Математика

Глава. Дифференциальные уравнения

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

§ 1. Основные понятия

Дифференциальные уравнения – уравнения, связывающие независимые переменные, неизвестную функцию от этих переменных и её производные или дифференциалы.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Если неизвестная функция зависит от одной переменной, то дифференциальное уравнение называют ***обыкновенным***, если от нескольких переменных, то ***в частных производных***.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком*** этого уравнения.

$y''' - 3y'' + 2y = 0$	обыкновенное дифференциальное уравнение третьего порядка
$y \cdot z'_x = x \cdot z'_y$	дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка
$x + y' - y + xe^{y'} = 0$	обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его ***интегрированием***, а график его решения – ***интегральной кривой***.

Общий вид обыкновенного дифференциального уравнения:

$$F(x, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x, y, y') = 0$$

x – независимая переменная,
$y(x)$ – искомая функция,
F – заданная функция трех переменных.

$$y' = f(x, y)$$

уравнение, ***разрешённое относительно производной***.

$$x + y' - y + xe^{y'} = 0$$

$$x^2 y' + 5xy = y^2$$

$$y' = \frac{y^2 - 5xy}{x^2}$$

Дифференциальное уравнение 1-го порядка, разрешенное относительно y', имеет две формы записи:

1) обычную, то есть $y' = f(x,y)$,
2) ***дифференциальную***, то есть

$$P(x\,,y)dx + Q(x\,,y)dy = 0\,.$$

1. $y' = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \quad \Rightarrow$

$dy - f(x,y)dx = 0$, то есть $P(x,y) = -f(x,y)$, $\quad Q(x,y) = 1$

2. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x,y)dy = -P(x,y)dx \quad \Rightarrow$

$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, то есть $f(x,y) = -\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Замечание. Если уравнение записано в дифференциальной форме, то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

$$y' = 2x \qquad y = ? \qquad y = x^2 \qquad y = x^2 - 5 \qquad y = x^2 + C$$

Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений.

Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

начальное условие

$$y' = -\frac{y}{x}, \quad \boxed{y(4) = 1}$$ – задача Коши

Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющее начальному условию.

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

Геометрически, задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка (x_0, y_0), через которую проходит интегральная кривая $y(x)$.

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Пусть для уравнения $y' = f(x,y)$ *выполняются два условия:*

1) $f(x,y)$ *непрерывна в некоторой области* D *плоскости* xOy,

2) $f_y'(x,y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *этого уравнения, удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$.

Замечания.

1. Из теоремы следует, что вся область D покрыта интегральными кривыми, которые нигде между собой не пересекаются.

2. Теорема дает достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

   Возможно, что в точке (x_0,y_0) условия теоремы не выполняются, а решение, удовлетворяющее начальному условию, существует и единственно.

Общим решением *дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ *в области D существования и единственности решения задачи Коши называется функция*

$$y = \varphi(x, C),$$

зависящая от x и одной произвольной постоянной C, которая удовлетворяет следующим двум условиям:

1) *при любом допустимом значении постоянной* C *она является решением данного уравнения;*

2) *каково бы ни было начальное условие* $y(x_0) = y_0$ *(где* $(x_0, y_0) \in D$*), можно найти единственное значение* $C = C_0$ *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения*****.**

Любое решение (интеграл), получающееся из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$), является ***частным***.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка:

$$y = \varphi(x, C)$$

$x + y = \ln|y| + C$ Функция y задана неявно.

Общий интеграл дифференциального уравнения первого порядка:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

$y' = 2x$ $y = x^2 + C$ – общее решение

$x^2 - y + C = 0$ – общий интеграл

$y = x^2$ $C = 0$

$y = x^2 - 5$ $C = -5$

частные решения

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения.

Интегрируя дифференциальное уравнения, необходимо всегда проверять, не были ли потеряны в процессе преобразования какие-либо решения.

Решение $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т.е. через каждую точку кривой $y = \psi(x)$ проходит еще хотя бы одна, отличная от $y = \psi(x)$, интегральная кривая), называется ***особым***.

Особое решение не входит в общее решение дифференциального уравнения, оно всегда «теряется» в процессе интегрирования.

§ 3. Методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

Используем другое обозначение производной:

$$y' = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx$$

Пример.

$$y' = \frac{1}{y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y^2 dy}{1} = \frac{dx}{1} \Rightarrow y^2 dy = dx$$

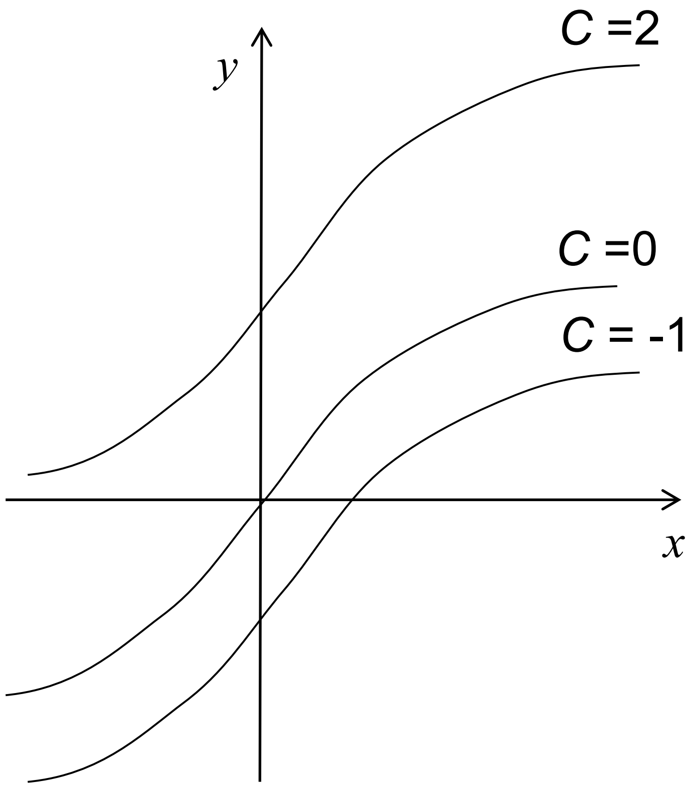
$$\int y^2 dy = \int dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int dx = x + C$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} = x + C}$$ – общий интеграл

$$\boxed{y = \sqrt[3]{3(x+C)}}$$ – общее решение



Рассмотрим уравнение

$$y' = f(ax + by + c),$$

где a, b и c – некоторые числа.

Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x) = ax + by + c$.

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right)$$

Подставляем:

$$\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a$$

Тогда $$\frac{dz}{bf(z)+a} = dx \quad \text{и} \quad \int\frac{dz}{bf(z)+a} = x + C.$$

Пример 2.

$$y' = \frac{y+1}{x-1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$dx = \frac{df(x)}{f'(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x-1} \Rightarrow \frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1} \Rightarrow \int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}$$

$$\int \frac{d(y+1)}{(y+1)\cdot(y+1)'} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)\cdot(x-1)'} \Rightarrow \int \frac{d(y+1)}{(y+1)} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)}$$

$$\ln|y+1| = \ln|x-1| + \ln C$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$\ln|y+1| = \ln(|x-1|\cdot C) \Rightarrow \boxed{y+1 = (x-1)\cdot C - 1}$$

– общее решение

Пример 3.

$$y' = -\frac{y}{x}, \qquad \boxed{y(4) = 1}$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

$$-\ln|x| = (-1)\ln|x| = \ln(|x|^{-1}) = \ln\frac{1}{|x|}$$

$$b\ln a = \ln(a^b)$$

$$\ln|y| = \ln\frac{1}{|x|} + \ln C = \ln\frac{C}{|x|} \Rightarrow y = \frac{C}{x}$$ – общее решение

$$1 = \frac{C}{4} \Rightarrow C = 4$$

$$\boxed{y = \frac{4}{x}}$$ – частное решение

Пример 4.

$$(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$$

дифференциальная форма записи уравнения

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0$$

$$y(1+x)dx=-x(1-y)dy$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$$

$$\int dx=x+C$$

Разделим уравнение на xy:

$$\frac{(1+x)dx}{x}=-\frac{(1-y)dy}{y} \Rightarrow \int\frac{(1+x)dx}{x}=-\int\frac{(1-y)dy}{y} \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x}\right)dx=-\int\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y}\right)dy \Rightarrow \int\frac{dx}{x}+\int dx=-\int\frac{dy}{y}+\int dy$$

$$\Rightarrow \boxed{\ln|x|+x=-\ln|y|+y+C}$$ – общий интеграл

2. Однородные уравнения

Функция $M(x, y)$ называется ***однородной степени m*** (или ***измерения m***), если $\forall t \neq 0$ справедливо равенство

$$M(tx, ty) = t^m \cdot M(x, y) .$$

Подставляем в функцию $M(x, y)$: $x \to tx$ $y \to ty$

Примеры однородных функций:

$$f(x, y) = x^3 + 3x^2 y, \qquad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y)$$

называется ***однородным****, если функция $f(x,y)$ является однородной нулевой степени.*

2. Однородные уравнения

Подставим в уравнение вместо x выражение tx, вместо y выражение ty.

$$\boxed{y' = \frac{y^2 + x^2}{x^2}} \qquad \boxed{y'} = \frac{(ty)^2 + (tx)^2}{(tx)^2} = \frac{t^2y^2 + t^2x^2}{t^2x^2} = \frac{t^2(y^2 + x^2)}{t^2x^2} = \boxed{\frac{y^2 + x^2}{x^2}}$$

Если уравнение не изменилось, то это однородное уравнение.

> Однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи замены

$$t = \frac{y}{x} \qquad \text{или} \qquad y = tx \qquad y' = (tx)' = t'x + tx' = t'x + t$$

$$y' = t'x + t \qquad dy = xdt + tdx$$

Пример.

$\boxed{xy' = y + x}$ Проверяем, однородное ли уравнение.
Подставляем вместо $x \to tx$, вместо $y \to ty$.

$$txy' = ty + tx \quad \Rightarrow \quad txy' = t(y + x) \quad \Rightarrow \quad xy' = y + x$$

Это однородное уравнение.

$$y = tx \qquad y' = t'x + t \qquad \Rightarrow \quad x(t'x + t) = tx + x \quad \Rightarrow \quad t'x + t = t + 1$$

$t'x = 1$ – уравнение с разделяющимися переменными

$$t' = \frac{dt}{dx} \qquad \frac{dt}{dx}x = 1 \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \int dt = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow$$

$$t = \ln|x| + C \qquad t = \frac{y}{x} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{y}{x} = \ln|x| + C}$$ – общий интеграл

$$\boxed{y = x(\ln|x| + C)}$$ – общее решение

Пример 2.

$$\boxed{y' + \frac{x+y}{x+2y} = 0} \qquad y' + \frac{tx+ty}{tx+2ty} = 0 \Rightarrow y' + \frac{t(x+y)}{t(x+2y)} = 0 \quad \Rightarrow y' + \frac{x+y}{x+2y} = 0$$

однородное уравнение

$$y = tx$$

$$y' = t'x + t$$

$$t'x + t + \frac{x+tx}{x+2tx} = 0 \quad \Rightarrow \quad t'x + t + \frac{1+t}{1+2t} = 0$$

с разделяющимися переменными

$$t' = \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dt}{dx}x + \frac{t(1+2t)+1+t}{1+2t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx}x = -\frac{2t^2+2t+1}{1+2t}$$

$$\frac{(1+2t)dt}{2t^2+2t+1} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \quad \int \frac{\cancel{(1+2t)}d(2t^2+2t+1)}{(2t^2+2t+1)\ \cancel{(4t+2)}} = -\int\frac{dx}{x}$$

$$2$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{2}\ln|2t^2+2t+1| = -\ln|x| + \ln C$$

$$b\ln a = \ln(a^b) \qquad \ln a + \ln b = \ln(a\cdot b)$$

$$\ln(2t^2+2t+1)^{1/2} = \ln(|x|^{-1}\cdot C) \Rightarrow \sqrt{2t^2+2t+1} = \frac{C}{x} \Rightarrow x\sqrt{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\frac{y}{x} + 1} = C$$

$$\sqrt{2y^2+2yx+x^2} = C \Rightarrow \quad \boxed{2y^2+2yx+x^2 = C}$$ – общий интеграл

Пример 3.

$\boxed{x dy} - y \boxed{dx} = y \boxed{dy}$ $\quad \cancel{t}xdy - \cancel{t}ydx = \cancel{t}ydy$ $\quad$ однородное уравнение

$t = \dfrac{y}{x}$ $\quad y = tx$ $\quad dy = xdt + tdx$ $\quad x(xdt + tdx) - txdx = tx(xdt + tdx)$

$t = \dfrac{x}{y}$ $\quad x = ty$ $\quad dx = ydt + tdy$ $\quad tydy - y(ydt + tdy) = ydy$

$$tdy - ydt - tdy = dy$$

$$-ydt = dy \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad \int dt = -\int \frac{dy}{y} \quad \Rightarrow \quad t = -\ln|y| + C$$

$\boxed{\dfrac{x}{y} = -\ln|y| + C}$ – общий интеграл

3. Линейные уравнения и уравнения Бернулли

$y' + p(x)y = f(x)$ – линейное уравнение

$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n$ – уравнение Бернулли

$n \neq 0 \quad n \neq 1$

$$xy' + 2y - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + \frac{2y}{x} - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad y' + \underbrace{\frac{2y}{x}}_{p(x)} = \underbrace{x^3}_{f(x)}$$

линейное уравнение

$$xy' - y = 3x^2\sqrt{y} \quad \Rightarrow \quad y' - \frac{1}{x}y = 3xy^{1/2}$$

$p(x) = -\dfrac{1}{x}$

$f(x) = 3x$

$n = 1/2$

уравнение Бернулли

$y' + p(x)y = f(x)$ – линейное уравнение

$y' + p(x)y = f(x) \cdot y^n$ – уравнение Бернулли

Линейные уравнения и уравнения Бернулли приводятся к двум уравнениям с разделяющимися переменными

Ищем решение в виде произведения двух функций:

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y' = (uv)' \quad \Rightarrow \quad y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + p(x)uv = f(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{u'v} + u\underbrace{(v' + p(x)v)}_{0} = \boxed{f(x)}$$

$v' + p(x)v = 0$ – находим функцию v

$u'\boxed{v} = f(x)$ – находим функцию u

Пример 1.

$$xy' + 2y - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y' + \frac{2y}{x} = x^3} \qquad y' + p(x)y = f(x)$$

линейное уравнение $\quad y = uv \qquad y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' + \frac{2uv}{x} = x^3 \quad \Rightarrow \boxed{u'v} + u\underbrace{\left(v' + \frac{2v}{x}\right)}_{0} = \boxed{x^3}$$

$$b\ln a = \ln(a^b)$$

1) $v' + \dfrac{2v}{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{2v}{x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{v} = -2\dfrac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = -2\ln|x|$

$$v = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{1}{x^2}}$$

2) $u'v = x^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{u'}{x^2} = x^3 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = x^5 \quad \Rightarrow \boxed{u = \dfrac{x^6}{6} + C}$

$$y = uv \quad \Rightarrow \quad y = \left(\frac{x^6}{6} + C\right)\cdot\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = \frac{x^4}{6} + \frac{C}{x^2}}$$ – общее решение

Пример 2. Найти решение задачи Коши для уравнения

$xy' - y = 3x^2\sqrt{y}$, при начальном условии $y(1) = 0$.

$$\boxed{y' - \frac{1}{x}y = 3xy^{1/2}}$$

$y' + p(x)y = f(x)\cdot y^n$ уравнение Бернулли

$y = uv$

$y' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = 3x(uv)^{1/2} \Rightarrow \boxed{u'v} + u\underbrace{(v' - \frac{v}{x})}_{0} = \boxed{3x(uv)^{1/2}}$$

1) $$v' - \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = \ln|x| \Rightarrow \boxed{v = x}$$

2) $$u'v = 3x(uv)^{1/2} \Rightarrow u'x = 3xu^{1/2}x^{1/2} \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3u^{1/2}x^{1/2} \Rightarrow$$

$$\frac{du}{u^{1/2}} = 3x^{1/2}dx \Rightarrow \int u^{-1/2}du = 3\int x^{1/2}dx \Rightarrow \frac{u^{1/2}}{1/2} = 3\frac{x^{3/2}}{3/2} + C \Rightarrow$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\sqrt{u} = \sqrt{x^3} + C \Rightarrow \boxed{u = (\sqrt{x^3} + C)^2}$$

Пример 2. Найти решение задачи Коши для уравнения

$xy' - y = 3x^2\sqrt{y}$, при начальном условии $\boxed{y(1) = 0.}$

$$y' - \frac{1}{x}y = 3xy^{1/2} \qquad \boxed{y' + p(x)y = f(x)\cdot y^n} \qquad \text{уравнение Бернулли}$$

$$v = x \qquad \boxed{y = uv}$$

$$u = (\sqrt{x^3} + C)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{y = x(\sqrt{x^3} + C)^2} \text{ – общее решение}$$

$$0 = 1(\sqrt{1^3} + C)^2 \Rightarrow 0 = (1 + C)^2 \Rightarrow 0 = 1 + C \Rightarrow C = -1$$

$$\boxed{y = x(\sqrt{x^3} - 1)^2} \text{ – частное решение}$$

4. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение $$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = 0$$
называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x\,,y)$, то есть если
$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy = du(x\,,y)\ .$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах имеет вид $$u(x\,,y) = C\ .$$

Задачи:

1) научиться определять, когда выражение
$$M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$$
является полным дифференциалом;
2) научиться находить функцию $u(x\,,y)$, зная ее полный дифференциал.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ *определены и непрерывны в области* D *плоскости* xOy *и имеют в ней непрерывные частные производные*

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad и \quad \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, *необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области* D *выполнялось условие*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1. *Необходимость.* Пусть $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$.

Покажем, что $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Но $du(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy \quad\Rightarrow\quad \boxed{M(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial x}},\ \boxed{N(x,y)=\dfrac{\partial u}{\partial y}}.$

Тогда $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$.

По условию теоремы $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ – непрерывные $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\quad\Rightarrow\quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

2. *Достаточность.* Пусть $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}.$

Найдём такую функцию $u(x,y)$, что

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y),$$

то есть для которой $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y)}$, $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y)}$.

Сначала найдём такую функцию $u(x,y)$, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y),$

для этого проинтегрируем это равенство по x:

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y).$$

Теперь необходимо подобрать функцию $\varphi(y)$, такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + \varphi(y)\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = N(x,y) \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)}$$

Следовательно, искомая функция $\varphi(y)$ будет существовать, если выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ не зависит от x.

Убедимся в этом, продифференцировав его по x,
в результате дифференцирования должен получиться ноль.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(M(x,y)\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\varphi(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C.$$

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y)=$$

$$=\int M(x,y)dx+\int\left[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy+C.$$

§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Общий вид дифференциального уравнения:

$$F\,(\,x, y, y', y'', \,\ldots, y^{(n)}) = 0$$

x – независимая переменная,

$y(x)$ – искомая функция,

F – заданная функция $(n + 2)$ переменных.

$$y^{(n)} = f\,(x, y\,, y', \,\ldots, y^{(n-1)})$$

уравнение, ***разрешённое относительно старшей производной***.

$$y'' = \ln x - \ln y + \sqrt{y' + 1}$$

$$x + y' + 3y'' - y + \sin(y'') = 0$$

Интегрирование дифференциального уравнения в общем случае приводит к бесконечному множеству решений.

Задача Коши. Найти решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_{00}, \;\; y'(x_0) = y_{10}, \;\; y''(x_0) = y_{20}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{(n-1)0}$$

начальные условия

$xy'' + x(y')^2 - y' = 0,$ $\boxed{y(2) = 2, \;\; y'(2) = 1}$ – задача Коши

Теорема (существования и единственности решения задачи Коши).

Пусть для уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

выполняются два условия:

1) *функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *непрерывна как функция* $(n+1)$*-ой переменной* $x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ *в некоторой области* D $(n+1)$*-мерного пространства*;

2) *функция* $f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ *имеет в этой области* D *ограниченные частные производные по переменным* $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n-1}) \in D$ *существует, и притом единственное, решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения, определенное в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_{01}, \varphi''(x_0) = y_{02}, \dots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{0n-1}.$$

Замечание. Единственность решения задачи Коши для уравнения n-го порядка ($n > 1$) НЕ ОЗНАЧАЕТ, что через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ плоскости xOy проходит одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$.

Кривых через точку M_0 проходит бесконечное множество, а единственность означает, что они различаются набором значений $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, …, $y^{(n-1)}(x_0)$.

Общее решение дифференциального уравнения первого порядка:
$$y = \varphi(x, C)$$

Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка:
$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения n-го порядка:
$$\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$$

§ 5. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

1. $F(x, y^{(n)}) = 0$ Искомая функция: $y = y(x)$

n-кратное интегрирование

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$ Искомая функция: $y = y(x)$

Подстановка: $y^{(k)} = t(x)$

$$y^{(k+1)} = t'(x) \quad \ldots \quad y^{(n)} = t^{(n-k)}(x)$$

3. $F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$ Искомая функция: $y = y(x)$

Подстановка: $y' = p(y)$

$$y'' = p' \cdot y' = p' \cdot p$$

$$\ldots$$

1. $F(x, y^{(n)}) = 0$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' = \ln x$

$$y'' = (y')' = \frac{dy'}{dx} = \ln x \Rightarrow \int d(y') = \int \ln x dx \Rightarrow$$

$$y' = \int \underbrace{\ln x}_{u} \underbrace{dx}_{dv} = \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx & v = x \end{matrix} \right| = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C_1$$

$$y' = x \ln x - x + C_1 \Rightarrow y = \int x \ln x dx - \int x dx + \int C_1 dx \Rightarrow \left| \begin{matrix} u = \ln x & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right|$$

$$y = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{\cancel{x^2}}{2} \cdot \frac{dx}{\cancel{x}} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2 =$$

$$\frac{1}{2} \int x dx$$

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}$$ – общее решение

2. $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$

Подстановка $y' = t(x)$ $\Rightarrow y'' = t'$

$$t' = \frac{t}{x} + x \;\Rightarrow\; t' - \frac{t}{x} = x$$ – линейное относительно t $\Rightarrow$ $t = uv$,

$t' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = x \;\Rightarrow\; \begin{cases} v' = \dfrac{v}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{v}{x} \Rightarrow \dfrac{dv}{v} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x \Rightarrow \\ u'v = x \end{cases}$$

$\boxed{v = x}$

$$u'x = x \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx \Rightarrow u = x + C_1$$

$$t = uv = x(x + C_1) \;\Rightarrow y' = x(x + C_1) \Rightarrow \int dy = \int (x^2 + xC_1)dx$$

$$\boxed{y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}C_1 + C_2}$$ – общее решение

3. $F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $yy'' - yy'\ln y = (y')^2$

Подстановка $y' = p(y)$ $\Rightarrow y'' = p'(y)\cdot y' = p'(y)\cdot p$

$$yp'p - yp\ln y = (p)^2 \Rightarrow \begin{cases} yp' - y\ln y = p \\ p = 0 \quad \Rightarrow y' = 0 \quad \Rightarrow \boxed{y = C} \end{cases}$$

$yp' = p + y\ln y \qquad p' - \dfrac{p}{y} = \ln y$ – линейное относительно p $\quad p = uv, \quad p' = u'v + uv'$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} = \ln y \Rightarrow \begin{cases} v' = \dfrac{v}{y} \Rightarrow \quad \dfrac{dv}{dy} = \dfrac{v}{y} \Rightarrow \ln v = \ln y \Rightarrow \boxed{v = y} \\ u'v = \ln y \end{cases}$$

$$u'y = \ln y \Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{\ln y}{y} \Rightarrow \int du = \int \frac{\ln y\, dy}{y} \Rightarrow u = \int \ln y\, d(\ln y) \Rightarrow u = \frac{1}{2}\ln^2 y + C_1$$

$$p = uv = y\left(\frac{1}{2}\ln^2 y + C_1\right) \Rightarrow 2\frac{dy}{dx} = y\left(\ln^2 y + 2C_1\right) \Rightarrow$$

$p = y'$

$$\int \frac{2d\ln y}{\cancel{y}\left(\ln^2 y + 2C_1\right)\cdot\frac{1}{\cancel{y}}} = \int dx \Rightarrow \boxed{\frac{2}{\sqrt{2C_1}}arctg\frac{\ln y}{\sqrt{2C_1}} = x + C_2}$$ – общий интеграл

§ 6. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

$y' + p(x)y = f(x)$ – линейное уравнение

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка *называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции y и ее производных y', y'', …, $y^{(n)}$,* то есть уравнение вида

$$p_0(x)\cdot y^{(n)} + p_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\cdot y' + p_n(x)\cdot y = g(x),$$

где $p_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) и $g(x)$ – заданные функции.

Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение называется ***линейным однородным***.

Если $g(x) \not\equiv 0$, то уравнение называется ***линейным неоднородным*** (или ***уравнением с правой частью***).

Так как $p_0(x) \not\equiv 0$, то уравнение можно записать в виде:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) .$$

Такое уравнение называют ***приведенным***.

В дальнейшем будем работать только с приведенным уравнением.

Кроме того, будем предполагать, что $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $f(x)$ непрерывны на некотором отрезке $[a;b]$.

При этих условиях справедлива теорема существования и единственности решения задачи Коши.

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$$

Теорема (свойство решений линейного однородного дифференциального уравнения).

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями линейного однородного дифференциального уравнения, то

$$y_1(x) + y_2(x) \text{ и } C \cdot y_1(x) \quad (\forall C \in \mathbb{R})$$

тоже является решениями этого уравнения.

Доказательство

1) Покажем, что $y_1 + y_2$ является решением.

$$(y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x) \cdot (y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot (y_1 + y_2)' + a_n(x) \cdot (y_1 + y_2) =$$

$$[y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1] + [y_2^{(n)} + a_1 y_2^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_2' + a_n y_2] \equiv$$

$$\equiv 0 + 0 \equiv 0$$

2) Покажем, что $C \cdot y_1$ является решением.

$$(C \cdot y_1)^{(n)} + a_1(x) \cdot (C \cdot y_1)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot (C \cdot y_1)' + a_n(x) \cdot (C \cdot y_1) =$$

$$C \cdot [y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_1' + a_n y_1] \equiv C \cdot 0 \equiv 0$$

Следствие. *Если y_1 , y_2 , … , y_n – решения линейного однородного дифференциального уравнения, то их линейная комбинация*

$$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$$

тоже является решением этого уравнения для любых постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0$$

$C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n$ выражение, содержащее n констант и являющееся решением.

Вопрос: будет ли это выражение являться общим решением?

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ – $(n-1)$ раз дифференцируемые на $[a;b]$ функции. Запишем для них определитель порядка n вида

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & y_3' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_3^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Определитель W – функция, определенная на $[a;b]$.

Его обозначают $W(x)$ или $W[y_1, y_2, \dots, y_n]$ и называют ***определителем Вронского (вронскианом)*** функций $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Теорема (необходимое условие линейной зависимости функций). *Если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ $n-1$ раз дифференцируемы и линейно зависимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского на $[a;b]$ тождественно равен нулю.*

Доказательство

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ линейно зависимы на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по определению существуют числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a;b].$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n$, где $\beta_i = -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_1}$.

Тогда $y_1' = \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n', \quad \ldots, \quad y_1^{(n-1)} = \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)}$.

Получаем, что $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] =$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 + \ldots + \beta_n y_n & y_2 & \ldots & y_n \\ \beta_2 y_2' + \ldots + \beta_n y_n' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \beta_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + \beta_n y_n^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = 0$$

Доказательство

Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно зависимы на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по определению существуют числа α_1, α_2, не все равные нулю одновременно, такие, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in [a;b].$$

Пусть $\alpha_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = \beta_2 y_2$, где $\beta_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Тогда $y_1' = \beta_2 y_2'$.

Получаем, что $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_2 y_2 & y_2 \\ \beta_2 y_2' & y_2' \end{vmatrix} = 0$

Теорема (достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка).

Если n решений линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1\ ,\ y_2\ ,\ \dots\ ,\ y_n\ ]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.

Доказательство

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$, такое, что $W[y_1, y_2, \dots, y_n](x_0) = 0$.

Обозначим

$$y_1(x_0) = y_{10}, \qquad y_2(x_0) = y_{20}, \qquad \dots, \quad y_n(x_0) = y_{n0};$$

$$y_1'(x_0) = y_{10}^{(1)}, \qquad y_2'(x_0) = y_{20}^{(1)}, \qquad \dots, \quad y_n'(x_0) = y_{n0}^{(1)};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_1^{(n-1)}(x_0) = y_{10}^{(n-1)}, \quad y_2^{(n-1)}(x_0) = y_{20}^{(n-1)}, \quad \dots, \quad y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(n-1)}.$$

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений, у которой коэффициентами являются полученные числа.

$$\begin{cases} C_1 y_{10} + C_2 y_{20} + \ldots + C_n y_{n0} = 0, \\ C_1 y_{10}^{(1)} + C_2 y_{20}^{(1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(1)} = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1 y_{10}^{(n-1)} + C_2 y_{20}^{(n-1)} + \ldots + C_n y_{n0}^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Определитель матрицы A этой системы

$$|A| = W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x_0) = 0 \quad \Rightarrow$$

система имеет ненулевое решение $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рассмотрим функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$.

Согласно следствию 2, y – решение уравнения (9), причём

$y(x_0) = 0$ (из 1-го уравнения системы)

$y'(x_0) = 0$ (из 2-го уравнения системы)

$\ldots$

$y^{(n-1)}(x_0) = 0$ (из (n–1)-го уравнения системы)

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 . \qquad (9)$$

Решением этого уравнения также является функция $y(x) \equiv 0$, которая удовлетворяет тем же самым начальным условиям:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Так как по теореме существования и единственности решения, начальные условия для линейного уравнения определяют единственное решение, получаем:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \equiv 0.$$

Коэффициенты $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не все равны нулю одновременно

$\Rightarrow$ противоречие с тем, что $y_1, y_2, \ldots , y_n$ линейно независимы.

Теорема (достаточное условие линейной независимости решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка).

Если n решений линейно независимы на $[a;b]$, то их определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ не может обратиться в нуль ни в одной точке этого промежутка.

Доказательство

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$ линейно независимы на $[a;b]$ и существует $x_0 \in [a;b]$, такое, что $W[y_1, y_2](x_0) = 0$.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Определитель матрицы A этой системы

$$|A| = W[y_1, y_2](x_0) = 0 \Rightarrow$$

система имеет ненулевое решение C_1, C_2.

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = 0 \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$.

Согласно теореме она является решением уравнения, причём

$y(x_0) = 0$ (из 1-го уравнения системы)

$y'(x_0) = 0$ (из 2-го уравнения системы)

Но решением уравнения также является функция $y(x) \equiv 0$, которая удовлетворяет тем же самым начальным условиям.

Тогда по теореме существования и единственности решения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \equiv 0.$$

Коэффициенты C_1, C_2 не все равны нулю одновременно

$\Rightarrow$ противоречие с тем, что y_1, y_2 линейно независимы.

Следствие (двух предыдущих теорем).

Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, … , $y_n(x)$ решения линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Тогда

1) *либо* $W[y_1 , y_2 , \dots , y_n] \equiv 0$ *и это означает, что решения линейно зависимы;*
2) *либо* $W[y_1 , y_2 , \dots , y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$, *и это означает, что решения линейно независимы.*

Система n линейно независимых решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называется его ***фундаментальной системой решений***.

Теорема. Если y_1, y_2, … , y_n – фундаментальная система решений линейного однородного уравнения n-го порядка, то его общее решение имеет вид:

$$\boxed{y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n .}$$

Линейные однородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = 0$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ – некоторые действительные числа.

Решения уравнения будем искать в виде $y = e^{\lambda x}$, где λ – некоторая постоянная.

Имеем:

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}, \quad y''' = \lambda^3 \cdot e^{\lambda x}, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = \lambda^n \cdot e^{\lambda x}.$$

Подставляем $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ в уравнение и получаем:

$$\lambda^n \cdot e^{\lambda x} + a_1 \cdot \lambda^{n-1} \cdot e^{\lambda x} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda \cdot e^{\lambda x} + a_n \cdot e^{\lambda x} = 0,$$

$$\Rightarrow \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n = 0.$$

Полученное уравнение называется ***характеристическим уравнением*** дифференциального уравнения, а его корни – ***характеристическими корнями***.

Замечания.

1. Формально характеристическое уравнение получается из исходного заменой производных искомой функции на соответствующие степени λ, а самой функции – на $\lambda^0 = 1$.

2. Полученное уравнение – алгебраическое уравнение n-й степени.

$\Rightarrow$ оно имеет n корней, но

1) каждый корень считается столько раз, какова его кратность;

2) корни могут быть комплексными (причем, комплексные корни попарно сопряжены).

Следовательно, функции вида $e^{\lambda x}$ в общем случае не дадут всю фундаментальную систему решений.

Комплексные числа

$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$ – решений нет

$x = \pm\sqrt{-1}$

Выражение $\sqrt{-1}$ принято обозначать буквой i :

$i = \sqrt{-1}$ – ***мнимая единица*** $\qquad i^2 = -1$

Рассмотрим выражения вида $a + bi$, где a и b – произвольные числа.

$a + bi$ – ***комплексное число***

a – ***действительная часть*** комплексного числа

b – ***мнимая часть*** комплексного числа

Используя комплексные числа, можно решить любое квадратное уравнение.

$i = \sqrt{-1}$

1. $x^2 + 4 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = -4 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1} = \pm 2i$

2. $x^2 - 2x + 2 = 0$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$x_1 = 1 + i \qquad x_2 = 1 - i$$

Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются ***сопряженными***.

Если дискриминант квадратного уравнения меньше 0, то это уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

Теорема.

Пусть λ *– характеристический корень. Тогда*

1) *если* $\lambda \in \mathbb{R}$ *и* λ *– корень кратности* k, *то решениями дифференциального уравнения являются функции*

$$e^{\lambda x},\ x \cdot e^{\lambda x},\ x^2 \cdot e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1} \cdot e^{\lambda x};$$

2) *если* $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}$ *и* λ *– корень кратности* k, *то* $\alpha - \beta i$ *тоже является корнем кратности* k, *а решениями дифференциального уравнения являются функции*

$$e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad xe^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x,\quad \dots,\quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x$$

$$e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad xe^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad x^2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x,\quad \dots,\quad x^{k-1} e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x\ .$$

Найденные таким образом n *решений образуют фундаментальную систему решений.*

$$y'' + py' + qy = 0$$

1. Составляем ***характеристическое уравнение***.

$y'' \to k^2, \quad y' \to k, \quad y$ не пишем

$$k^2 + pk + q = 0$$

$$y'' - 3y' + 2y = 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - 3k + 2 = 0$$

2. Решаем характеристическое уравнение.

$k_1 \neq k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$
$k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}$
$a \pm bi$	$y_1 = e^{ax} \cos bx, \quad y_2 = e^{ax} \sin bx$

3. Записываем общее решение:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

$y'' + py' + qy = 0$

$\boxed{k_1 \neq k_2}$	$\boxed{y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}}$
$k_1 = k_2 = k$	$y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}$
$a \pm bi$	$y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' - 5y = 0$

Составляем характеристическое уравнение:

$$y'' \to k^2, \; y' \to k, \quad y \text{ не пишем} \quad \Rightarrow \quad k^2 + 4k - 5 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot (-5) = 36$$

$$k = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \qquad k_1 = \frac{-4+6}{2} = 1 \qquad k_2 = \frac{-4-6}{2} = -5$$

$$y_1 = e^{x}, \quad y_2 = e^{-5x} \qquad\qquad y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x}}$

$k_1 \ne k_2$	$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}$
$\boxed{k_1 = k_2 = k}$	$\boxed{y_1 = e^{kx}, \quad y_2 = xe^{kx}}$
$\boxed{a \pm bi}$	$\boxed{y_1 = e^{ax}\cos bx, \quad y_2 = e^{ax}\sin bx}$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 4y = 0$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k+2)^2 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -2$

$y_1 = e^{-2x} \quad y_2 = xe^{-2x}$ Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{-2x} + C_2 xe^{-2x}}$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 5y = 0$

Характеристическое уравнение: $k^2 + 4k + 5 = 0 \Rightarrow D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4$

$$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{-1}}{2} = -2 \pm \sqrt{-1} = -2 \pm i \qquad a = -2, \quad b = 1$$

$y_1 = e^{-2x}\cos x, \quad y_2 = e^{-2x}\sin x$

Общее решение: $\boxed{y = C_1 e^{-2x}\cos x + C_2 e^{-2x}\sin x}$

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x)$$

$a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ – некоторые функции.

Рассмотрим соответствующее ему однородное уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = 0 .$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений этого уравнения. Тогда его общее решение имеет вид

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n ,$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные.

Пусть решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением однородного, то есть имеет вид

$$y = C_1(x) \cdot y_1 + C_2(x) \cdot y_2 + \ldots + C_n(x) \cdot y_n ,$$

где $C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x)$ – некоторые функции.

Потребуем, чтобы производные y', y'', …, $y^{(n-1)}$ функции

$$y = C_1(x)\cdot y_1 + C_2(x)\cdot y_2 + \ldots + C_n(x)\cdot y_n$$

также структурно совпадали с производными функции

$$y = C_1\cdot y_1 + C_2\cdot y_2 + \ldots + C_n\cdot y_n\,,$$

$$y' = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1 + \ldots + C_n'(x)y_n\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1' + \ldots + C_n(x)y_n'\right] = \\ = C_1(x)y_1' + \ldots + C_n(x)y_n'$$

$$y'' = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1' + \ldots + C_n'(x)y_n'\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1'' + \ldots + C_n(x)y_n''\right] = \\ = C_1(x)y_1'' + \ldots + C_n(x)y_n''$$

…

$$y^{(n-1)} = \underbrace{\left[C_1'(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)}\right]}_{0} + \left[C_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}\right] = \\ = C_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}$$

$$y^{(n)} = \left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right] + \left[C_1(x)y_1^{(n)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}\right]$$

Получили $(n-1)$ условий для нахождения функций $C_i(x)$.

Подставим найденные производные в исходное уравнение:

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x).$$

$$\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right] + \left[C_1(x)y_1^{(n)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n)}\right] +$$

$$+ a_1(x) \cdot (C_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n(x)y_n^{(n-1)}) + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(x) \cdot (C_1(x)y_1' + \ldots + C_n(x)y_n') +$$

$$+ a_n(x) \cdot (C_1(x)y_1 + \ldots + C_n(x)y_n) = f(x) \quad \Rightarrow$$

$$\left[C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)}\right] +$$

$$C_1(x) \cdot [\underbrace{y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_1}_{0}] + \ldots +$$

$$C_n(x) \cdot [\underbrace{y_n^{(n)} + a_1(x)y_n^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y_n}_{0}] = f(x) \quad \Rightarrow$$

$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x)$ – ещё одно условие для нахождения функций $C_i(x)$.

Таким образом, функции $C_1(x)$, $C_2(x)$, … , $C_n(x)$ должны удовлетворять системе

$$\boxed{\begin{cases} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n = 0, \\ C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \ldots + C_n'(x)y_n' = 0, \\ C_1'(x)y_1'' + C_2'(x)y_2'' + \ldots + C_n'(x)y_n'' = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = f(x). \end{cases}}$$

Это система n линейных уравнений с n неизвестными.
Ее определитель – определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$.

Так как y_1, y_2, … , y_n образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения, то по доказанному ранее $W[y_1, y_2, \ldots, y_n] \neq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

$\Rightarrow$ система совместна и имеет единственное решение:

$$\boxed{C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).}$$

$$C_i'(x) = \psi_i(x), \quad (i = \overline{1,n}).$$

Откуда получаем

$$C_i(x) = \int \psi_i(x)dx = \varphi_i(x) + C_i \,,$$

где C_i – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения тогда имеет вид

$$\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + C_i\right) y_i \,.}$$

Изложенный выше метод нахождения решения линейного неоднородного уравнения n-го порядка получил название ***метода вариации произвольных постоянных***.

Раскроем скобки в полученном решении и сгруппируем слагаемые:

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi_i(x) + C_i\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) y_i .$$

Первая сумма – общее решение однородного уравнения, вторая сумма – частное решение неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C_i = 0$).

Теорема (о структуре решения неоднородного уравнения).

Общее решение линейного неоднородного уравнения n–го порядка равно сумме общего решения соответствующего ему однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения, то есть имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x) ,$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – фундаментальная система решений соответствующего линейного однородного уравнения.

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x)$$

Доказательство

1. Покажем, что $y(x)$ является решением линейного неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) \cdot y' + a_n(x) \cdot y = f(x) .$$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right]^{(n-1)} + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x)\left[\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x) + \tilde{y}(x)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} C_i \underbrace{\left[y_i^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot y_i^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot y_i(x)\right]}_{0} +$$

$$+ \underbrace{\left[\tilde{y}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \tilde{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot \tilde{y}(x)\right]}_{f(x)} =$$

$$= 0 + f(x) = f(x)$$

$$y(x) = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2 + \ldots + C_n \cdot y_n + \tilde{y}(x)$$

2. Покажем, что любое решение $\hat{y}(x)$ неоднородного линейного уравнения может быть получено из $y(x)$ при некоторых значениях констант $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Рассмотрим разность $\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)$.

Эта функция является решением однородного уравнения.

$$\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right]^{(n)} + a_1(x)\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)\right] =$$

$$= \left[\hat{y}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \hat{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot \hat{y}(x)\right] -$$

$$- \left[\tilde{y}^{(n)}(x) + a_1(x) \cdot \tilde{y}^{(n-1)}(x) + \ldots + a_n(x) \cdot \tilde{y}(x)\right] = f(x) - f(x) = 0$$

Тогда $\hat{y}(x) - \tilde{y}(x)$ является линейной комбинацией фундаментальной системы решений этого однородного уравнения

$$\hat{y}(x) - \tilde{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \quad \Rightarrow$$

$$\hat{y}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) + \tilde{y}(x).$$

Неоднородные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

Пусть правая часть $f(x)$ линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [P_n(x) \cdot \cos\beta x + Q_m(x) \cdot \sin\beta x],$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, α и β – некоторые числа.

Теорема (о структуре частного решения).

Если правая часть линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами имеет специальный вид, то частным решением уравнения является функция вида

$$y = x^r \cdot e^{\alpha x} \cdot [A_l(x) \cdot \cos\beta x + B_l(x) \cdot \sin\beta x],$$

где $A_l(x)$ *и* $B_l(x)$ *– многочлены степени* l (неизвестные),

l *– наибольшая из степеней многочленов* $P_n(x)$, $Q_m(x)$,

r *– кратность характеристического корня* $\alpha \pm \beta i$

($r = 0$, *если* $\alpha \pm \beta i$ *не характеристический корень*).

$$y^{(n)} + a_1 \cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} \cdot y' + a_n \cdot y = f(x)$$

$$f(x) = e^{\boxed{\alpha x}}(\mathrm{P}_n \cdot \cos \boxed{\beta} x + \mathrm{Q}_m \cdot \sin \boxed{\beta} x)$$

специальная правая часть

P_n – некоторый многочлен степени n

Q_m – некоторый многочлен степени m

$\alpha,\ \beta$ – некоторые числа

Вид частного решения подобен виду правой части.

$$\overline{y} = x^{\boxed{r}} e^{\boxed{\alpha x}}(\mathrm{A}_l \cdot \cos \boxed{\beta} x + \mathrm{B}_l \cdot \sin \boxed{\beta} x)$$

$\alpha + \beta i$

1. не является корнем характеристического уравнения

$$\boxed{r = 0}$$

2. является корнем характеристического уравнения

$$\boxed{r \text{ – кратность корня}}$$

$$f(x) = e^{\boxed{\alpha x}}(P_n \cdot \cos \boxed{\beta} x + Q_m \cdot \sin \boxed{\beta} x)$$

специальная правая часть

$$\overline{y} = x^{\boxed{r}} e^{\boxed{\alpha x}}(\boxed{A_l} \cdot \cos \boxed{\beta} x + \boxed{B_l} \cdot \sin \boxed{\beta} x)$$

l – наибольшее из чисел n и m

A_l и B_l – произвольные многочлены степени l

$l = 0$ $\quad \boxed{A_l = A, \quad B_l = B}$

$l = 1$ $\quad \boxed{A_l = Ax + B, \quad B_l = Cx + D}$

$l = 2$ $\quad \boxed{A_l = Ax^2 + Bx + C, \quad B_l = Dx^2 + Ex + F}$

метод неопределённых коэффициентов

$f(x) = e^{\alpha x}(\mathrm{P}_n \cdot \cos\beta x + \mathrm{Q}_m \cdot \sin\beta x)$ $\qquad$ $\overline{y} = x^r e^{\alpha x}(\mathrm{A}_l \cdot \cos\beta x + \mathrm{B}_l \cdot \sin\beta x)$

Примеры.

$\alpha + \beta i$ не является корнем характеристического уравнения

$\boxed{r = 0}$

1. $f(x) = x\, e^{\alpha x}$ $\qquad \beta = 0 \qquad l = 1 \qquad \overline{y} = (A + Bx) \cdot e^{\alpha x}$

2. $f(x) = (1 + x^3)e^{0 \cdot x}$ $\qquad \beta = 0 \qquad l = 3 \qquad \overline{y} = (A + Bx + Cx^2 + Dx^3)$

3. $f(x) = xe^{5x}\cos 3x + e^{5x}\sin 3x = e^{5x}(\underbrace{x}_{=A_1}\cos 3x + \underbrace{1}_{=B_0} \cdot \sin 3x)$ $\qquad \alpha = 5 \quad \beta = 3$

$l = 1$ $\qquad \overline{y} = e^{5x} \cdot ([A + Bx]\cos 3x + [C + Dx]\sin 3x)$

4. $f(x) = e^{-x}\sin x \; = e^{-x}(\underbrace{1}_{=A_0} \cdot \sin x + \underbrace{0}_{=B_0} \cdot \cos x)$ $\qquad \alpha = -1 \quad \beta = 1 \quad l = 0$

$$\overline{y} = e^{-x}(A\sin x + B\cos x)$$

$$f(x)=\boxed{e^{\alpha x}}(\mathrm{P}_n\cdot\boxed{\cos\beta x}+\mathrm{Q}_m\cdot\boxed{\sin\beta x}) \qquad \bar{y}=\boxed{\cancel{x^r}}\cancel{e^{\alpha x}}(\boxed{\mathrm{A}_l}\cdot\cancel{\cos}\beta x+\boxed{\mathrm{B}_l}\cdot\cancel{\sin}\beta x)$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=2x^2-x+3$

$$y=y_{oo}+\bar{y} \qquad f(x)=\boxed{2x^2-x+3}$$

Найдем y_{oo} – общее решение однородного уравнения: $y''-6y'+9y=0$

Характеристическое уравнение: $k^2-6k+9=0\Rightarrow\ (k-3)^2=0\Rightarrow$

$$k=k_{1,2}=3\ \Rightarrow\ y_1=e^{3x}\quad y_2=xe^{3x}\ \Rightarrow\ \boxed{y_{oo}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}}$$

Найдем $\bar{y}$ – частное решение неоднородного уравнения.

$\alpha=0\quad\beta=0\quad\alpha+\beta i=0+0i=0$ – не является корнем $\Rightarrow\ r=0$

$$\begin{cases}\bar{y}=Ax^2+Bx+C\\ \bar{y}'=2Ax+B\\ \bar{y}''=2A\end{cases}\qquad 2A-6(2Ax+B)+9(Ax^2+Bx+C)=\boxed{2}x^2\boxed{-}x+\boxed{3}$$

$$\begin{array}{l|ll} x^2 & 9A=2 & A=2/9\\ x & -12A+9B=-1 & B=5/27\\ x^0 & 2A-6B+9C=3 & C=11/27\end{array}\ \Rightarrow\ \boxed{\bar{y}=\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}}$$

$$\boxed{y=y_{oo}+\bar{y}=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}+\frac{2}{9}x^2+\frac{5}{27}x+\frac{11}{27}}$$

Теорема (о наложении решений).

Если $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ – *решения соответственно уравнений*

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_2(x),$$

то функция

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

будет являться решением уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x)\cdot y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\cdot y' + a_n(x)\cdot y = f_1(x) + f_2(x).$$

Доказательство

$$\left[y_1 + y_2\right]^{(n)} + a_1(x)\left[y_1 + y_2\right]^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\left[y_1 + y_2\right] =$$

$$= \left[y_1^{(n)} + a_1(x)\cdot y_1^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y_1\right] +$$

$$+ \left[y_2^{(n)} + a_1(x)\cdot y_2^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\cdot y_2\right] = f_1(x) + f_2(x)$$

Системы дифференциальных уравнений

Пример. Найти общее решение системы $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$

$$x' = 2x + y \qquad x'' = 2x' + 3x + 4y \qquad \boxed{y = x' - 2x}$$

$$x'' = 2x' + 3x + 4(x' - 2x) \quad \Rightarrow \quad x'' = 6x' - 5x \quad \Rightarrow \quad x'' - 6x' + 5x = 0$$

Получили линейное однородное уравнение второго порядка.

$$k^2 - 6k + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (k-5)(k-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 5, k_2 = 1$$

$$x_1 = e^{5t} \quad x_2 = e^{t} \qquad \boxed{x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}} \qquad x' = (C_1 e^{5t} + C_2 e^{t})' = \boxed{5C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}}$$

$$y = \boxed{x'} - 2\boxed{x} = 5C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} - 2(C_1 e^{5t} + C_2 e^{t}) = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t}$$

$$\boxed{\begin{cases} x = C_1 e^{5t} + C_2 e^{t} \\ y = 3C_1 e^{5t} - C_2 e^{t} \end{cases}}$$