# Математика

## Глава.
## Теория рядов

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

# § 1. Числовые ряды

Пусть задана числовая последовательность $\{u_n\}$

***Определение.*** *Выражение вида*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{\mathrm{n}} + \ldots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} u_n}$$

*называют* ***числовым рядом***.

При этом, члены последовательности $\{u_{\mathrm{n}}\}$ называются ***члена-ми ряда*** ( $u_{\mathrm{n}}$ – ***общий член*** ).

Если начиная с некоторого номера $N$ для членов ряда справедливо равенство

$$u_N = u_{N+1} = u_{N+2} = \ldots = 0\,,$$

то ряд называют ***конечным***. В противном случае ряд называется ***бесконечным*** **.**

Ряд $\sum u_n$ называют

- ***знакоположительным***, если $u_n \geq 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,;$
- ***знакоотрицательным***, если $u_n \leq 0\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,;$
- ***знакопостоянным***, если он знакоположительный или знакоотрицательный;
- ***знакопеременным***, если он содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов.

Для ряда $\sum u_n$ запишем последовательность

$$S_1 = u_1\ , \quad S_2 = u_1 + u_2\ , \quad \ldots\ , \quad S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n\ , \ \ldots$$

Числа $S_1, S_2, \ldots, S_n$ называют ***частичными суммами ряда*** $\sum u_n$.

***Определение.*** *Ряд* $\sum u_n$ *называется* ***сходящимся****, если существует конечный предел последовательности его частичных сумм* $\{ S_n \}$.

*При этом, число* $\boxed{S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n}$ *называют* ***суммой ряда*** $\sum u_n$ .

*Если* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ $\left( \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \nexists \right)$ *то говорят, что ряд* $\sum u_n$ ***расходится*** *и не имеет суммы.*

Если $S$ – сумма ряда $\sum u_n$ , то записывают: $\sum u_n = S$ .

***Пример.***

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

***ряд геометрической прогрессии***

Будет ли этот ряд сходиться? $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = ?$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \begin{cases} a\dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{если } q \neq 1, \\ a \cdot n, & \text{если } q = 1. \end{cases}$$

**1.** $|q| < 1 \quad n \to \infty \;\Rightarrow\; q^n \to 0 \;\Rightarrow\; S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q} \;\Rightarrow$ ряд сходится

**2.** $|q| > 1 \quad n \to \infty \;\Rightarrow\; q^n \to \infty \;\Rightarrow\; S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \;\Rightarrow$ ряд расходится

**3.** $q = -1 \quad S_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное}, \\ a, & \text{если } n \text{ нечетное}. \end{cases} \;\Rightarrow$ ряд расходится

**4.** $q = 1 \quad S_n = an \quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty \;\Rightarrow$ ряд расходится

**Пример.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$$

***ряд геометрической прогрессии***

ряд сходится при $|q| < 1$ $\qquad S = \dfrac{a}{1-q}$

ряд расходится при $|q| \geq 1$

***Основные задачи теории рядов:***

**1)** *Определить, сходится или расходится заданный ряд* (говорят: «***исследовать ряд на сходимость***»)

**2)** *Найти сумму сходящегося ряда*.

Найти точное значение суммы $S$ сходящегося ряда удается редко. Обычно полагают $S \approx S_n$ где $n$ выбирают так, чтобы

$$|R_n| = |S - S_n| < \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ заранее задано}).$$

Число $R_n$ называют ***остатком ряда***.

# Свойства числовых рядов

***Теорема 1.*** *Поведение ряда относительно сходимости не изменится, если добавить (отбросить) конечное число членов ряда.*

***Теорема 2.***

*Если ряд* $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* $U$,

*ряд* $\sum v_n$ *сходится и его сумма равна* $V$,

*то* а) *ряд* $\sum cu_\text{n}$ – *сходится и его сумма равна* $cU$ $(\forall c \in \mathbb{R})$;

б) *ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *сходится и его сумма равна* $U \pm V$.

***Следствие***

1) *Если* $\sum u_n$ *расходится, то* $\forall c \neq 0$ $(c \in \mathbb{R})$ *ряд* $\sum cu_\text{n}$ – *тоже расходится.*

2) *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится, а ряд* $\sum v_n$ *расходится, то ряд* $\sum (u_n \pm v_n)$ – *расходится.*

**Теорема 3 (необходимый признак сходимости ряда).**

*Если ряд* $\sum u_n$ *сходится, то* $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.}$

**Следствие (достаточное условие расходимости ряда)**

*Если* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ *, то ряд* $\sum u_n$ *расходится.*

**Замечание.** Если условие $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ выполнено,
то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.
Ряд может как сходиться, так и расходиться.

**Пример.**

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots}$$ **гармонический ряд**

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, но ряд расходится

**Теорема 4 (закон ассоциативности для сходящихся рядов).**

*Пусть ряд* $\sum u_n$ *сходится и его сумма равна* $U$

*Если сгруппировать члены этого ряда*, **НЕ ИЗМЕНЯЯ ИХ ПОРЯДКА**, *то полученный в результате этого ряд будет сходиться и иметь ту же сумму* $U$.

# Признаки сходимости знакоположительных рядов

***Теорема (первый признак сравнения).***

*Пусть* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды, причем* $u_n \le v_n$ *для всех n.*

*Тогда*

1) *если ряд* $\sum v_n$ *сходится, то и ряд* $\sum u_n$ *тоже сходится;*
2) *если ряд* $\sum u_n$ *расходится, то и ряд* $\sum v_n$ *тоже расходится.*

***Пример.***

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ Сравним с гармоническим рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ – тоже расходится

***Теорема (второй признак сравнения).***

*Пусть* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *– знакоположительные ряды.*

*Если при* $n \to \infty$ *существует* ***конечный и отличный от нуля*** *предел отношения их общих членов, т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

*то ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *ведут себя одинаково по отношению к сходимости.*

***Пример.***

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ Сравним с гармоническим рядом: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ ведут себя одинаково

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$ – тоже расходится

***Эталонные ряды***, которые используются в признаках сравнения:

**а)** ***гармонический*** ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ – расходится;

**б)** ***обобщенный гармонический*** ряд (ряд ***Дирихле***)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } \alpha > 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } \alpha \le 1. \end{cases}$$

**в)** ряд ***геометрической прогрессии***

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{если } |q| < 1, \\ \text{расходится,} & \text{если } |q| \ge 1. \end{cases}$$

**Теорема (признак Даламбера).**

*Пусть* $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\ell.$$

*Тогда*

*а) если* $\ell<1$, *то ряд сходится;*

*б) если* $\ell>1$, *то ряд расходится;*

*в) если* $\ell=1$, *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

**Пример.**

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\cdot n!}{n^n}$$

**Теорема (признак Коши).**

*Пусть* $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд и существует*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \ell .$$

*Тогда*

*а) если* $\ell < 1$ , *то ряд сходится;*

*б) если* $\ell > 1$ , *то ряд расходится;*

*в) если* $\ell = 1$ , *то вопрос о сходимости ряда остается открытым.*

**Пример.**

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$

***Замечания*.**

**1)** В обеих теоремах случай $\ell = \infty$ включается в $\ell > 1$ .

**2)** В ходе доказательства признаков Даламбера и Коши показывается, что если $\ell > 1$ , то

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

**Теорема (интегральный признак Коши).**

*Пусть* $\sum u_n$ *– знакоположительный ряд,*

$f(x)$ *– непрерывная, неотрицательная, монотонно убывающая на* $[c;+\infty)$ *(где* $c\in\mathbb{N}$, $c\geq 1$*) функция такая, что*

$$f(n)=u_n \quad (\textit{для любого } n=1,2,3\ \ldots).$$

*Тогда несобственный интеграл* $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$ *и ряд* $\sum\limits_{n=c}^{\infty} u_n$

*ведут себя одинаково относительно сходимости.*

**Пример.**

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}} \qquad (\alpha>1)$$

# Признак сходимости знакочередующихся рядов

Рассмотрим частный случай знакопеременных рядов.

***Определение.*** *Ряд, у которого любые рядом стоящие члены имеют противоположные знаки, называется* ***знакочередующимся***.

Будем считать, что 1-й член знакочередующегося ряда положителен.

$\Rightarrow$ знакочередующийся ряд имеет вид:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots (-1)^{n+1} u_n + \ldots = \sum (-1)^{n+1} \cdot u_n ,$$

где $u_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n}$$

**Теорема (признак сходимости Лейбница).**

*Пусть знакочередующийся ряд* $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *удовлетворяет условиям:*

**1)** *члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.* $u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$ ,

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

*Тогда ряд* $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *сходится, причем его сумма* $S$ *положительна и не превосходит первого члена ряда.*

***Пример.***

Исследовать на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

***Замечания.***

**1)** Ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ будет сходиться и в том случае, когда условие 1 теоремы Лейбница выполняется, начиная с некоторого номера $N$. Но утверждение о сумме ряда в этом случае не будет иметь места.

**2)** Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то погрешность, получаемая при замене суммы ряда $S$ его частичной суммой $S_n$, не превосходит модуля первого отбрасываемого члена, т.е.

$$|R_n| = |S - S_n| < u_{n+1}$$

**3)** Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ не удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, то он расходится (т.к. не выполнено необходимое условие сходимости).

Если ряд $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ удовлетворяет 2-му условию теоремы Лейбница, но не удовлетворяет ее 1-му условию, то о сходимости ряда ничего сказать нельзя.

# Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Пусть $\sum u_n$ – знакопеременный ряд.
Рассмотрим ряд $\sum |u_n|$.

***Теорема (признак абсолютной сходимости).***
*Если ряд $\sum |u_n|$ сходится, то ряд $\sum u_n$ тоже сходится.*

***Замечание.*** Признак абсолютной сходимости достаточный, но не необходимый. Т.е. существуют сходящиеся знакопеременные ряды $\sum u_n$, для которых $\sum |u_n|$ – расходится.

***Определение.*** *Ряд $\sum u_n$ называют **абсолютно сходящимся**, если его ряд модулей $\sum |u_n|$ сходится.*

*Если ряд $\sum u_n$ – сходится, а его ряд модулей $\sum |u_n|$ – расходится, то ряд $\sum u_n$ называют **условно сходящимся**.*

***Пример.***

Исследовать на сходимость ряд: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\left(\sqrt{n}+(-1)^{n+1}\right)^4}$

***Теорема (признак сходимости Лейбница).***

*Пусть знакочередующийся ряд* $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *удовлетворяет условиям:*

**1)** *члены ряда монотонно убывают по абсолютной величине, т.е.* $\boldsymbol{u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots}$ ,

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$

*Тогда ряд* $\sum(-1)^{n+1}\cdot u_n$ *сходится, причем его сумма* $S$ *положительна и не превосходит первого члена ряда.*

***Теорема (признак абсолютной сходимости).***

*Если ряд* $\sum|u_n|$ *сходится, то ряд* $\sum u_n$ *тоже сходится.*

**Определение.** *Ряд* $\sum u_n$ *называют* ***абсолютно сходящимся***, *если его ряд модулей* $\sum |u_n|$ *сходится.*

*Если ряд* $\sum u_n$ *– сходится, а его ряд модулей* $\sum |u_n|$ *– расходится, то ряд* $\sum u_n$ *называют* ***условно сходящимся***.

**Теорема (о перестановке членов ряда).**

**а)** *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится абсолютно, то ряд, полученный из него в результате перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму.*

**б)** *Если ряд* $\sum u_n$ *сходится условно, то можно так переставить члены ряда, что сумма получившегося ряда будет равна любому, заранее заданному числу.*

*Более того, можно так переставить члены ряда, что получившийся ряд будет расходиться* ***(теорема Римана)***.

**Теорема.**

*Если ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся абсолютно, то ряд* $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ *тоже сходится абсолютно* $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})$.

**Следствие.**

*Если ряд* $\sum u_n$ *– сходится абсолютно,*

$\sum v_n$ *– сходится условно,*

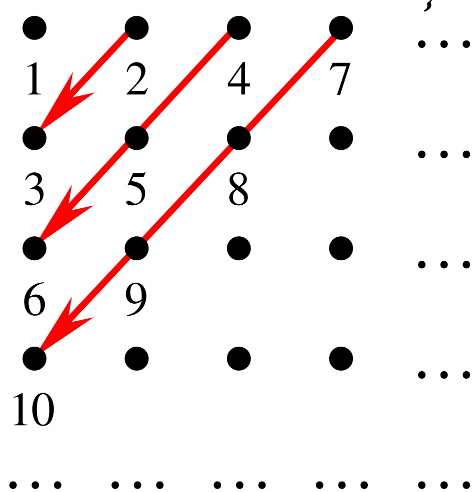
*то ряд* $\sum(\alpha u_n \pm \beta v_n)$ *сходится условно* $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0)$ .

Пусть даны два ряда: $\sum u_n$ и $\sum v_n$ .

Составим таблицу из всевозможных парных произведений членов этих рядов:

$$\begin{array}{cccccc}
u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \ldots & u_1v_n & \ldots \\
u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \ldots & u_2v_n & \ldots \\
u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \ldots & u_3v_n & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

***Определение.*** ***Произведением рядов*** *$\sum u_n$ и $\sum v_n$ называют ряд, составленный из элементов таблицы в следующем порядке*:




Итак: $\sum u_n \cdot \sum v_n = u_1v_1 + \underbrace{u_1v_2 + u_2v_1} + \underbrace{u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1} + \ldots$

**Теорема (о сходимости произведения рядов).**

*Пусть ряды* $\sum u_n$ *и* $\sum v_n$ *сходятся абсолютно и их суммы равны* $U$ *и* $V$ *соответственно.*

*Тогда ряд* $\sum u_n \cdot \sum v_n$ *тоже сходится абсолютно и его сумма равна* $U \cdot V$.

**Теорема (признак Дирихле).**

*Пусть* 1) *последовательность* $\{a_n\}$ *монотонна и* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

2) *последовательность частичных сумм ряда* $\sum b_n$ *ограничена*.

*Тогда ряд* $\sum a_n \cdot b_n$ *– сходится* .

**Теорема (признак Абеля).**

*Пусть* 1) $\{a_n\}$ *монотонная и ограниченная*;

2) *ряд* $\sum b_n$ *– сходится*.

*Тогда ряд* $\sum a_n \cdot b_n$ *– сходится*

# § 2. Функциональные ряды

Пусть задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$ с общей областью определения $D$ .

***Определение.*** *Выражение вида*

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$$

*называют* ***функциональным рядом***.

Пусть $x_0 \in D$. Рассмотрим числовой ряд $\sum f_n(x_0)$.

Если ряд $\sum f_n(x_0)$ сходится, то говорят, что ***ряд*** $\sum f_n(x)$ ***сходится в точке*** $x_0$.

Множество $D_1 = \{ x_0 \in D \mid \sum f_n(x_0) \text{ –сходится} \}$ называют ***областью сходимости функционального ряда*** $\sum f_n(x)$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве $D_1$ и такая, что ее значение в любой точке $x_0 \in D_1$ совпадает с суммой числового ряда $\sum f_n(x_0)$, называется ***суммой функционального ряда*** $\sum f_n(x)$ (***1-е определение суммы функционального ряда***).

Построим последовательность

$$S_1(x) = f_1(x), \quad S_2(x) = f_1(x)+f_2(x), \ \ldots,$$
$$S_n(x) = f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_{\mathrm{n}}(x), \ \ldots$$

Функции $S_1(x)$, $S_2(x)$, …, $S_n(x)$ называются ***частичными суммами ряда*** $\sum f_{\mathrm{n}}(x)$.

Множество $D_2 = \{ x_0 \in D \mid \{S_n(x_0)\} \text{ –сходится}\}$ называют ***областью сходимости функциональной последовательности*** $\{S_n(x)\}$.

Функция $f(x)$, определенная на $D_2$ и такая, что $f(x_0)$ совпадает с пределом последовательности $\{S_n(x_0)\}$ $(\forall x_0 \in D_2)$, называется ***пределом функциональной последовательности*** $\{S_n(x)\}$.

Но $S_n(x_0)$ – частичная сумма числового ряда $\sum f_n(x_0)$.

$\Rightarrow$ а) $D_1 = D_2$;

б) *Предел функциональной последовательности* $\{S_n(x)\}$ *есть сумма ряда* $\sum f_{\mathrm{n}}(x)$

(***2-е определение суммы функционального ряда***).

***Пример.***

$$1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$$

Зафиксировав $x_0$, мы получаем ряд геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=1}^{\infty}{x_0}^{n-1}$$

Этот ряд сходится при $|x_0| < 1$.

То есть областью сходимости является интервал: (–1, 1).

Сумма ряда: $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$

## *Основные задачи теории функциональных рядов:*

**1)** *Определить область сходимости функционального ряда*

Область сходимости функционального ряда $D_1$ находится с помощью признаков сходимости числовых рядов.

**2)** *Найти сумму функционального ряда (в области сходимости)*.

Сумму ряда обычно находят только приближенно.
Полагают $f(x) \approx S_n(x)$ , где $n$ выбирают так, чтобы

$$| f(x) - S_n(x) | < \varepsilon , \forall x \in D_1 \text{ (}\varepsilon\text{ заранее задано).}$$

**3)** *Определить, какие из свойств конечных сумм функций будут верны и для функциональных рядов, которые представляют собой бесконечные суммы*.

Многие свойства конечных сумм сохраняются для так называемых равномерно сходящихся рядов.

Возьмём точку $x_0$ из области сходимости: $x_0 \in D_1$.

Тогда последовательность частичных сумм:

$$S_1(x_0),\ \ S_2(x_0),\ \ \ldots\ ,\ S_n(x_0),\ \ \ldots$$

сходится к некоторому числу $f(x_0)$ .

По определению предела последовательности это означает, что для $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > N$ выполняется

$$|\, S_n(x) - f\,(x_0)\,| < \varepsilon\ .$$

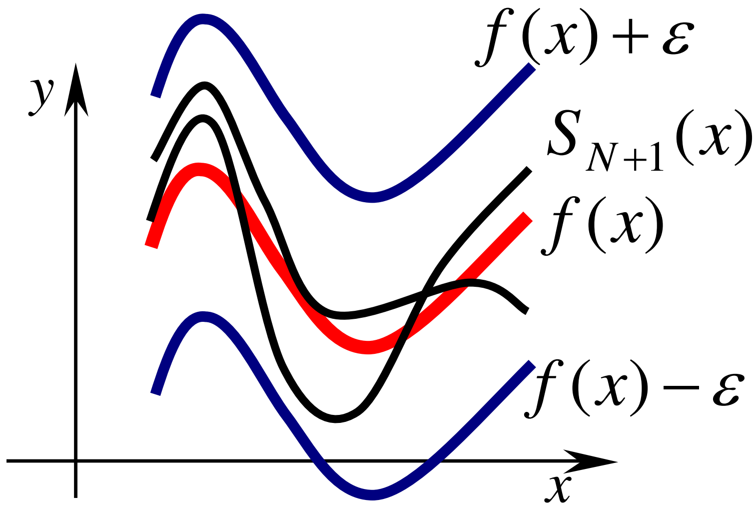
Но номер $N$ для каждого $x_0$ свой.

Понятие равномерной сходимости возникает из требования, чтобы для всех $x_0 \in D_1$ существовал бы общий номер $N$.

***Определение.*** *Функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ *называется* ***равномерно сходящимся*** *к* $f(x)$ *на множестве* $H \subset D_1$ *, если* $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$|S_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;,\;\; \forall n > N \;\text{ и }\; \forall x \in H$$

## *Геометрический смысл*




Если $\sum f_n(x)$ сходится к $f(x)$ на множестве равномерно $H \subset D_1$ , то в любой ε-полоске функции $f(x)$ находятся все частичные суммы ряда, за исключением, возможно, конечного их числа.

**Определение.** *Говорят, что функциональный ряд* $\sum f_n(x)$ ***мажорируется*** *на множестве* $H$ *числовым рядом* $\sum a_n$, *если* $|f_n(x)| < a_n$, $\forall n, \forall x \in H$.

**Теорема (признак равномерной сходимости Вейерштрасса).**

*Если ряд* $\sum f_n(x)$ *мажорируется на* $H$ *сходящимся числовым рядом* $\sum a_n$, *то он сходится на* $H$ *равномерно.*

**Примеры.**

**1.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$

**2.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$

***Замечание*.**

Признак Вейерштрасса является достаточным, но не является необходимым. То есть существуют равномерно сходящиеся ряды, для которых не удается подобрать мажорирующий сходящийся ряд.

## Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов

**1)** *Если* $\sum f_n(x)$ *сходится на промежутке* $H$ *равномерно и* $\varphi(x)$ *– ограничена на* $H$, *то ряд* $\sum \varphi(x) f_n(x)$ *тоже сходится на* $H$ *равномерно*.

**2)** *Пусть* $\sum f_{\mathrm{n}}(x)$ *сходится к* $f(x)$ *на промежутке* $H$ *равномерно*, $x_0 \in H$ *и существуют* $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$

*Тогда*: а) *числовой ряд* $\sum c_{\mathrm{n}}$ *сходится*;

б) *сумма ряда* $\sum c_{\mathrm{n}}$ *равна* $c = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Иначе говоря,

$$\lim_{x \to x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x \to x_0} f_n(x)\right)$$

**3)** *Если ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на промежутке* $H$ *равномерно и в точке* $x_0 \in H$ *все функции* $f_n(x)$ *непрерывны, то сумма ряда* $f(x)$ *тоже непрерывна в точке* $x_0$ .

**4)** *Если функции* $f_n(x)$ *непрерывны на промежутке* $H$ *и ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на* $H$ *равномерно к* $f(x)$ , *то* $\forall x_0, x \in H$ *ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right)$$

*тоже сходится на* $H$ *равномерно и его сумма равна*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

***Замечание***: Говорят «ряд можно почленно интегрировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{x_0}^{x} f_n(t)dt\right) = \int_{x_0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)dt$$

**5)** *Пусть функции* $f_n(x)$ *непрерывно дифференцируемы на промежутке* $H$ *и ряд* $\sum f_n(x)$ *сходится на* $H$ *к* $f(x)$.

*Если ряд* $\sum f_n'(x)$ *сходится на* $H$ *равномерно, то ряд* $\sum f_n(x)$ *тоже сходится на* $H$ *равномерно, его сумма* $f(x)$ *является функцией непрерывно дифференцируемой и имеет место равенство*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = f'(x)$$

***Замечание***: Говорят «ряд можно почленно дифференцировать» и пишут:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)'$$

# §3. Степенные ряды

***Степенным рядом*** (***рядом по степеням*** $x\text{–}x_0$) называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n}$$

где $a_n$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Числа $a_\mathrm{n}$ называются ***коэффициентами степенного ряда***.

Частный случай степенного ряда – ***ряд по степеням*** $x$ :

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}$$

Будем изучать ряд $\sum a_n x^n$ . На общий случай результаты переносятся заменой $t = x - x_0$ .

# Сходимость степенных рядов

Степенной ряд $\sum a_n x^n$ всегда сходится в точке $x = 0$.

***Теорема (Абеля).***

**1)** *Если степенной ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится в точке* $x_1 \neq 0$, *то он сходится абсолютно в любой точке* $x$, *удовлетворяющей условию*
$$|\,x\,| < |\,x_1\,|\,;$$

**2)** *Если степенной ряд* $\sum a_n x^n$ *расходится в точке* $x_2$, *то он расходится в любой точке* $x$, *удовлетворяющей условию*
$$|\,x\,| > |\,x_2\,|\,.$$

Из теоремы Абеля $\Rightarrow$ $\exists\, R>0$ *такое, что ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится* (*абсолютно*) *при* $|\,x\,| < R$ *и расходится при* $|\,x\,| > R$.

Число $R$ называют ***радиусом сходимости*** ряда $\sum a_n x^n$ .

Интервал $(-R\,;\,R)$ называют ***интервалом сходимости*** ряда $\sum a_n x^n$ .

$$R = \frac{1}{\ell}, \text{ где } \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{или} \quad \ell = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

***Замечания.***

**1)** Полученные формулы справедливы, если ряд $\sum a_n x^n$ – «***полный***» (то есть присутствуют все степени $x$ ).

**2)** Допускается $R = 0$ (ряд сходится только в точке 0) и $R = +\infty$ (ряд сходится на всей числовой оси)

**3)** На границе интервала сходимости поведение степенного ряда необходимо исследовать отдельно, то есть исследовать на сходимость ряды $\sum a_n R^n$ и $\sum a_n(-R)^n$ .

**4)** Для ряда $\sum a_n(x - x_0)^n$ интервал сходимости имеет вид:

$$|x - x_0| < R \quad \Leftrightarrow \quad (x_0 - R\,;\; x_0 + R)\,.$$

Если ряд $\sum a_n(x - x_0)^n$ – «полный», то полученные формулы для него тоже справедливы.

## ***Примеры.***

**1.** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

**2.** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$$

**3.** $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$

# Свойства степенных рядов

1. *Степенной ряд равномерно сходится в интервале сходимости.*

2. *Ряды* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)'', \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)''', \quad \ldots, \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n x^n)^{(k)}$ *имеют тот же радиус сходимости, что и ряд* $\sum a_n x^n$

Тогда из свойств равномерно сходящихся рядов также следует:

3. *Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в интервале сходимости.*

4. *Степенной ряд можно почленно интегрировать в интервале сходимости.*

5. *Степенной ряд можно почленно дифференцировать в интервале сходимости любое число раз.*

***Замечание.***

Если конец интервала сходимости входит в область сходимости, то сумма степенного ряда будет в этой точке непрерывна, так как справедлива следующая теорема.

***Теорема (Абеля о сумме степенного ряда на концах интервала сходимости).***

*Пусть ряд* $\sum a_n x^n$ *сходится на* $(-R\,;R)$ *к функции* $S(x)$.

*Если ряд сходится на концах интервала сходимости, то его сумма в этих точках равна соответственно*

$$S(-R) = \lim_{x \to -R+0} S(x),$$

$$S(R) = \lim_{x \to R-0} S(x).$$

# §4. Разложение функции в степенной ряд

***Цель:*** *Найти функциональный ряд, суммой которого на промежутке $X$ будет заданная функция $f(x)$.*

***Определение.*** *Говорят, что* ***функция $f(x)$ разложима в ряд*** *на промежутке $X$, если $\exists$ функциональный ряд $\sum f_n(x)$, суммой которого на $X$ является $f(x)$.*

Будем искать разложение функции в степенной ряд.

***Задачи:***

**1)** Найти условия, при которых функция $f(x)$ разложима в степенной ряд.

**2)** Указать этот степенной ряд.

Пусть $f(x)$ – бесконечное число раз дифференцируема в окрестности точки $x_0$.

***Определение.*** ***Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки $x_0$*** *(по степеням $x - x_0$) называется степенной ряд вида*

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

*Ряд Тейлора функции $f(x)$ по степеням $x$ (т.е. $x_0 = 0$)*

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

*называют* ***рядом Маклорена***

***Теорема (о разложении функции в степенной ряд).***

*Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд в окрестности точки $x_0$, то этот ряд является ее рядом Тейлора по степеням $x - x_0$.*

***Замечание.***

Существование для функции ряда Тейлора не гарантирует разложение функции в степенной ряд.

Сумма ряда Тейлора функции $f(x)$ может не совпадать с самой функцией $f(x)$.

Пусть $f(x)$ – бесконечно дифференцируема в окрестности $x_0$.

$\Rightarrow$ для $f(x)$ можно записать ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ .

Пусть $S_n(x)$ – $n$-я частичная сумма этого ряда, т.е.

$$S_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$S_n(x)$ называют ***многочленом Тейлора функции f(x) по степеням x – x₀*** .

Пусть $$R_n(x) = f(x) - S_n(x)$$

$R_n(x)$ называют ***остаточным членом ряда Тейлора***.

***Теорема (необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).***

*Ряд Тейлора по степеням* $x - x_0$ *для функции* $f(x)$ *сходится к* $f(x)$ *в некоторой окрестности точки* $x_0 \Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

**Теорема (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора).**

*Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$ и все ее производные ограничены в совокупности (то есть $\exists M > 0$, такое что $\left| f^{(n)}(x) \right| < M$ для $\forall n$ и $\forall x$ из окрестности точки $x_0$ ), то $f(x)$ разлагается в этой окрестности в ряд Тейлора по степеням $x - x_0$ .*

***Записав ряд Тейлора функции f(x) необходимо:***

**1)** Найти область сходимости полученного степенного ряда (использовать признаки Коши или Даламбера).

**2)** Выяснить, будет ли суммой ряда функция $f(x)$ (использовать достаточные условия разложения функции в ряд Тейлора).

**3)** Выяснить, будет ли ряд сходиться равномерно (по свойству степенных рядов сходится равномерно в интервале сходимости).

# Стандартные разложения Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n} + \ldots \qquad (-1, 1]$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots \qquad (-1, 1)$$

***Частный случай:*** $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (-1, 1)$

$$sh\, x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

$$ch\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \qquad (-\infty, \infty)$$

# §5. Тригонометрические ряды Фурье

***Определение.*** *Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида*

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{a_0}{2}+(a_1\cos\omega_1 x+b_1\sin\omega_1 x)+(a_2\cos\omega_2 x+b_2\sin\omega_2 x)+\ldots=\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x)\end{aligned}} \quad \mathbf{(1)}$$

*где* $a_0$ , $a_n$ , $b_n$ $(n=1,2,\ldots)$ – *числа* (***коэффициенты ряда*** **(1)**),

$$\omega_n=\frac{n\pi}{\ell}\quad (n\in\mathbb{N},\ \ell>0)$$

***Замечание***. Свободный член ряда **(1)** записан в виде дроби для единообразия последующих формул.

Справедливы утверждения:

**1)** Если $S(x)$ – сумма ряда **(1)**, то $S(x)$ – периодическая, с периодом $T = 2\ell$ .

**2)** Если ряд **(1)** сходится на отрезке, длиной $2\ell$ , то он сходится на всей числовой оси.

В общем случае область сходимости ряда (1) – объединение интервалов вида $(a + 2\ell k\ ;\ b + 2\ell k)$, где $a,b$ – некоторые числа, $k \in \mathbb{Z}$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция $(T = 2\ell)$.

***Задачи:***

**1)** Разложима ли $f(x)$ в тригонометрический ряд?

**2)** Если $f(x)$ разложима в тригонометрический ряд, то как найти его коэффициенты?

***Замечания.***

**1)** Периодическую функцию достаточно рассматривать на любом отрезке длиной $T$.

Удобнее всего брать отрезок $[-\ell\,;\,\ell]$ (где $T = 2\ell$).

**2)** Имеют место следующие равенства:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x dx = 0, \qquad \int_{-\ell}^{\ell} \cos \omega_n x dx = 0. \qquad \int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x \cdot \cos \omega_k x dx = 0.$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin \omega_n x \cdot \sin \omega_k x dx = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если}} \ \ n \neq k\,; \\ \ell\,, & \text{\textit{если}} \ \ n = k\,. \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \omega_n x \cdot \cos \omega_k x dx = \begin{cases} 0, & \text{\textit{если}} \ \ n \neq k\,; \\ \ell\,, & \text{\textit{если}} \ \ n = k\,. \end{cases}$$

Пусть $f(x)$ – периодическая функция $(T = 2\ell)$,

$f(x)$ – сумма тригонометрического ряда на $[-\ell\ ;\ \ell]$, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \omega_n x + b_n \sin \omega_n x). \qquad \textbf{(1)}$$

Пусть ряд сходится к $f(x)$ на $[-\ell\ ;\ \ell]$ равномерно.

Тогда 1) $f(x)$ – непрерывна на $[-\ell\ ;\ \ell]$;

2) $f(x)$ – интегрируема на $[-\ell\ ;\ \ell]$, причем

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)dx, \qquad \textbf{(2)}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \cos \omega_n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \textbf{(3)}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \cdot \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cdot \sin \omega_n x dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \qquad \textbf{(4)}$$

***Определение.*** *Тригонометрический ряд*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x),$$

*коэффициенты которого находятся по формулам* (2), (3), (4), *называется* ***тригонометрическим рядом Фурье функции*** $\boldsymbol{f(x)}$**.**

Коэффициенты, определяемые по формулам (2), (3), (4) называются ***коэффициентами Фурье функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ .

Таким образом, справедлива теорема:

***Теорема (о разложении функции в тригонометрический ряд).***

*Если функция разлагается в тригонометрический ряд, то этот ряд является ее тригонометрическим рядом Фурье.*

***Записав тригонометрический ряд Фурье функции f(x) необходимо:***

**1)** Найти область сходимости полученного ряда.
**2)** Выяснить, будет ли суммой ряда функция $f(x)$.
**3)** Выяснить, будет ли ряд сходиться равномерно.

***Теорема (Дирихле).***

*Пусть* $f(x)$ *– периодическая* ($T = 2\ell$), *удовлетворяющая условиям*:

1) $f(x)$ *на* $[-\ell\ ;\ \ell]$ *непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода;*
2) $f(x)$ *на* $[-\ell\ ;\ \ell]$ *монотонна или имеет конечное число точек экстремумов.*

*Тогда тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция* $S(x)$, *определенная следующим образом:*

а) $S(x) = f(x)$, *если* $x$ *– точка непрерывности* $f(x)$;

б) $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, *если* $x$ *– точка разрыва* $f(x)$.

*При этом тригонометрический ряд Фурье функции* $f(x)$ *сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции* $f(x)$.

Условия теоремы называются ***условиями Дирихле***.

Функция, удовлетворяющая 2-му условию Дирихле, называется ***кусочно-монотонной***.

***Теорема (2-е достаточное условие разложения функции в тригонометрический ряд).***

*Пусть f(x) – периодическая функция* $(T = 2\ell)$.

*Если на* $[-\ell\ ;\ \ell]$ *функция f(x) и ее производная f '(x) непрерывны или имеют конечное число точек разрыва первого рода, то тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится на всей числовой прямой и его суммой будет функция S(x), определенная следующим образом:*

а) $S(x) = f(x)$, *если x – точка непрерывности f(x);*

б) $S(x) = \dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, *если x – точка разрыва f(x).*

*При этом тригонометрический ряд Фурье функции f(x) сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем в интервале непрерывности функции f(x).*

Функция, удовлетворяющая условию теоремы, называется ***кусочно-гладкой***.

# Разложение в тригонометрический ряд Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(x)$ – периодическая, $T = 2\ell$ .

**а)** Пусть $f(x)$ – **четная**.

Ее тригонометрический ряд Фурье: $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \omega_n x ,$$

где $$\boxed{a_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \cos \omega_n x dx \quad (n = 0,1,2,3,\ldots), \qquad (\mathbf{5})}$$

**б)** Пусть $f(x)$ – **нечетная**.

Ее тригонометрический ряд Фурье: $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \omega_n x ,$$

где $$\boxed{b_n = \frac{2}{\ell} \cdot \int_0^{\ell} f(x) \cdot \sin \omega_n x dx \quad (n = 1,2,3,\ldots), \qquad (\mathbf{6})}$$

# Разложение в тригонометрический ряд Фурье непериодических функций, заданных на $(-\ell; \ell)$ или $[0 ; \ell)$

**а)** Пусть $f(x)$ задана на $(-\ell ; \ell)$ и удовлетворяет на $[-\ell ; \ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой).

Периодически продолжаем $f(x)$ на $\mathbb{R}$ ,

т.е. задаем функцию $F(x)$ такую, что

$$F(x) = f(x) , \quad \forall x \in (-\ell ; \ell) ,$$
$$F(x + 2\ell k) = F(x) , \quad \forall k \in \mathbb{Z} .$$

Ряд Фурье функции $F(x)$, рассматриваемый только на интервале $(-\ell ; \ell)$ , называют рядом Фурье функции $f(x)$ на $(-\ell ; \ell)$ .

**б)** Пусть $f(x)$ задана на $[0\ ;\ \ell)$ (или $(0\ ;\ \ell)$) и удовлетворяет на $[0\ ;\ \ell]$ условиям Дирихле (или является кусочно-гладкой)

Доопределяем $f(x)$ на $(-\ell\ ;\ 0)$ (четным или нечетным образом).

Получившуюся функцию $\bar{f}(x)$ периодически продолжаем на $\mathbb{R}$ .

Ряд Фурье периодического продолжения функции $\bar{f}(x)$ , рассматриваемый только на $[0\ ;\ \ell)$ , называют рядом Фурье функции $f(x)$ на $[0\ ;\ \ell)$ .

***Замечания.***

**1)** Доопределение функции на $f(x)$ четным или нечетным образом позволяет избежать нахождения аналитического выражения функции $\bar{f}(x)$ на $(-\ell\ ;\ 0)$ (т.к. коэффициенты Фурье находятся по формулам (5) или (6).

**2)** Если $f(0) \neq 0$ , то $f(x)$ лучше продолжать на $(-\ell\ ;\ 0)$ четным образом (т.к. 0 в этом случае будет точкой непрерывности функции $\bar{f}(x)$ ).

Если $f(0) = 0$ , то продолжать $f(x)$ на $(-\ell\ ;\ 0)$ можно как четным, так и нечетным образом.

**3)** Если функция задана на $[0\ ;\ \ell)$ , то она разлагается в ряд Фурье не единственным образом.