + f_2'(z)$

3. $(f_1(z) \cdot f_2(z))' = f_1'(z) \cdot f_2(z) + f_1(z) \cdot f_2'(z)$

4.
$$\left(\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right)' = \frac{f_1'(z) \cdot f_2(z) - f_1(z) \cdot f_2'(z)}{f_2^2(z)}$$

5. Если $\varphi(z)$ дифференцируема в точке z_0 , а $f(w)$ дифференцируема в точке $w_0 = \varphi(z_0)$, то

$$(f(\varphi(z)))' = f'_\varphi \cdot \varphi'_z$$

6. Если в некоторой точке z функция $f(z)$ дифференцируема и существует функция $f^{-1}(w)$, дифференцируемая в точке $w = f(z)$, причём $(f^{-1}(w))' \neq 0$, то

$$f'(z) = \frac{1}{(f^{-1}(w))'}, \quad f^{-1}(w) - \text{функция, обратная к } f(z)$$

Теорема (о дифференцируемости основных элементарных функций комплексного переменного).

Функции $w = e^z$, $w = \sin z$, $w = \cos z$, $w = \operatorname{sh} z$, $w = \operatorname{ch} z$, $w = z^n$ (где n – натуральное число) дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости.

Функции $w = \operatorname{tg} z$ и $w = \operatorname{th} z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $z = \pi/2 + \pi k$ и $z = (\pi/2 + \pi k) \cdot i$ соответственно ($k \in \mathbf{Z}$).

Функции $w = \operatorname{ctg} z$ и $w = \operatorname{cth} z$ дифференцируемы в любой точке комплексной плоскости, кроме точек $z = \pi k$ и $z = \pi k i$ соответственно ($k \in \mathbf{Z}$).

Для функций $w = \operatorname{Ln} z$ и $w = z^a$ в окрестности каждой точки $z \neq 0$ можно выделить однозначную ветвь, которая является дифференцируемой в точке z .

Определение. Функция $f(z)$ называется **аналитической в точке** z_0 , если она дифференцируема в этой точке и во всех точках некоторой окрестности точки z_0 .

Функция $f(z)$ называется **аналитической в области** D , если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Замечание. Условия дифференцируемости и аналитичности в области совпадают. Но в точке условие аналитичности более сильное, чем условие дифференцируемости.

Функция аналитична в некоторой области $\Leftrightarrow$
её действительная и мнимая части дифференцируемы и
удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Определение. Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются **правильными** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми** точками этой функции.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \quad \text{уравнение Лапласа}$$

Функции $f(x,y,z)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа называются **гармоническими**.

Частный случай уравнения Лапласа:
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Пусть функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ аналитична в некоторой области $\Rightarrow$ её действительная и мнимая части $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} &\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} &\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow$$

$u(x,y) - \text{гармоническая функция}$

Аналогично показывается, что функция $v(x,y)$ также является гармонической.

Если функция аналитична в некоторой области, то её действительная и мнимая части являются гармоническими функциями.

Пример. Выяснить, существует ли аналитическая функция, у которой действительная часть $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2$.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \Rightarrow |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

$|\Delta z|$ – расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$

$|\Delta w|$ – расстояние между точками w_0 и $w_0 + \Delta w$

Величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

$|f'(z)| > 1 \Rightarrow$ растяжение

$|f'(z)| < 1 \Rightarrow$ сжатие

$$\begin{aligned}
 f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} &\Rightarrow \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \arg \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w - \arg \Delta z) = \\
 &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w) - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta z) = \alpha_2 - \alpha_1 \\
 \Rightarrow \alpha_2 &= \alpha_1 + \arg f'(z_0)
 \end{aligned}$$

Величина $\arg f'(z_0)$ определяет угол поворота в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

$$\alpha'_2 = \alpha'_1 + \arg f'(z_0) \Rightarrow \text{углы сохраняются}$$

Функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$.

$|f'(z_0)|$ – коэффициент растяжения

$\arg f'(z_0)$ – угол поворота

} не зависят от выбора
кривой, проходящей
через точку z_0

Определение. Отображение $w = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений, называется **конформным** (то есть отображением, сохраняющим форму).

Отображение $w = f(z)$ конформно в некоторой области $\Leftrightarrow$ функция $w = f(z)$ аналитична в этой области и $f'(z) \neq 0$ во всех точках этой области.

Пример.

Выяснить геометрическую картину отображения $w = 2z$.

§ 3. Интегрирование функции комплексного переменного

Пусть L – некоторая гладкая кривая в комплексной плоскости.

Выберем на L направление:

- а) a – начало, b – конец, если L не замкнутая;
- б) против часовой стрелки, если L – замкнутая.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определенная на L .

1. Разобьем кривую L произвольным образом на n частей точками $z_0 = a, z_1, \dots, z_n = b$ в направлении от a к b .
2. На каждой дуге $(z_{k-1} z_k)$ выберем произвольную точку C_k и вычислим произведение $f(C_k) \cdot \Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta z_k$$

интегральная сумма для функции $f(z)$ по кривой L

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} |\Delta z_k|$$

Определение. Если существует предел интегральных сумм S_n при $\lambda \rightarrow 0$, не зависящий от разбиения кривой и выбора точек C_k , то его называют *интегралом от функции $f(z)$ по кривой (по контуру) L* .

Обозначают: $\int_L f(z) dz, \quad \oint_L f(z) dz$

Свойства интегралов.

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta z_k$$

1. $\int_L dz = b - a$

2. $\int_L c \cdot f(z) dz = c \cdot \int_L f(z) dz$, c — комплексное число

3. $\int_L [f_1(z) + f_2(z)] dz = \int_L f_1(z) dz + \int_L f_2(z) dz$

4. $\int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz$

5. Если кривая AB разбита точкой K на две части AK и KB , то

$$\int_{AB} f(z) dz = \int_{AK} f(z) dz + \int_{KB} f(z) dz$$

6. Если во всех точках кривой L выполняется неравенство $|f(z)| < M$, то $\left| \int_L f(z) dz \right| \leq M \cdot \ell$, где ℓ — длина кривой L .

Теорема 1 (существования интеграла).

Если L – гладкая кривая, а функция $f(z)$ – непрерывная и однозначная функция на L , то $f(z)$ интегрируема по кривой L и справедливо равенство

$$\int_L f(z)dz = \int_L u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_L v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ – действительная и мнимая часть функции $f(z)$.

Замечание.

1. Вычисление интеграла от функции комплексного переменного сводится к вычислению двух криволинейных интегралов 2-го рода.
2. Формулу из теоремы можно записать в более удобном для запоминания виде:

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy)$$

$$\int_L f(z)dz = \int_L (u + iv)(dx + idy)$$

Теорема 2.

Если гладкая кривая AB задана параметрическими уравнениями
 $x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \text{где } \alpha \leq t \leq \beta \quad (A \leftrightarrow \alpha, \quad B \leftrightarrow \beta),$
 и функция $f(z)$ интегрируема по кривой AB , то справедливо равенство

$$\int_{AB} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \cdot z'(t)dt,$$

Замечание.

Часто в качестве параметра выбирается угол $\varphi = \arg z$.

Пример. $\int_L \bar{z}dz$

1. L — прямая от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$

2. L — дуга окружности $|z| = 1$ от $z_1 = -1$ до $z_2 = 1$

Интегрирование аналитических функций

Вспомним:

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной (нет вырезанных кусочков) области $D \subset Oxy$.

Следующие условия эквивалентны:

1) интеграл $\int_{\ell} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

не зависит от линии интегрирования;

2) $\oint_{\ell} Pdx + Qdy = 0 \quad \forall \ell \subset D$

3) справедливо равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

4) выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, то есть

$$du = Pdx + Qdy .$$

Теорема (Коши, для односвязной области).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от этой функции по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру (ℓ) , целиком лежащему в D , равен нулю.

Замечания.

1) Порядком связности области называется число связных частей, на которые разбивается ее граница.

2) Утверждение, обратное теореме Коши, тоже справедливо.

Если $f(z)$ непрерывна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ и для любого кусочно-гладкого замкнутого контура $(\ell) \subset D$ выполняется условие

$$\oint_{(\ell)} f(z) dz = 0,$$

то $f(z)$ аналитична в D (*теорема Морера*).

Теорема (о независимости интеграла от аналитической функции от формы кривой).

Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то $\forall A, B \in D$ интеграл $\int_{AB} f(z) dz$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B .

Пусть G — $(n+1)$ -связная область, $(\ell), (\ell_1), \dots, (\ell_n)$ — ее границы.
 (ℓ) — внешняя граница G ,
 $(\ell_1), \dots, (\ell_n)$ — внутренние границы G .

Теорема (Коши для многосвязной области).

Пусть кривые $(\ell), (\ell_1), \dots, (\ell_n)$ — кусочно-гладкие, не пересекающиеся и ни одна из областей, ограниченных (ℓ_i) не содержит кривой (ℓ_j) .

Если $f(z)$ аналитична в области G и на ее границах, то

$$\oint_{+(\ell)} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{+(\ell_k)} f(z) dz.$$

Первообразная аналитической функции. Неопределенный интеграл

Определение. Функция $F(z)$ называется **первообразной функции** $f(z)$ на множестве D , если $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in D$.

Пусть $f(z)$ аналитическая в односвязной области D , $z_0, z \in D$.

Тогда интеграл $\int_{z_0}^z f(z)dz$

не зависит от формы кривой, соединяющей z_0 и z .

$\Rightarrow$ Если z_0 фиксировано, то $\int_{z_0}^z f(z)dz$ — функция от z .

Теорема (о существовании первообразной).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$.

Тогда $\int_{z_0}^z f(z)dz$ является первообразной функции $f(z)$ в D .

Теорема (о количестве первообразных).

Любые две первообразные для одной аналитической функции отличаются на константу.

Определение. Множество всех первообразных функции $f(z)$ называют **неопределенным интегралом** от функции $f(z)$ и обозначают

$$\int f(z)dz$$

Следствие.

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то ее неопределенный интеграл может быть записан в виде

$$\int f(z)dz = \int_{z_0}^z f(z)dz + C$$

где C – произвольная постоянная ($C \in \mathbb{C}$), а интеграл берется вдоль любой кривой в D , соединяющей точки z_0 и z .

Теорема (формула Ньютона – Лейбница для интеграла от аналитической функции).

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, то интеграл от $f(z)$ не зависит от формы кривой, соединяющей точки z_1 и z_2 , и справедлива формула:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

где $F(z)$ – некоторая первообразная функции $f(z)$.

Примеры.

1. $\int_L 3z^2 dz$, L – прямая от $z_1 = 0$ до $z_2 = 1 + i$
2. $\oint_L \frac{dz}{z - z_0}$, L – окружность радиуса R с центром в точке z_0

Интегральная формула Коши

Теорема (интегральная формула Коши).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D , содержащей в себе свою границу L . Тогда имеет место формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

где $z_0 \in D$ – любая точка внутри области D , а интегрирование производится в положительном направлении (то есть против часовой стрелки).

Интеграл в правой части называется *интегралом Коши*, а сама формула – *интегральной формулой Коши*.

Замечание. Интегральная формула Коши позволяет находить значение аналитической функции в любой точке области, зная значение на её границе.

Следствие (теорема о производных высших порядков аналитической функции).

Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области D , содержащей в себе свою границу L . Тогда внутри этой области $f(z)$ имеет производные любого порядка, причем для них справедлива формула

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}$$

где z_0 — любая точка внутри области D .

Замечание. Полученные формулы можно использовать для вычисления интегралов по замкнутым областям.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} \Rightarrow$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$\oint_L \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

Примеры.

1. $\oint_L \frac{dz}{z^2 + 4}$ а) L – окружность $|z| = 1$;
 б) L – окружность $|z - i| = 2$.

2. $\oint_L \frac{\cos z dz}{z^3}$, L – окружность $|z| = 1$.

§ 4. Ряды в комплексной плоскости

Пусть задана последовательность комплексных чисел $\{u_n\}$.

Определение. Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называют **комплексным числовым рядом**.

Если $u_n = a_n + ib_n$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Построим последовательность

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad \dots, \quad S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n, \quad \dots$$

Числа $S_1, S_2, \dots, S_n$ называют **частичными суммами ряда** $\sum u_n$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n a_k + i \sum_{k=1}^n b_k$$

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **сходящимся**, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм $\{ S_n \}$. При этом, число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

называют **суммой ряда** $\sum u_n$.

Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \nexists)$$

то говорят, что ряд $\sum u_n$ **расходится** и не имеет суммы.

Теорема.

Ряд $\sum u_n = \sum (a_n + ib_n)$ сходится к $S = S_1 + iS_2 \Leftrightarrow$ сходятся ряды $\sum a_n$, $\sum b_n$, причем S_1 – сумма ряда $\sum a_n$, S_2 – сумма ряда $\sum b_n$.

Замечания.

- 1) Исследование сходимости ряда с комплексными членами сводится к исследованию сходимости двух рядов с действительными членами.
- 2) В теории рядов с комплексными членами основные определения, многие теоремы и их доказательства аналогичны соответствующим определениям и теоремам из теории рядов с действительными членами.

Теорема (признак абсолютной сходимости)

Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называют *абсолютно сходящимся*, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.

Если ряд $\sum u_n$ — сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ — расходится, то ряд $\sum u_n$ называют *условно сходящимся*.

Степенные ряды

Степенным рядом (рядом по степеням $z-z_0$) в комплексной плоскости называется ряд вида

$$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots + a_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

где $z_n, z_0 \in \mathbb{C}$. Числа a_n называются **коэффициентами степенного ряда**, $z = x + iy$ – комплексная переменная.

Частный случай степенного ряда – **ряд по степеням z** :

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Будем изучать ряд $\sum a_n z^n$. На общий случай результаты переносятся заменой $t = z - z_0$.

Степенной ряд $\sum a_n z^n$ всегда сходится в точке $z = 0$.

Теорема (Абеля).

- 1) Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ сходится в точке $z_1 \neq 0$, то он сходится абсолютно в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z| < |z_1|$;
- 2) Если степенной ряд $\sum a_n z^n$ расходится в точке z_2 , то он расходится в любой точке z , удовлетворяющей условию $|z| > |z_2|$.

Из теоремы Абеля $\Rightarrow \exists R > 0$ такое, что ряд $\sum a_n z^n$ сходится (абсолютно) при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$.

Число R называют **радиусом сходимости** ряда $\sum a_n z^n$.

Круг $|z| < R$ называют **кругом сходимости** ряда $\sum a_n z^n$.

Радиус сходимости находится по признаку Даламбера или признаку Коши.

Примеры.

Исследовать ряды на сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}$

Свойства степенных рядов.

1. Сумма степенного ряда внутри круга его сходимости является аналитической функцией.

2. Степенной ряд внутри круга сходимости можно почленно дифференцировать и почленно интегрировать любое число раз.

Полученный при этом ряд имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.

Ряд Тейлора

Напомним: говорят, что функция $f(x)$ *разложима в ряд*, если $\exists$ функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого является $f(x)$.

Определение. Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в окрестности точки z_0 . *Рядом Тейлора функции $f(z)$ в окрестности точки z_0* (по степеням $z - z_0$) называется степенной ряд вида

$$f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

Теорема (о разложении функции комплексного переменного в степенной ряд).

Если функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| < R$, то она разлагается в этом круге в степенной ряд, причем этот ряд – ее ряд Тейлора, то есть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

для любых z таких, что $|z - z_0| < R$.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Из интегральной формулы Коши следует, что коэффициенты разложения в ряд Тейлора могут быть найдены по следующим формулам:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{n+1}}$$

где L — произвольная окружность с центром в точке z_0 , лежащая внутри круга $|z - z_0| < R$.

Замечание. Разложения в ряд Маклорена для функций

$$e^x, \sin x, \cos x, \operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x, \ln(1+x), \frac{1}{1+x}, \frac{1}{1-x}$$

остаются справедливыми и в комплексном случае.

На всей комплексной плоскости:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

На окружности $|z| < 1$:

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$$

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Ряд Лорана

Теорема (о разложении функции в ряд Лорана).

Всякая функция $f(z)$, аналитическая в кольце $r < |z - z_0| < R$, может быть разложена в этом кольце в ряд

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t)dt}{(t - z_0)^{n+1}},$

L – любая окружность с центром в точке z_0 , лежащая в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Этот ряд называется *рядом Лорана* функции $f(z)$ *в точке z_0* (по степеням $z - z_0$).

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)^1} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)^1} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \text{ — правильная часть ряда Лорана.}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} \text{ — главная часть ряда Лорана.}$$

Замечания.

- 1) Правильная часть ряда Лорана сходится внутри круга $|z - z_0| < R$.
- 2) Главная часть ряда Лорана сходится во внешности круга $|z - z_0| > r$.

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$.
Рассмотрим главную часть ряда Лорана этой функции:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(t) dt}{(t - z_0)^{-n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(t) (t - z_0)^{n-1} dt$$

Но функция $f(t)(t - z_0)^{n-1}$ – аналитическая для всех $n \Rightarrow$
интеграл от этой функции по замкнутому контуру равен 0 $\Rightarrow$
 $c_{-n} = 0$ для всех $n \Rightarrow$
главная часть ряда Лорана равна 0 $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \Rightarrow \text{получили разложение в ряд Тейлора}$$

Если функция $f(z)$ не имеет особых точек внутри круга $|z - z_0| < R$,
то её разложение в ряд Лорана обращается в ряд Тейлора

Разложение в ряд Лорана производится в кольце $r < |z - z_0| < R$.

Замечания.

- 1) Допускается $r = 0$ (ряд сходится в проколотой окрестности точки z_0) и $R = +\infty$ (ряд сходится во внешности круга $|z - z_0| > r$).
- 2) Если $r \geq R$, то ряд Лорана расходится на всей комплексной плоскости.

Коэффициенты ряда Лорана чаще всего находят используя уже готовые разложения.

Пример.

Разложить в ряд Лорана в точке $z_0 = 0$ (то есть по степеням z).

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Рассмотрим ряд Лорана функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Обозначим $t = \frac{1}{z} \Rightarrow f(z) = f\left(\frac{1}{t}\right)$.

Тогда разложение в ряд Лорана функции $f(1/t)$ в точке $t = 0$:

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{t^n} \Rightarrow$$

главная часть
правильная часть

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

разложение в **ряд Лорана**
функции $f(z)$ **в точке $z = \infty$**

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} \quad \text{правильная часть}$$

ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n \quad \text{главная часть}$$

ряда Лорана

Замечание. По внешнему виду ряд Лорана для $z = \infty$ совпадает с рядом Лорана для $z = 0$.

§ 5. Изолированные особые точки

Нули аналитической функции

Определение. Точка z_0 , принадлежащая области определения функции $f(z)$, называется **нулём функции** $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

В области аналитичности функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 функция может быть представлена рядом Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0)^1 + c_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

$$c_0 = f(z_0) \Rightarrow \boxed{\text{если } z_0 \text{ нуль функции } f(z), \text{ то } c_0 = 0}$$

Если не только $c_0 = 0$, но и $c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$, а $c_m \neq 0$, то разложение функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеет вид:

$$f(z) = c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots$$

При этом z_0 называется **нулём кратности m** или **нулём m -го порядка**. Если $m = 1$, то z_0 называется **простым нулём**.

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0, \quad c_m \neq 0$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Теорема 1. Точка z_0 является нулём порядка m аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

$$\begin{aligned} f(z) &= c_m (z - z_0)^m + c_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \dots = \\ &= (z - z_0)^m (c_m + c_{m+1} (z - z_0) + \dots) = (z - z_0)^m \varphi(z) \end{aligned}$$

$$c_m \neq 0 \Rightarrow \varphi(z_0) = c_m \neq 0$$

Теорема 2. Точка z_0 является нулём порядка m аналитической функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда

$$f(z) = (z - z_0)^m \varphi(z),$$

где $\varphi(z)$ – функция аналитическая в точке z_0 , причём $\varphi(z_0) \neq 0$.

Примеры.

Указать порядок нуля $z_0 = 0$ функции $f(z)$:

а) $f(z) = z - \sin z$; *б)* $f(z) = z^2 \cdot \cos z$; *в)* $f(z) = e^{z^2} - 1 - z^2$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Способы нахождения порядка нуля функции:

- 1.** Нахождение производных (теорема 1).
- 2.** Представление функции в виде $(z - z_0)^m \varphi(z)$ (теорема 2).
- 3.** Разложение в ряд Тейлора.

Определение. Бесконечно удаленная точка $z = \infty$ называется **нулём функции** $f(z)$, если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

При этом функцию $f(z)$ доопределяют равенством $f(z) = 0$.

Порядок нуля можно определить как порядок нуля функции $f(1/t)$ в точке $t = 0$, то есть сделав замену $z = 1/t$.

Если $t = 0$ – нуль кратности m , то $f(1/t) = c_{-m}t^m + c_{-(m+1)}t^{m+1} + \dots$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{c_{-m}}{z^m} + \frac{c_{-(m+1)}}{z^{m+1}} + \dots = \frac{\varphi(z)}{z^m}, \text{ где } \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_{-m} \neq 0.$$

Пример.

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2z} \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

3 способа

Изолированные особые точки

Определение. Точки, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются **правильными** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ не является аналитической, называются **особыми** точками этой функции.

Определение. Точка z_0 называется **изолированной особой точкой функции** $f(z)$, если в некоторой ее окрестности нет других особых точек функции $f(z)$.

Если z_0 — изолированная особая точка функции $f(z)$, то существует такое число $R > 0$, что в кольце $0 < |z - z_0| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической $\Rightarrow$ разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

**правильная
часть**

**главная
часть**

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

*правильная
часть*

*главная
часть*

Определение. Если ряд Лорана не содержит главной части, то есть в ряде нет членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется **устранимой особой точкой** функции $f(z)$.

Определение. Если ряд Лорана в главной части содержит конечное число членов, то есть в ряде конечное число членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется **полюсом** функции $f(z)$.

Определение. Если ряд Лорана в главной части содержит бесконечное число членов, то есть в ряде бесконечное число членов с отрицательными показателями, то точка z_0 называется **существенно особой точкой** функции $f(z)$.

1. Устранимые особые точки

z_0 – устранимая особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

во всех точках круга $|z - z_0| < R$, кроме точки z_0 .

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0 \Rightarrow$$

1. Устранимую особую точку z_0 можно «устранить», доопределив функцию $f(z)$ в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$, при этом функция $f(z)$ становится аналитической во всём круге $|z - z_0| < R$, а точка z_0 – правильной точкой.
2. В достаточно малой окрестности точки z_0 функция $f(z)$ является ограниченной.

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является устранимой тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Пример.

Найти особые точки функции $f(z)$ и определить их тип, если

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

2. Полюсы

z_0 – полюс $\Rightarrow$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)^1} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m},$$

где $c_{-m} \neq 0$.

В этом случае полюс z_0 называется **полюсом m -го порядка** функции $f(z)$; если $m = 1$, то полюс z_0 называется **простым**.

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \left((z - z_0)^m \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_{-2}(z - z_0)^{m-2} + \dots + c_{-m} \right) \Rightarrow$$
$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ где } \varphi(z) - \text{аналитическая функция, причём}$$
$$\varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0.$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом тогда и только тогда, когда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

Вопрос: как определить порядок полюса?

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ где } \varphi(z) - \text{аналитическая функция, причём} \\ \varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0.$$

Способ 1.

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^k \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m} = \begin{cases} \infty, & \text{если } k < m \\ \varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0, & \text{если } k = m \end{cases}$$

Найти такое число m , что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) - \text{конечное число, не равное } 0$$

Пример.

Определить тип особенности функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^4}.$$

Вопрос: как определить порядок полюса?

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^m}, \text{ где } \varphi(z) - \text{аналитическая функция, причём} \\ \varphi(z_0) = c_{-m} \neq 0.$$

Способ 2.

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z - z_0)^m}{\varphi(z)}, \quad \varphi(z_0) \neq 0 \Rightarrow z_0 - \text{нуль порядка } m \text{ функции } 1/f(z)$$

Теорема. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является полюсом порядка m тогда и только тогда, когда она является нулём кратности m функции $1/f(z)$, аналитической в точке z_0 .

Пример.

Исследовать особенности функции $f(z) = \frac{z + 3}{z(z + 2i)(z - i)^3}.$

3. Существенно особые точки

Если z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$, то можно доказать, что

$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ не существует: ни конечный, ни бесконечный.

Замечание. Чтобы показать, что изолированная особая точка z_0 является существенно особой, обычно находят разложение функции в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$.

Пример.

Определить тип особенности функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если $f(z) = e^{1/z}$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Бесконечно удаленная особая точка

Определение. Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$, то точка $z = \infty$ называется **изолированной особой точкой функции** $f(z)$.

Чтобы определить тип особенности бесконечно удаленной изолированной особой точки, необходимо выполнить преобразование $z = 1/t$. При этом точка $z = \infty$ отображается в точку $t = 0$.

В зависимости от того, будет ли точка $t = 0$ устранимой особой точкой, полюсом или существенно особой точкой функции $f(1/t)$, аналогичный тип особенности имеет и точка $z = \infty$.

1. $z = \infty$ – *устраняемая* особая точка $\Rightarrow$

$$f(1/t) = c_0 + c_{-1}t^1 + c_{-2}t^2 + \dots \Rightarrow f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$$

ряд Лорана не содержит главной части

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0 - \text{конечное число}$$

2. $z = \infty$ – *полюс порядка m* $\Rightarrow$

$$f(1/t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n}t^n + \frac{c_1}{t^1} + \frac{c_2}{t^2} + \dots + \frac{c_m}{t^m} \Rightarrow$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m$$

ряд Лорана в главной части содержит конечное число членов

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

Вопрос: как определить порядок полюса?

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + c_1 z^1 + c_2 z^2 + \dots + c_m z^m = \\ &= z^m \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^{n+m}} + \frac{c_1}{z^{m-1}} + \frac{c_2}{z^{m-2}} + \dots + c_m \right) = z^m \varphi(z), \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = c_m \neq 0 \end{aligned}$$

Способ 1.

Найти такое число m , что $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{f(z)}{z^m}$ – конечное число, не равное 0.

Способ 2.

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z^m \varphi(z)}, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{\varphi(z)} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad z = \infty - \text{нуль порядка } m \text{ функции } 1/f(z)$$

Определить, нулём какого порядка является точка $z = \infty$ для функции $1/f(z)$.

3. $z = \infty$ – *существенно* особая точка $\Rightarrow$

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{t^n} \Rightarrow$$

↘ бесконечно много членов

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

↘ бесконечно много членов

главная часть ряда Лорана содержит бесконечное число членов

$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ не существует: ни конечный, ни бесконечный

Пример.

Определить тип особой точки $z = \infty$ для функции

a) $f(z) = \frac{z + 3i}{2 - z};$ *б)* $f(z) = \frac{z^2}{i - z}.$

§ 6. Вычет функции

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая внутри круга $|z - z_0| < R$,
 L – некоторый замкнутый контур, лежащий внутри круга и обходящий точку z_0 в положительном направлении.

Тогда по теореме Коши для односвязной области

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Пусть z_0 – изолированная особая точка функции $f(z)$.

Задача: вычислить $\oint_L f(z) dz$.

z_0 – изолированная особая точка $\Rightarrow$

$f(z)$ – аналитическая внутри кольца $0 < |z - z_0| < R \Rightarrow$

разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$$

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \oint_L (z - z_0)^n dz + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \oint_L \frac{dz}{(z - z_0)^n}$$

$$\oint_L (z - z_0)^n dz = 0 \quad \oint_L \frac{dz}{(z - z_0)} = 2\pi i$$

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = 2\pi i \cdot f(z_0)$$

$$n > 1 \quad \oint_L \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0$$

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} \cdot f^{(n)}(z_0)$$

$$\Rightarrow \oint_L f(z) dz = c_{-1} \cdot 2\pi i \quad \Rightarrow \quad c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$$

Определение. *Вычетом функции* $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 называется число, равное

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

где L — любой замкнутый контур, лежащий внутри области аналитичности функции $f(z)$, обходящий точку z_0 в положительном направлении и не содержащий в себе других особых точек.

Обозначение:

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$$

$$\operatorname{Res} f(z_0)$$

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

$$\operatorname{res} f(z_0)$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz = c_{-1}$$

Пример.

Найти вычет функции $f(z)$ в точке $z = 0$, если $f(z) = z^3 e^{2/z}$.

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Способы вычисления вычетов

1. z_0 – *устраняемая* особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = 0$$

2. z_0 – *простой полюс* $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0 \cancel{(z - z_0)} + c_1 \cancel{(z - z_0)}^2 + c_2 \cancel{(z - z_0)}^3 + \dots$$

0 0 0

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = c_{-1} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Частный случай простого полюса:

$$\boxed{f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}} \quad \begin{array}{l} \varphi(z) \text{ и } \psi(z) - \text{функции, аналитические в } z_0 \\ \varphi(z_0) \neq 0 \end{array}$$

$\psi(z)$ имеет в z_0 простой ноль $\Rightarrow \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \varphi(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{\psi(z)} = \\ &= \varphi(z_0) \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{\psi(z) - \psi(z_0)} = \varphi(z_0) \frac{1}{\psi'(z_0)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}$$

3. z_0 — *полюс порядка m* $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0)^1 + \dots$$

$$\begin{aligned} (z - z_0)^m f(z) &= \\ &= \cancel{c_{-m}} + c_{-m+1} \cancel{(z - z_0)} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \dots \end{aligned}$$

0 0

Продифференцируем полученное равенство $(m - 1)$ раз:

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) = c_{-1}(m-1)! + c_0 m! \cancel{(z - z_0)} + \dots \Rightarrow$$

0

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right) = c_{-1}(m-1)! \Rightarrow$$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left((z - z_0)^m f(z) \right)$$

5. z_0 — *существенно* особая точка

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$$

коэффициент c_{-1} находится из разложения в ряд Лорана

Вычет функции в бесконечно удалённой точке

Пусть $z = \infty$ – изолированная особая точка функции $f(z) \Rightarrow$ существует такое число $R > 0$, что вне круга $|z| < R$ функция $f(z)$ будет аналитической $\Rightarrow$ разлагается в ряд Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$$

L – некоторый замкнутый контур, лежащий вне круга $|z| < R$

$$\oint_L f(z) dz = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{-n} \oint_L \frac{dz}{z^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \oint_L z^n dz = c_{-1} \oint_L \frac{dz}{z} = c_{-1} 2\pi i \Rightarrow$$

$$\oint_L f(z) dz = -c_{-1} 2\pi i \Rightarrow -c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz$$

Определение. *Вычетом функции* $f(z)$ в изолированной особой точке $z = \infty$ называется число, равное

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz.$$

Замечание. Обход контура L происходит по часовой стрелке, то есть точка $z = \infty$ остаётся слева.

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{L^-} f(z) dz = -c_{-1}$$

1. $z = \infty$ — **устраняемая** особая точка $\Rightarrow$

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \Rightarrow f'(z) = -\frac{c_{-1}}{z^2} - \frac{2c_{-2}}{z^3} + \dots \Rightarrow$$

$$z^2 f'(z) = -c_{-1} - \frac{2c_{-2}}{z} - \dots \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = -c_{-1} = \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$$

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z)$$

2. $z = \infty$ — **полюс порядка m**

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^m}{(m+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} [z^{m+2} \cdot f^{(m+1)}(z)]$$

3. $z = \infty$ — *существенно* особая точка

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$$

коэффициент c_{-1} находится из разложения в ряд Лорана

Замечание. Вычисление вычета относительно $z = \infty$ можно свести к вычислению вычета относительно $t = 0$, если сделать замену $z = 1/t$.

Основная теорема о вычетах

Теорема (основная теорема о вычетах).

- Пусть а) функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$;
- б) L – замкнутый контур в D , внутри которого содержатся точки $z_1, z_2, \dots, z_n$.

Тогда

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Следствие. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной односвязной области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда сумма всех вычетов функции $f(z)$ относительно ее особых точек, включая вычет относительно ∞ , равна нулю:

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z) = 0$$

Применение вычетов при вычислении интегралов

1. Вычисление контурных интегралов

$$\oint_L f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

Пример 1. Найти $\oint_{|z|=5} \frac{\sin 4z dz}{(z-2)^2 (z-3)(z-6)}$

Пример 2. Найти $\oint_{|z|=3} \frac{z^{15} dz}{z^8 + 2}$

2. Вычисление интегралов типа

$$\int_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

Имеем: $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Замена: $z = e^{ix}$, $dz = ie^{ix} dx = iz dx$

Получим: $\int_a^{a+2\pi} R(\cos x, \sin x) dx = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}$

Пример 3. Найти $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{5 + 3 \sin x}$

3. Вычисление интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx$$

(где $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$).

Теорема. Пусть $f(x) = \frac{P_n(x)}{P_m(x)}$, где $P_n(x)$, $P_m(x)$ — многочлены степени n и m соответственно, $m \geq n + 2$, $P_m(x) \neq 0$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_n(x)}{P_m(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ — особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Пример 4. Найти $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx$

4. Вычисление интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx$$

Теорема.

- Пусть 1) $f(z)$ аналитична на вещественной оси;
2) $f(z)$ аналитична в верхней полуплоскости за исключением особых точек $z_1, z_2, \dots, z_m$;
3) $f(z)$ стремится к 0 при $|z| \rightarrow \infty$.

Тогда для любого $\lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} \cdot f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z).$$

Следствие.

Пусть $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы.

Тогда
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x dx = \operatorname{Re} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \right),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x dx = \operatorname{Im} \left(2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=z_k} e^{i\lambda z} \cdot f(z) \right),$$

где $z_1, z_2, \dots, z_m$ — особые точки $f(z)$, лежащие в верхней полуплоскости ($\operatorname{Im} z_k > 0$).

Пример 5. Найти
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + 2x + 10}$$