Интегрирование функции нескольких переменных

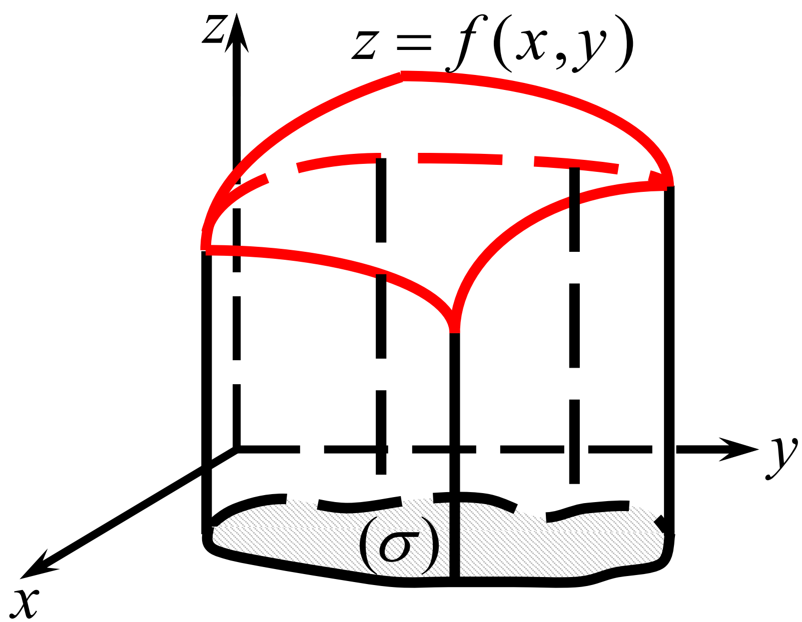
Лектор – Шерстнёва
Анна Игоревна

Глава IV. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

§7. Двойной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию двойного интеграла

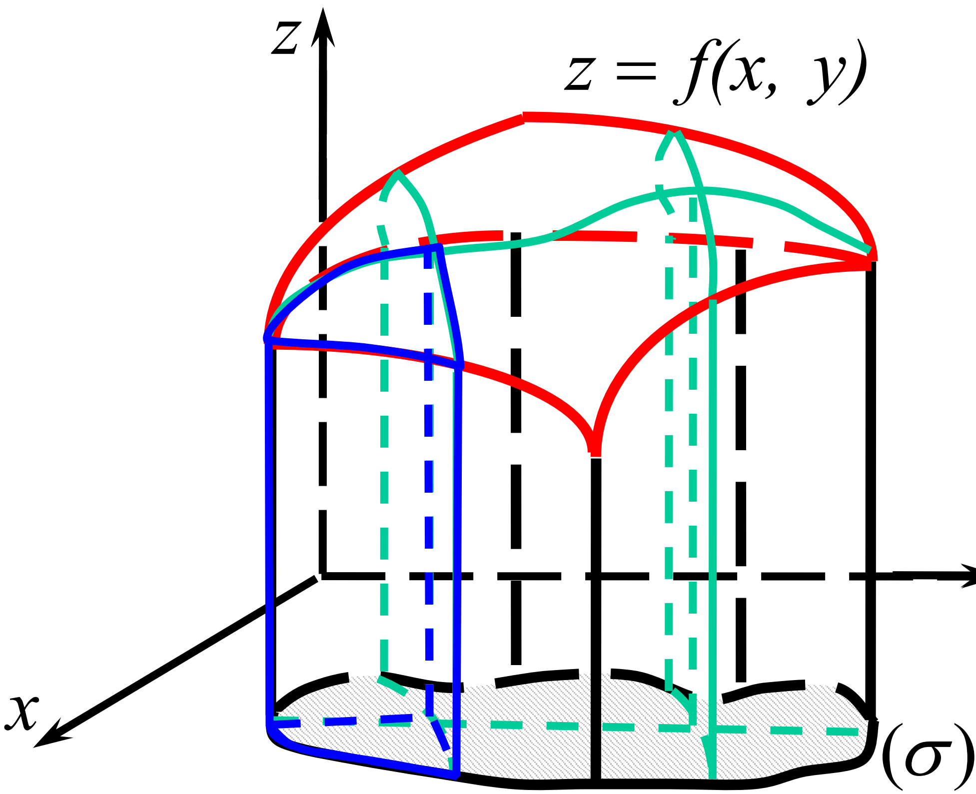
***Цилиндрическим телом с основанием* (σ)** называют область в пространстве, ограниченную областью $(\sigma)\in xOy$, поверхностью $z = f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью $\varphi(x,y) = 0$, направляющей которой является граница области (σ).

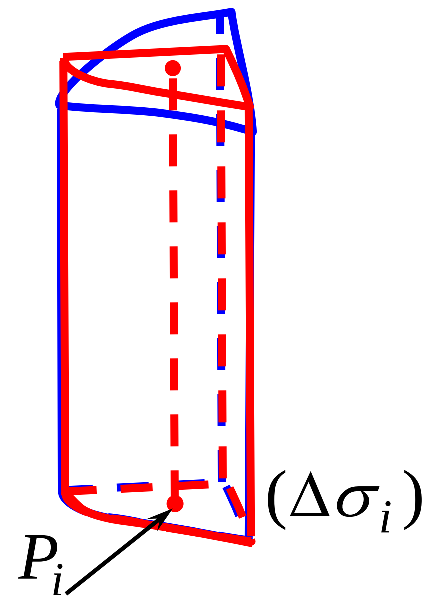


ЗАДАЧА (об объеме цилиндрического тела).

Пусть $f(x,y) \geq 0$, $\forall (x,y) \in (\sigma)$.

Найти объем V цилиндрического тела (V) .





$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$\Delta V_i \approx f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V \approx \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

$$\Rightarrow \quad V = \lim_{(\Delta\sigma_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

2. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть (σ) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в плоскости xOy, и в области (σ) задана функция $z = f(x,y)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (σ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\sigma_1), (\Delta\sigma_2), \ \ldots , (\Delta\sigma_n).$$

2. В каждой области $(\Delta\sigma_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь области $(\Delta\sigma_i)$.

Сумму

$$I_n(\Delta\sigma_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta\sigma_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y)$ по области (σ) (соответствующей данному разбиению области (σ) и данному выбору точек P_i).

Диаметром множества G будем называть наибольшее расстояние между любыми двумя точками множества G.

Пусть d_{i} – диаметр $(\Delta\sigma_{\text{i}})$, $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ *при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения области (σ) у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек P_i выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta\sigma_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\sigma_i, P_i)$ при $\lambda \to 0$, то его называют ***двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области (σ)***.

Обозначают: $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)ds$, $\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования двойного интеграла).

Если функция $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ), *то она ограничена в этой области*.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования двойного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (σ) – *квадрируемая,*
2) *функция* $f(x,y)$ *ограничена в области* (σ) *и непрерывна всюду за исключением некоторого множества точек площади нуль,*

то $f(x,y)$ *интегрируема в области* (σ).

СВОЙСТВА ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1) Геометрический смысл двойного интеграла.

Если $f(x,y)$ – неотрицательна и интегрируема в области (σ), то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = V,$$

где V – объем цилиндрического тела с основанием (σ) и ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$.

2) $$\iint\limits_{(\sigma)} dxdy = \sigma,$$

где σ – площадь области (σ).

3) Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} c\cdot f(x,y)dxdy = c\cdot\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy.$$

4) Двойной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме двойных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(\sigma)} [f_1(x,y) + f_2(x,y)]dxdy = \iint\limits_{(\sigma)} f_1(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma)} f_2(x,y)dxdy.$$

5) Если область интегрирования (σ) разбита на две части (σ_1) и (σ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_1)} f(x,y)dxdy + \iint\limits_{(\sigma_2)} f(x,y)dxdy.$$

(свойство аддитивности двойного интеграла)

6) Если всюду в области (σ) $f(x,y) > 0$ $(f(x,y) \geq 0)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy \geq 0 \right).$$

7) Если всюду в области (σ) $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$, то

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy \leq \iint\limits_{(\sigma)} \varphi(x,y)\,dxdy$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

8) Следствие свойств 7 и 2.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y)$ в области (σ), то

$$m \cdot \sigma \leq \iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy \leq M \cdot \sigma,$$

где σ – площадь области (σ).

9) Теорема о среднем для двойного интеграла.

Если функция $f(x,y)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* (σ), *то найдется такая точка* $P_0(x_0, y_0) \in (\sigma)$, *что справедливо равенство*

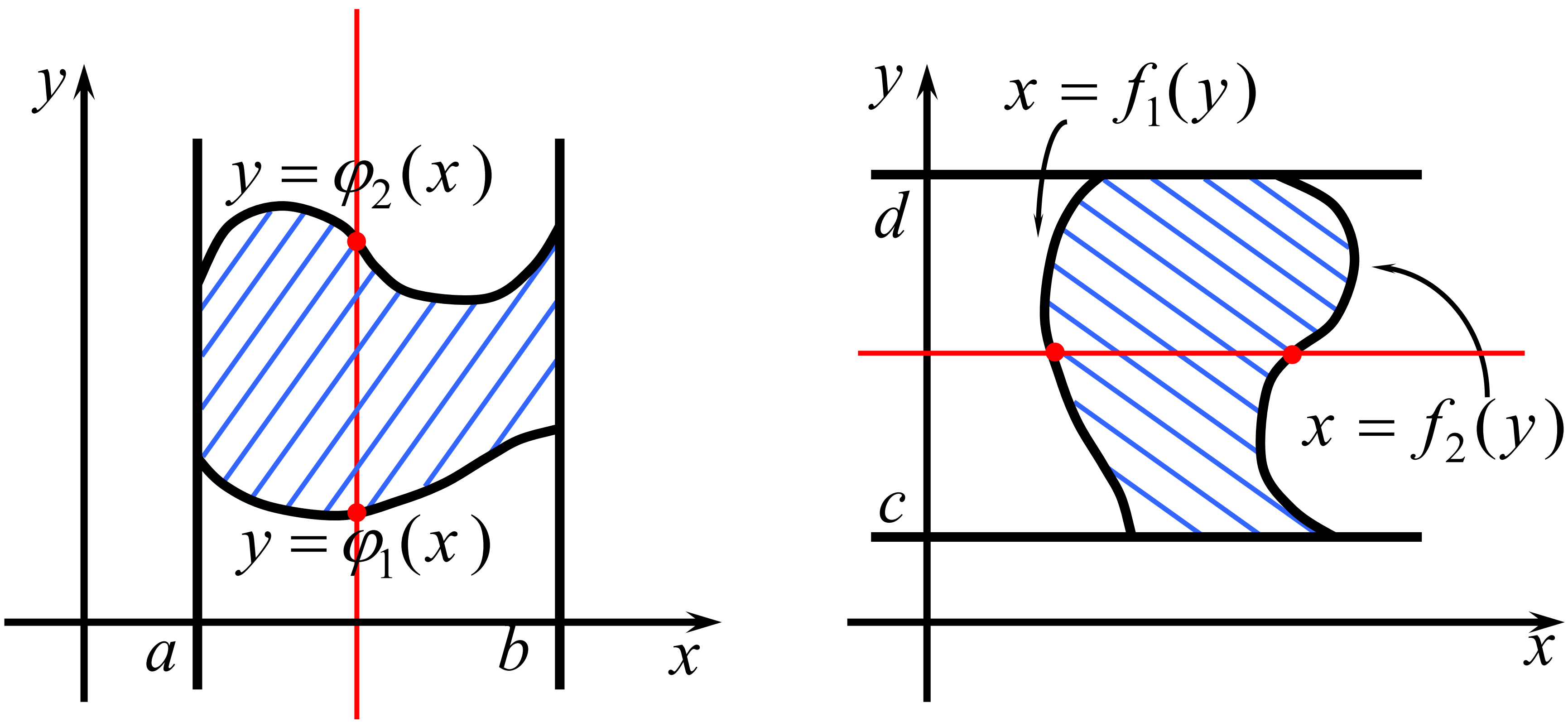
$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy = f(x_0; y_0)\cdot\sigma,$$

где σ – *площадь области* (σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление двойного интеграла

Назовем область (σ) ***правильной в направлении оси*** *Oy* (*Ox*), если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (σ) параллельно оси *Oy* (*Ox*) пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3.

Пусть функция $f(x, y)$ *интегрируема в области* (σ).

1) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Oy, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

где $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *снизу и сверху соответственно,*

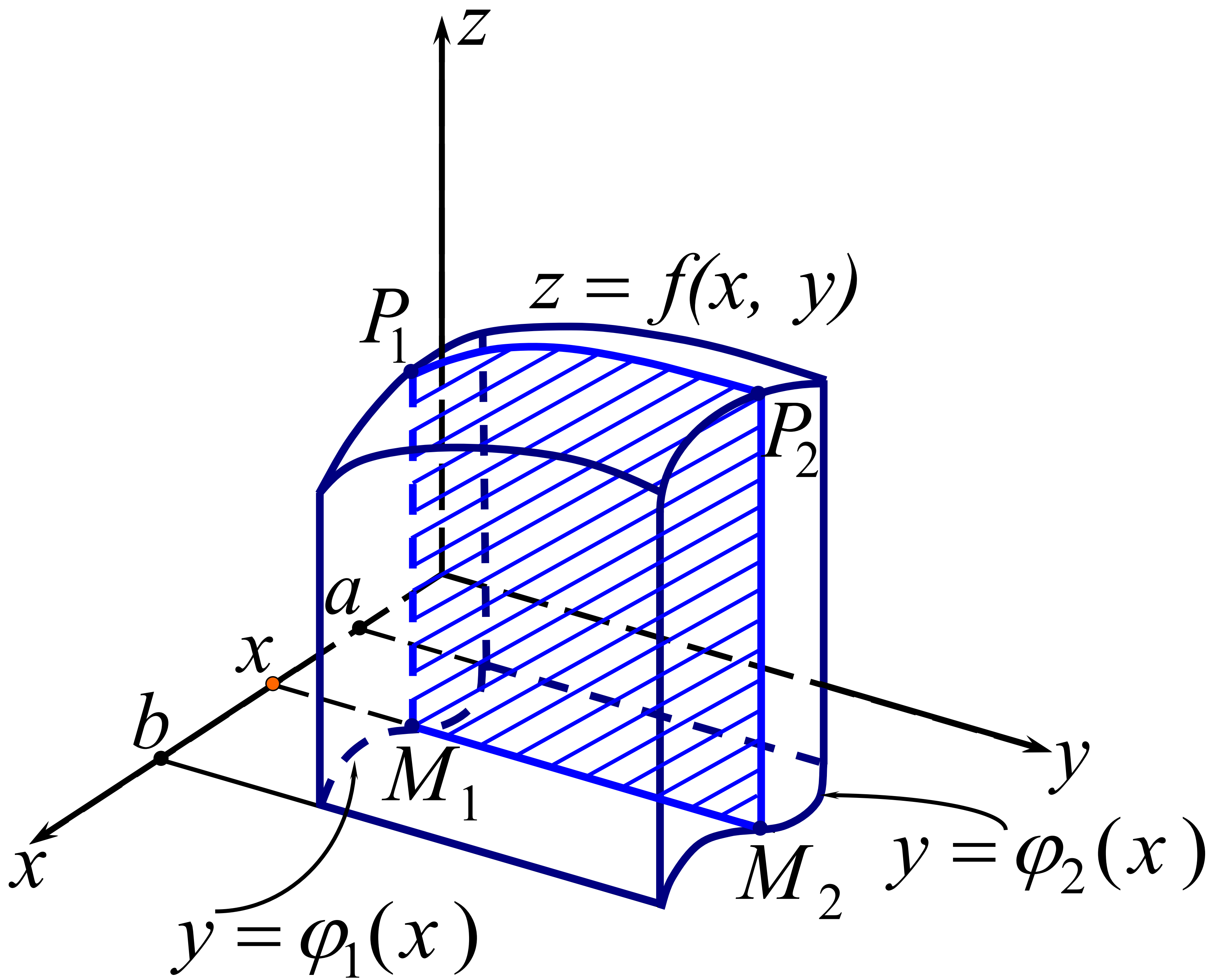
$[a;b]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Ox.

2) *Если область* (σ) *– правильная в направлении оси* Ox, *то*

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{f_1(y)}^{f_2(y)} f(x,y)dx \right) dy$$

где $x = f_1(y)$, $x = f_2(y)$ *– уравнения кривых, ограничивающих область* (σ) *слева и справа соответственно,*

$[c;d]$ *– проекция области* (σ) *на ось* Oy.


z
$z = f(x, y)$
P_1
P_2
a
x
b
M_1
M_2
y
x
$y = \varphi_2(x)$
$y = \varphi_1(x)$

4. Замена переменных в двойном интеграле

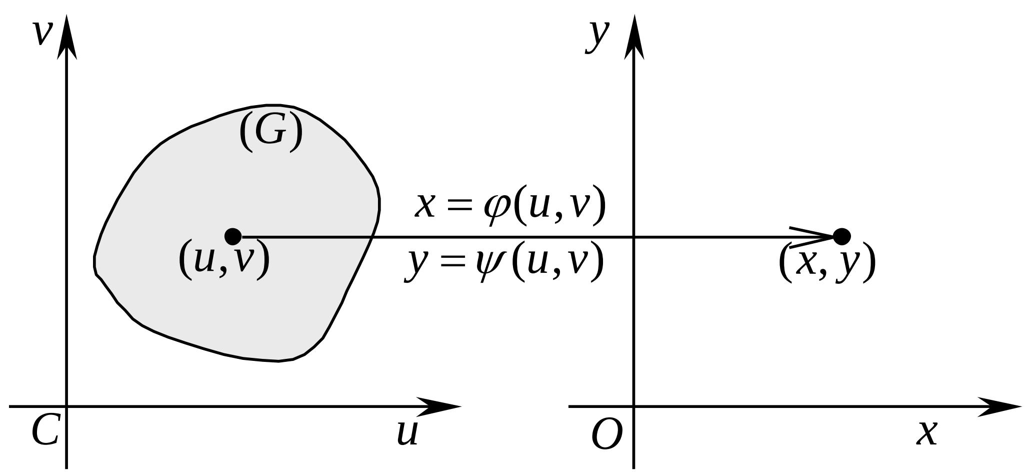
Пусть (σ) – замкнутая квадрируемая область в плоскости xOy,
$f(x,y)$ – ограничена и непрерывна в области (σ) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, площади нуль.

Тогда существует интеграл $$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)\,dxdy$$

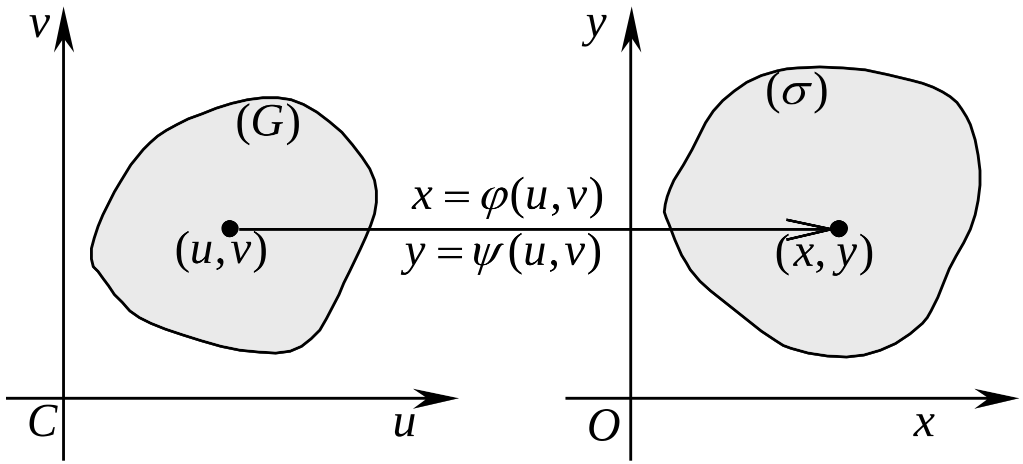
Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v),\quad y = \psi(u,v),\quad (u,v)\in(G) \qquad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1):



Пусть функции $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ такие, что каждая точка $(u,v)\in(G)$ переходит в некоторую точку $(x,y)\in(\sigma)$, и каждой точке $(x,y)\in(\sigma)$ соответствует некоторая точка $(u,v)\in(G)$.



В этом случае:

1) говорят: «если точка (u,v) пробегает область (G), то соответствующая ей точка $(x,y) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ пробегает область (σ)»;
2) функции (1) называют *отображением области (G) на область (σ)*.

Область (σ) называют *образом* области (G), область (G) – *прообразом* области (σ) при отображении (1).

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой квадрируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (σ));

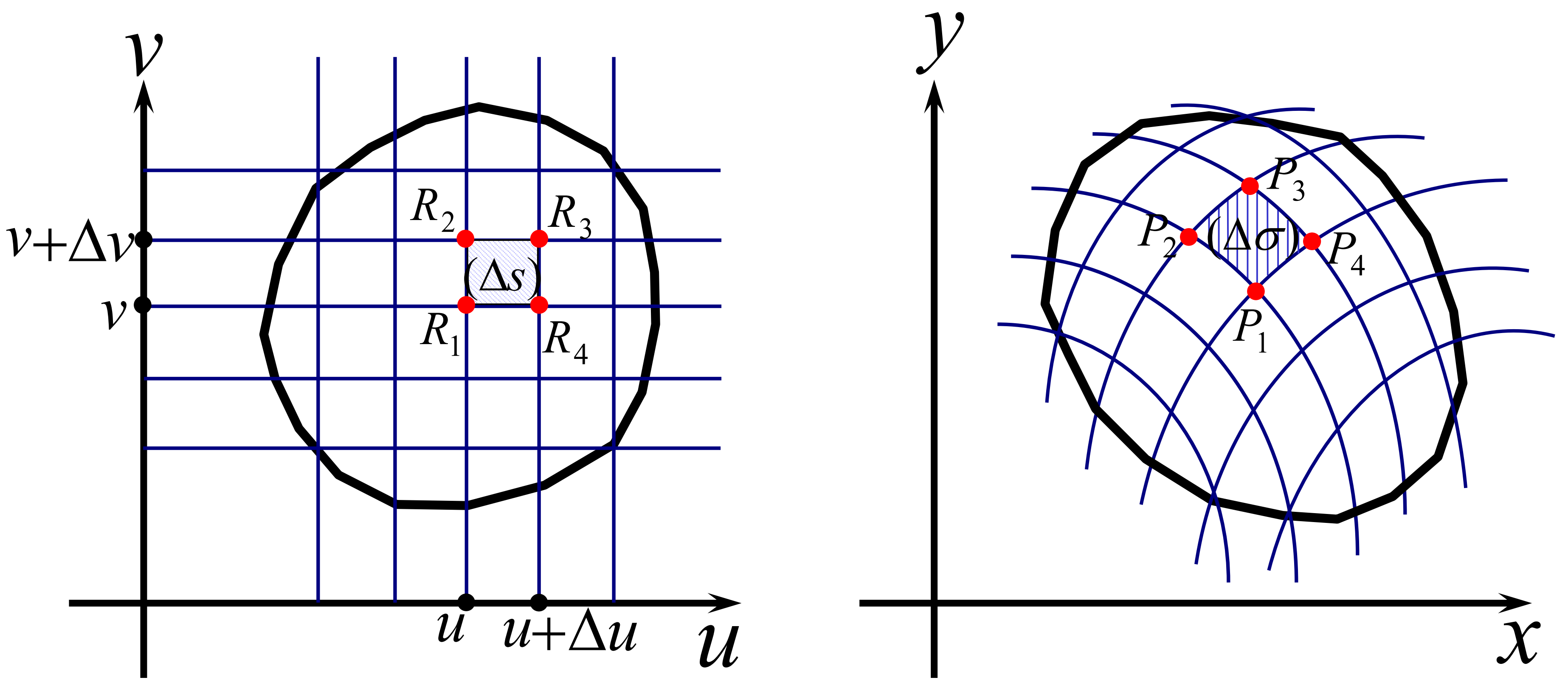
б) функции φ(u,v), ψ(u,v) имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

â) $I(u,v)=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\varphi'_u & \varphi'_v\\ \psi'_u & \psi'_v\end{vmatrix}\neq 0$ во всех точках области (G).

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_{(\sigma)} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot\left|I(u,v)\right|dxdy \qquad (2)$$

Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в двойном интеграле***, определитель $I(u,v)$ называют ***якобианом отображения*** (1).



v
$v+\Delta v$
v
R_2
R_3
(Δs)
R_1
R_4
u
$u+\Delta u$
u
y
P_3
P_2
$(\Delta\sigma)$
P_4
P_1
x

Замечание.

Формулы (1) рассматривались как отображение (G) на (σ). Но им можно придать и другой геометрический смысл.

В силу однозначности соответствия $(x,y) \to (u,v)$, пару чисел (u,v) можно рассматривать как координаты точки $M(x,y)$ в другой системе координат (***криволинейной системе координат***).

Тогда (1) – связь ***криволинейных*** и декартовых координат точки.

При такой интерпретации, применяя формулу (2), не потребуется находить область (G).

5. Геометрические и физические приложения двойных интегралов

1) Объем V цилиндрического тела (V), с основанием (σ)∈ xOy, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$:

$$V = \iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)dxdy$$

2) Площадь σ квадрируемой области (σ)∈ xOy:

$$\sigma = \iint\limits_{(\sigma)} dxdy$$

3) Площадь S гладкой поверхности (S), заданной уравнением $z = f(x,y)$:

$$S = \iint\limits_{(\sigma)} \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\, dxdy$$

где (σ)∈ xOy – проекция поверхности (S) на плоскость xOy.

Пусть (σ) – материальная бесконечно тонкая пластинка (квадрируемая область $(\sigma)\in xOy$) с плотностью $\gamma(x,y)$. Тогда

4) $\iint\limits_{(\sigma)} \gamma(x,y)dxdy = m$ – масса пластинки (σ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) $\iint\limits_{(\sigma)} y\cdot\gamma(x,y)dxdy = S_x$, $\iint\limits_{(\sigma)} x\cdot\gamma(x,y)dxdy = S_y$

– статические моменты пластинки (σ) относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

6) $x_0 = \dfrac{S_y}{m}, \qquad y_0 = \dfrac{S_x}{m}$ – координаты центра тяжести (σ).

7) $\iint\limits_{(\sigma)} y^2 \cdot \gamma(x, y)dxdy = I_x, \quad \iint\limits_{(\sigma)} x^2 \cdot \gamma(x, y)dxdy = I_y$

– моменты инерции пластинки (σ) относительно осей Ox и Oy соответственно.

8) $I_o = I_x + I_y = \iint\limits_{(\sigma)} (y^2 + x^2) \cdot \gamma(x, y)dxdy$

– момент инерции пластинки (σ) относительно начала координат

§8. Тройной интеграл

1. Задача, приводящая к понятию тройного интеграла

Пусть (V) – замкнутая ограниченная область в $Oxyz$ (тело),
$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы в области (V)
ЗАДАЧА. Найти массу m тела (V).

1. Разобьем (V) на n частей (ΔV_1), (ΔV_2), … , (ΔV_n).
2. Если (ΔV_i) – мала, то (ΔV_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i$,

   где ΔV_i – объем (ΔV_i), P_i – произвольная точка из (ΔV_i) .

Тогда
$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i \,,$$

$$m = \lim_{(\Delta V_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta V_i \,,$$

2. Определение и свойства тройного интеграла

Пусть (V) – кубируемая (т.е. имеющая объем) область в пространстве $Oxyz$, и в области (V) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (V) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta V_1), (\Delta V_2), \ \ldots \ , (\Delta V_n).$$

2. В каждой области (ΔV_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i) \cdot \Delta V_i$, где ΔV_i – объем области (ΔV_i).

Сумму

$$I_n(\Delta V_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot \Delta V_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по области (V) (соответствующей данному разбиению области (V) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔV_{i}) , $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения области* (V) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta V_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta V_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$*, то его называют* ***тройным интегралом от функции*** *f*(*x*,*y*,*z*) ***по области*** **(*V*)**.

Обозначают:

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dV , \qquad \iiint\limits_{(V)} f(x, y, z) dxdydz$$

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие существования тройного интеграла).

Если функция $f(x,y,z)$ *интегрируема в области* (V), *то она ограничена в этой области.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия существования тройного интеграла).

Если выполняются условия:

1) *область* (V) – *кубируемая,*
2) $f(x,y,z)$ *ограничена в области* (V),
3) $f(x,y,z)$ *непрерывна в области* (V) *всюду* (*за исключением, возможно, некоторого множества точек объема нуль),*

то $f(x,y,z)$ *интегрируема в области* (V) .

СВОЙСТВА ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. $\iiint\limits_{(V)} dxdydz = V$, где V – объем тела (V).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак тройного интеграла, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} c\cdot f(x,y,z)dxdydz = c\cdot \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz$$

3. Тройной интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме тройных интегралов от этих функций, т.е.

$$\iiint\limits_{(V)} [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]dV = \iiint\limits_{(V)} f_1(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V)} f_2(x,y,z)dV$$

4. Если область интегрирования (V) разбита на две части (V_1) и (V_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint\limits_{(V_1)} f(x,y,z)dV + \iiint\limits_{(V_2)} f(x,y,z)dV$$

(свойство аддитивности тройного интеграла).

5. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) > 0$ ($f(x,y,z) \geq 0$), то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz > 0 \quad \left(\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \geq 0 \right)$$

6. Если всюду в области (V) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \leq \iiint\limits_{(V)} \varphi(x,y,z)dxdydz$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ в области (V), то

$$m \cdot V \le \iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz \le M \cdot V,$$

где V – объем области (V).

8. Теорема о среднем для тройного интеграла.
Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой и ограниченной области (V), то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (V)$, что справедливо равенство

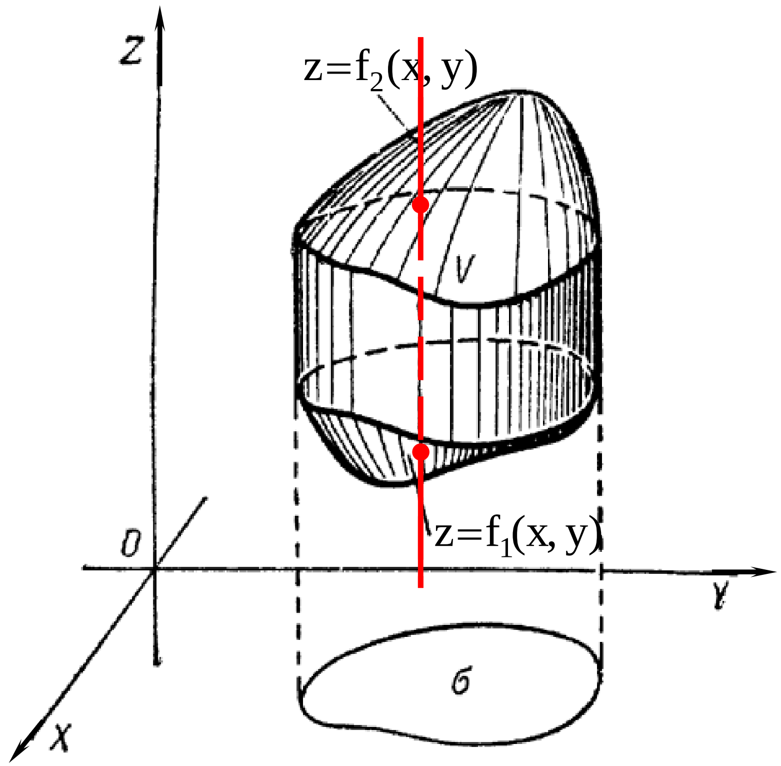
$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = f(x_0,y_0,z_0) \cdot V,$$

где V – объем области (V).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление тройного интеграла

Назовем область (*V*) ***правильной в направлении оси*** *Oz*, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области (*V*) параллельно оси *Oz* пересекает границу области в двух точках, причем, каждая из пересекаемых границ задается только одним уравнением.



ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* f(x,y,z) *интегрируема в области* (V). *Если область* (V) *– правильная в направлении оси Oz, то*

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy,$$

где $z=f_1(x,y)$, $z=f_2(x,y)$ *– уравнения нижней и верхней границ области* (V) *соответственно,* (σ) *– проекция области* (V) *на плоскость xOy.*

Интеграл $$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

называют *повторным* и записывают в виде $\iint\limits_{(\sigma)} dxdy \int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$

Интеграл $\int\limits_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ называют *внутренним* .

4. Замена переменных в тройном интеграле

Пусть (V) – замкнутая кубируемая область в пространстве $Oxyz$, $f(x,y,z)$ – непрерывна в области (V) всюду, кроме, может быть, некоторого множества точек, объема нуль.

Тогда существует интеграл $\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz$

Введем новые переменные по формулам:

$$x = \varphi(u,v,w),\ \ y = \psi(u,v,w),\ z = \chi(u,v,w),\ \ (u,v,w)\in(G) \qquad (1)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ интерпретация (1): отображение области (G) пространства $Cuvw$ на некоторую область пространства $Oxyz$.

Пусть функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ такие, что (1) является отображением области (G) на область (V) (т.е. если точка (u,v,w) пробегает область (G) , то соответствующая ей точка (x,y,z) пробегает область (V)) .

Пусть отображение (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) отображение (1) взаимно однозначно в замкнутой кубируемой области (G) (т.е. различным точкам области (G) соответствуют различные точки области (V));

б) функции $\varphi(u,v,w)$, $\psi(u,v,w)$, $\chi(u,v,w)$ имеют в области (G) непрерывные частные производные первого порядка;

в) $I(u,v,w)=\dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v & \varphi'_w \\ \psi'_u & \psi'_v & \psi'_w \\ \chi'_u & \chi'_v & \chi'_w \end{vmatrix}\neq 0$ во всех точках (G).

Тогда справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x,y,z)\,dxdydz = \tag{2}$$
$$=\iiint\limits_{(G)} f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\cdot\left|I(u,v,w)\right|dudvdw$$

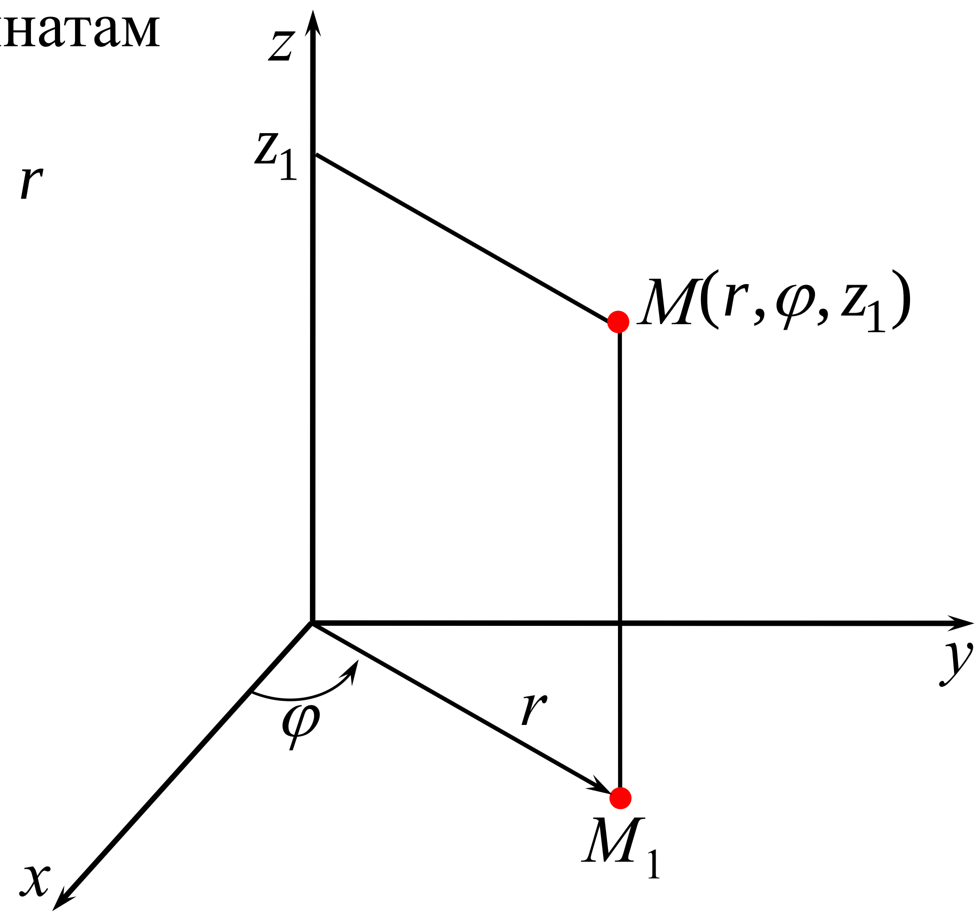
Формулу (2) называют ***формулой замены переменных в тройном интеграле***, определитель $I(u,v,w)$ называют ***якобианом отображения*** (1).

Два наиболее часто встречающихся случая замены переменных в тройном интеграле:

1) $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z_1$,

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к цилиндрическим координатам



В этом случае $I(r,\varphi,z) = r$

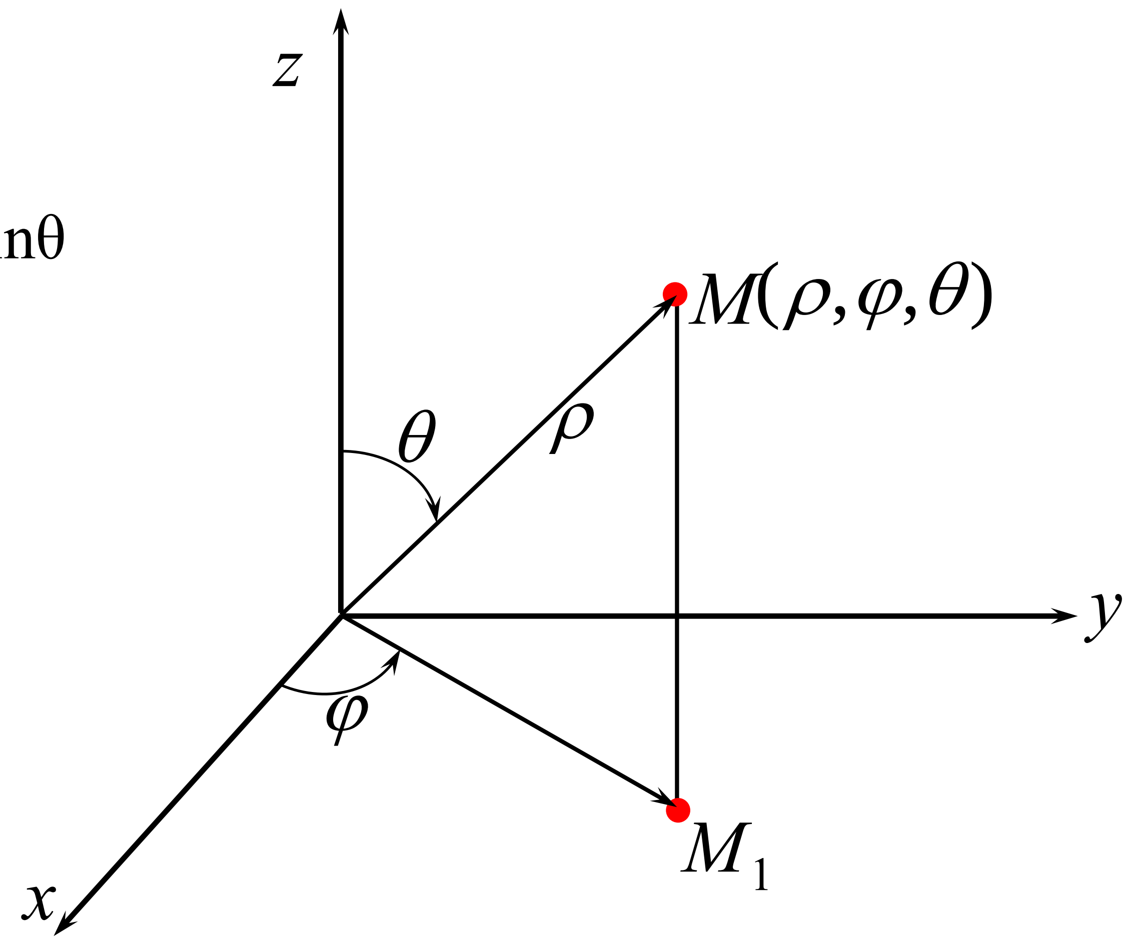
2) $x = \rho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\theta$, $y = \rho \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta$, $z = \rho \cdot \cos\theta$

где $0 \le \rho < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ $(-\pi < \varphi \le \pi)$, $0 \le \theta \le \pi$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ смысл: переход в пространстве к сферическим координатам

В этом случае

$$I(\rho, \varphi, \theta) = \rho^2 \cdot \sin\theta$$



5. Геометрические и физические приложения тройных интегралов

1) Объем V кубируемого тела $(V) \in Oxyz$:

$$V = \iiint\limits_{(V)} dxdydz$$

Пусть (V) – материальное тело (кубируемая область $(V) \in Oxyz$) с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iiint\limits_{(V)} \gamma(x,y,z)dxdydz = m$ – масса тела (V) .

3) Статические моменты тела (V) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iiint\limits_{(V)} z \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{yz} = \iiint\limits_{(V)} x \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$S_{xz} = \iiint\limits_{(V)} y \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}$, $y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}$, $z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести тела (V).

5) Моменты инерции тела (V) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$I_y = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

$$I_z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$$

6) $I_o = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) dxdydz$ – момент инерции тела (V) относительно начала координат .

§9. Криволинейный интеграл I рода (по длине дуги)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая кривая в $Oxyz$,
$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы вдоль (ℓ).
ЗАДАЧА. Найти массу m кривой (ℓ).

1. Разобьем (ℓ) на n частей $(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ \dots \ , (\Delta\ell_n)$.
2. Если $(\Delta\ell_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i$,
   где $\Delta\ell_i$ – длина $(\Delta\ell_i)$, P_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$.

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i \,,$$

$$m = \lim_{(\Delta\ell_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta\ell_i \,.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла I рода

Пусть (ℓ) – спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta\ell_1), (\Delta\ell_2), \ \ldots, (\Delta\ell_n).$$

2. На каждой дуге $(\Delta\ell_i)$ выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i)\cdot\Delta\ell_i$, где $\Delta\ell_i$ – длина дуги $(\Delta\ell_i)$.

Сумму
$$I_n(\Delta\ell_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta\ell_i$$
назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по кривой (ℓ) (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек P_i).

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta\ell_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta\ell_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta\ell_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***криволинейным интегралом I рода (по длине дуги) от функции f(x,y,z) по кривой*** (ℓ).

Обозначают: $$\int\limits_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell .$$

Замечание. Криволинейный интеграл I рода не зависит от направления движения по кривой (ℓ), т.е.

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y, z) d\ell = \int\limits_{(BA)} f(x, y, z) d\ell$$

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\int\limits_{(\ell)} d\ell = \ell,$ где ℓ – длина кривой (ℓ).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла I рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot f(x, y, z) d\ell = c \cdot \int\limits_{(\ell)} f(x, y, z) d\ell$$

3. Криволинейный интеграл I рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} [f_1(x, y, z) + f_2(x, y, z)] d\ell = \int\limits_{(\ell)} f_1(x, y, z)\, d\ell + \int\limits_{(\ell)} f_2(x, y, z)\, d\ell$$

4. Если кривая (ℓ) разбита на две части (ℓ_1) и (ℓ_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{(\ell_1)} f(x,y,z)d\ell + \int\limits_{(\ell_2)} f(x,y,z)d\ell$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла I рода).

5. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell > 0 \quad \left(\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \geq 0 \right)$$

6. Если всюду на кривой (ℓ) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \leq \int\limits_{(\ell)} \varphi(x,y,z)d\ell .$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
   Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ на кривой (ℓ), то

$$m \cdot \ell \leq \int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell \leq M \cdot \ell,$$

   где ℓ – длина кривой (ℓ).

8. Теорема о среднем для криволинейного интеграла I рода.
   Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на спрямляемой кривой (ℓ), то найдется такая точка $P_0(x_0,y_0,z_0)\in(\ell)$, что справедливо равенство

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = f(x_0,y_0,z_0) \cdot \ell,$$

   где ℓ – длина кривой (ℓ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление криволинейного интеграла I рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая (ℓ) задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ z = \chi(t)\ \ (\text{где}\ \ \alpha \le t \le \beta\ ). \qquad (2)$$

Кривая (ℓ) называется ***гладкой***, если функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ имеют на $[\alpha;\beta]$ непрерывные производные.

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (2) *и функция* $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y,z)d\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt \qquad (3)$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если (ℓ) *– гладкая кривая в плоскости* xOy , *заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ (*где* $x\in[a;b]$) *и функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x,y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_a^b f\left(x,\varphi(x)\right)\cdot\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}dx$$

СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть (ℓ) *– плоская кривая, заданная в полярных координатах уравнением* $r = r(\varphi)$ (*где* $\varphi\in[\alpha;\beta]$).

Если функция $r(\varphi)$ *непрерывно дифференцируема на* $[\alpha;\beta]$ *и функция* $f(x,y)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $f(x,y)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} f(x,y)d\ell = \int\limits_\alpha^\beta f\left(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi\right)\cdot\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+(r'(\varphi))^2}d\varphi$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия существования криволинейного интеграла I рода).

Если (ℓ) *– кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна на* (ℓ) , *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по кривой* (ℓ) .

4. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов I рода

1) Длина ℓ спрямляемой кривой (ℓ) : $\quad \ell = \int\limits_{(\ell)} d\ell$

2) Пусть (G) – цилиндр с направляющей $(\ell) \in xOy$. Тогда

$$S = \int\limits_{(\ell)} f(x, y)d\ell$$

где S – площадь части поверхности (G), заключенной между плоскостью xOy и поверхностью $z = f(x,y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

Пусть (ℓ) – материальная спрямляемая кривая в пространстве $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

3) $\int\limits_{(\ell)} \gamma(x, y, z)d\ell = m,$ где m – масса кривой (ℓ) .

4) Статические моменты кривой (ℓ) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \int\limits_{(\ell)} z \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{yz} = \int\limits_{(\ell)} x \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$S_{xz} = \int\limits_{(\ell)} y \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

5) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести кривой (ℓ) .

6) Моменты инерции кривой (ℓ) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \int\limits_{(\ell)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_y = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

$$I_z = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$$

7) $I_o = \int\limits_{(\ell)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) d\ell$ – момент инерции кривой (ℓ) относительно начала координат .

§10. Криволинейный интеграл II рода (по координатам)

1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу II рода

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ точка перемещается по кривой (ℓ) из точки L_1 в точку L_2.

ЗАДАЧА: найти работу, которую совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$.

1. Разобьем (ℓ) на n частей точками $M_0=L_1,\ M_1,\ \ldots,\ M_n=L_2$.
2. Если $(\Delta\ell_i) = (M_{i-1}M_i)$ – мала, то $(\Delta\ell_i)$ можно считать отрезком, а $\bar{\mathbf{F}}$ – постоянной.

   Тогда работа силы по перемещению точки из M_{i-1} в M_i равна

$$A_i \approx P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,,$$

   где K_i – произвольная точка из $(\Delta\ell_i)$, $\overline{M_{i-1}M_i} = \{\Delta x_i;\Delta y_i;\Delta z_i\}$

Тогда
$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,,$$

$$A = \lim_{(\Delta\ell_i)\to K_i} \sum_{i=1}^{n} P(K_i)\cdot\Delta x_i + Q(K_i)\cdot\Delta y_i + R(K_i)\cdot\Delta z_i\,.$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла II рода

Пусть $(\ell) = (L_1 L_2)$ – простая (т.е. без кратных точек) спрямляемая (т.е. имеющая длину) кривая в пространстве $Oxyz$, и на кривой (ℓ) задана функция $P(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем кривую (ℓ) произвольным образом на n частей точками $M_0=L_1$, M_1, …, $M_n=L_2$ в направлении от L_1 к L_2.
2. Пусть $M_i(x_i;\ y_i;\ z_i)$. Обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ (т.е. проекцию дуги $(M_{i-1}M_i)$ на ось Ox)
3. На каждой дуге $(M_{i-1}M_i)$ выберем произвольную точку $K_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $P(K_i)\cdot\Delta x_i$.

Сумму

$$I_n(M_i,K_i)=\sum_{i=1}^{n}P(K_i)\cdot\Delta x_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $P(x,y,z)$ по кривой (ℓ) по переменой x (соответствующей данному разбиению кривой (ℓ) и данному выбору точек K_i).

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta M_{i-1} M_i$, где $\Delta M_{i-1}M_i$ – длина дуги $(M_{i-1}M_i)$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения кривой* (ℓ) *у которого* $\lambda < \delta$ *, при любом выборе точек* K_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(M_i, K_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(M_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$*, то его называют* ***криволинейным интегралом от функции P(x,y,z) по переменной x по кривой*** (ℓ).

Обозначают: $\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx$ или $\int\limits_{(L_1)}^{(L_2)} P(x,y,z)dx.$

Аналогично определяются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

Сумму $$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

записывают в виде

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и *называют* ***криволинейным интегралом*** **II** ***рода*** **(*по координатам*).**

СВОЙСТВА КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

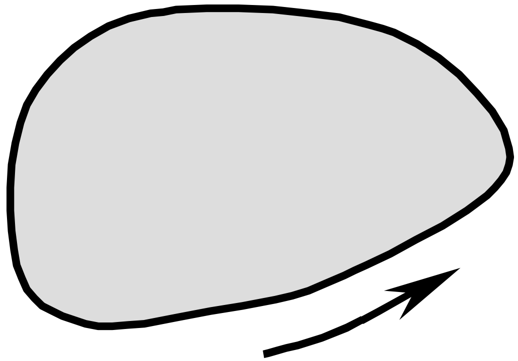
1. Криволинейный интеграл II рода зависит от направления движения по кривой. При изменении направления обхода кривой (L_1L_2) криволинейный интеграл II рода меняет знак, т.е.

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{(L_2L_1)} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если кривая (ℓ) замкнута, то криволинейный интеграл II рода не зависит выбора начальной точки L_1, а зависит от направления обхода кривой.

Направление обхода замкнутой кривой, при котором область, лежащая «внутри» контура, остается слева по отношению к движущейся точке, называют ***положительным***. Противоположное ему направление называют ***отрицательным***.

На плоскости положительным направлением обхода является направление против хода часовой стрелки.



Криволинейный интеграл II рода по замкнутому контуру в положительном направлении обозначают:

$$\oint\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

В отрицательном направлении:

$$\oint\limits_{-(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

3. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ криволинейного интеграла II рода.

Пусть $\bar{\mathbf{F}} = \{P(x,y,z);\ Q(x,y,z);\ R(x,y,z)\}$ – сила, под действием которой точка перемещается по кривой (ℓ) из L_1 в L_2.

Работа, которую при этом совершает сила $\bar{\mathbf{F}}$, будет равна

$$A = \int\limits_{(\ell)} Pdx + Qdy + Rdz$$

4. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла II рода, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Pdx = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Pdx,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Qdy = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Qdy,$$

$$\int\limits_{(\ell)} c \cdot Rdz = c \cdot \int\limits_{(\ell)} Rdz.$$

5. Криволинейный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных интегралов II рода от этих функций, т.е.

$$\int\limits_{(\ell)} \left[P_1 + P_2\right] dx = \int\limits_{(\ell)} P_1 dx + \int\limits_{(\ell)} P_2 dx$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[Q_1 + Q_2\right] dy = \int\limits_{(\ell)} Q_1 dy + \int\limits_{(\ell)} Q_2 dy$$

$$\int\limits_{(\ell)} \left[R_1 + R_2\right] dz = \int\limits_{(\ell)} R_1 dz + \int\limits_{(\ell)} R_2 dz$$

6. Если кривая (L_1L_2) разбита точкой K на две части (L_1K) и (KL_2), то

$$\int\limits_{(L_1L_2)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(L_1K)} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{(KL_2)} Pdx + Qdy + Rdz$$

(свойство аддитивности криволинейного интеграла II рода).

3. Вычисление криволинейного интеграла II рода

Пусть простая (не имеющая кратных точек) кривая $(\ell)=(L_1L_2)$ задана параметрическими уравнениями:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad (2)$$

где $t\in[\alpha;\beta]$ (или $t\in[\beta;\alpha]$) $(L_1\leftrightarrow\alpha\ ,\ L_2\leftrightarrow\beta)$.

ТЕОРЕМА 1.

Если (ℓ) *– гладкая кривая, заданная уравнениями* (2) *и функция* $P(x,y,z)$ *непрерывна на* (ℓ), *то* $P(x,y,z)$ *интегрируема по переменной x по кривой* (ℓ) *и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} P\big(\varphi(t),\psi(t),\chi(t)\big)\cdot\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Аналогичным образом вычисляются интегралы

$$\int\limits_{(\ell)} Q(x,y,z)dy \quad \text{и} \quad \int\limits_{(\ell)} R(x,y,z)dz$$

СЛЕДСТВИЕ 2.

Если выполнены условия:

1) $(\ell) = (L_1L_2)$ – *гладкая кривая в плоскости* xOy, *заданная уравнением* $y = \varphi(x)$ (*где* x *пробегает отрезок с концами* a *и* b; $L_1(a; \varphi(a))$, $L_2(b; \varphi(b))$),
2) *функции* $P(x,y)$, $Q(x,y)$ *непрерывны на* (ℓ),

то существует криволинейный интеграл II *рода и справедливо равенство*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \left[P\big(x,\varphi(x)\big) + Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\right]dx$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия существования криволинейного интеграла II рода).

Если (ℓ) – *кусочно-гладкая спрямляемая кривая и функции* $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ *кусочно-непрерывны на* (ℓ), *то существует интеграл*

$$\int\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

4. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами

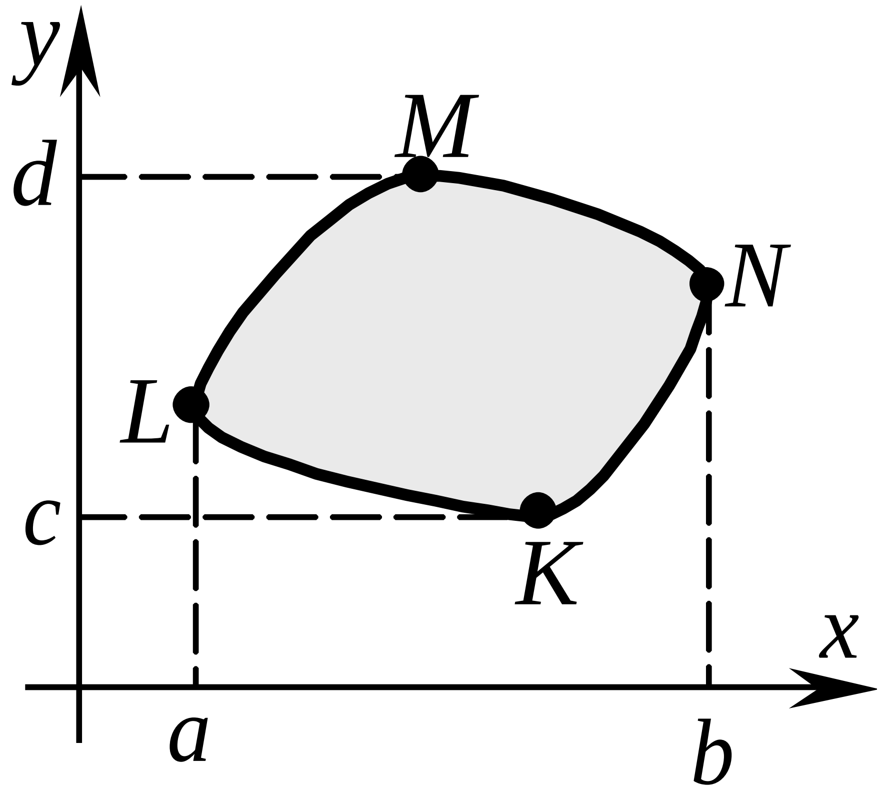
Пусть (σ) – замкнутая ограниченная область на плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно гладкая,
$P(x,y)$, $Q(x,y)$, $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ – кусочно непрерывны в области (σ)

Тогда существуют интегралы

$$\oint\limits_{(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} P'_y(x,y)dxdy, \qquad \iint\limits_{(\sigma)} Q'_x(x,y)dxdy$$

и справедлива **формула Грина**:

$$\oint\limits_{+(\ell)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(\sigma)} \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy$$



y
M
d
N
L
c
K
x
a
b

5. Криволинейные интегралы II рода, не зависящие от пути интегрирования

ЛЕММА 4. Для того, чтобы криволинейный интеграл

$$\int\limits_{(L_1 L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

не зависел от линии интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы этот интеграл, взятый по любому замкнутому контуру (ℓ) был равен нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

ТЕОРЕМА 5. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны вместе со своими частными производными в некоторой односвязной области $D \subset Oxyz$.
Следующие условия эквивалентны:

1) $\oint\limits_{(\ell)} P dx + Q dy + R dz = 0 \quad \forall(\ell) \subset D$;

2) выполняются равенства

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

3) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y,z)$, т.е.

$$du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

6. Интегрирование полных дифференциалов

Пусть $Pdx + Qdy + Rdz = du$;

$(\ell) = (\mathrm{L}_1\mathrm{L}_2)$ – простая гладкая кривая (любая)

(ℓ): $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, где $t \in [\alpha;\beta]$ (или $t \in [\beta;\alpha]$)

$(L_1 \leftrightarrow \alpha\ ,\ L_2 \leftrightarrow \beta)$.

Рассмотрим

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Получили:

$$\int\limits_{(L_1L_2)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = u(L_2) - u(L_1)$$

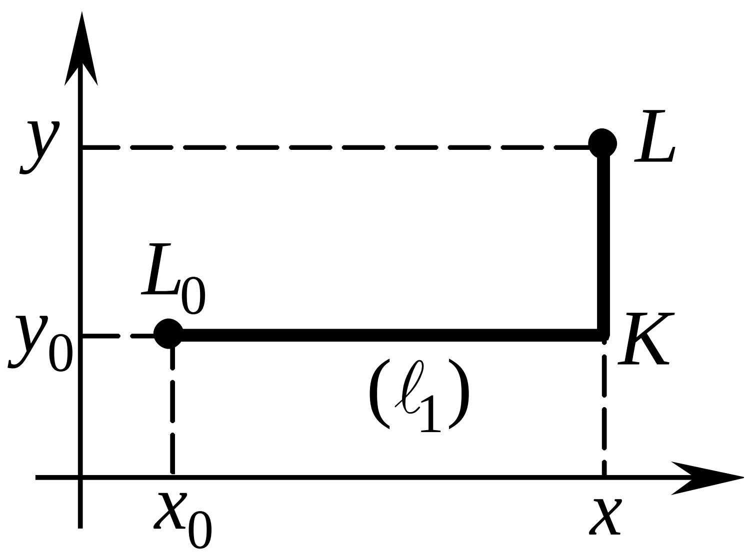
Таким образом, для криволинейного интеграла II рода от полного дифференциала справедлив аналог формулы Ньютона – Лейбница.

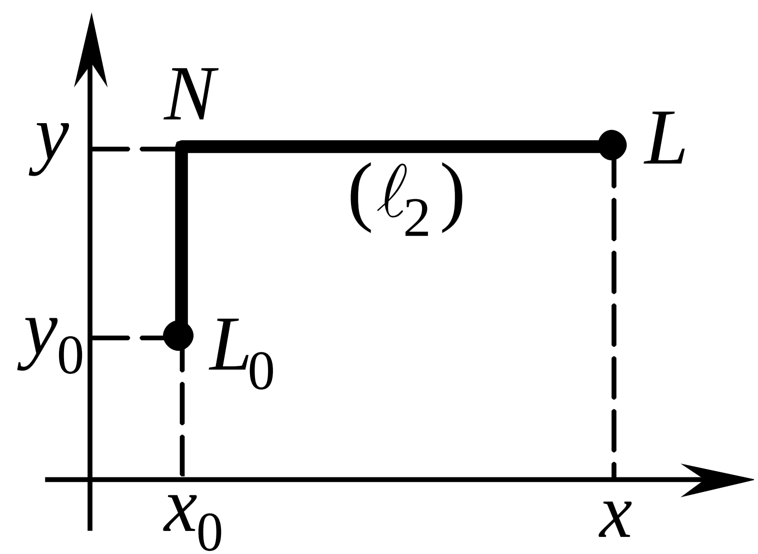
Нахождение функции по ее дифференциалу

Пусть $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$;
Тогда $\forall L(x,y)$ и $\forall L_0(x_0,y_0)$

$$\int\limits_{(L_0 L)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(L) - u(L_0)$$

Рассмотрим интеграл, полагая $(L_0L) = (\ell_1)$ или $(L_0L) = (\ell_2)$:





Получили: $$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}\underbrace{Q(x,y)}_{x-const}dy+C$$

или $$u(x,y)=\int_{x_0}^{x} \underbrace{P(x,y)}_{y-const}dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C$$

7. Связь криволинейных интегралов I и II рода

Если (ℓ) – простая гладкая кривая, то справедлива формула

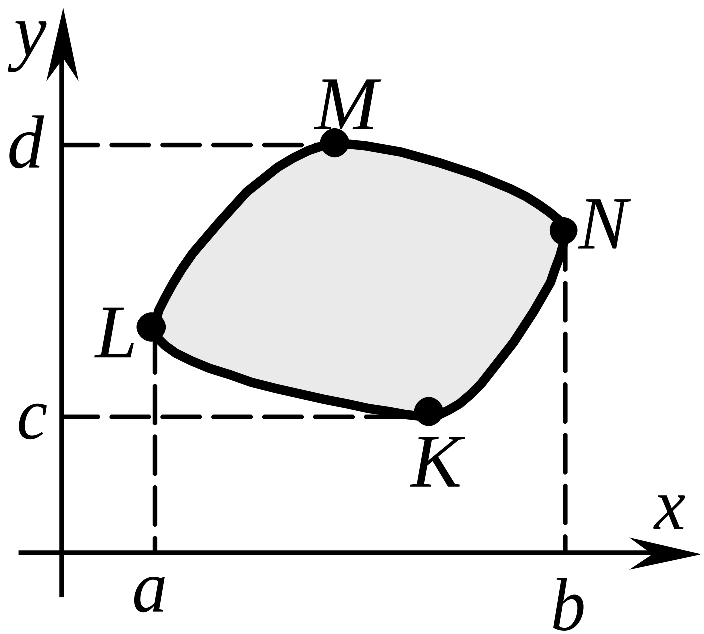
$$\int_{(\ell)} Pdx+Qdy+Rdz=\int_{(\ell)}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)d\ell$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора, касательного к кривой (ℓ) .

8. Геометрическое приложение криволинейного интеграла II рода

Пусть (σ) – квадрируемая область в плоскости xOy,
(ℓ) – граница (σ), кусочно-гладкая.
Тогда площадь области (σ) может быть найдена по формуле:

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \oint\limits_{(\ell)} xdy - ydx$$



§11. Поверхностный интеграл I рода

1. Задача, приводящая к поверхностному интегралу I рода

Пусть (S) – квадрируемая поверхность в $Oxyz$,
$\gamma = \gamma(x,y,z)$ – плотность распределения массы по (S)
ЗАДАЧА. Найти массу m поверхности (S).

1. Разобьем (S) на n частей $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$.
2. Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать однородной и ее масса $m_i \approx \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i$,

   где ΔS_i – площадь (ΔS_i), P_i – произвольная точка из (ΔS_i) .

Тогда

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i \,,$$

$$m = \lim_{(\Delta S_i) \to P_i} \sum_{i=1}^{n} \gamma(P_i) \cdot \Delta S_i \,,$$

2. Определение и свойства поверхностного интеграла I рода

Пусть (S) – квадрируемая (т.е. имеющая площадь) область в пространстве $Oxyz$, и на (S) задана функция $u = f(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем поверхность (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1),\ (\Delta S_2),\ \ldots,\ (\Delta S_n).$$

2. На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку $P_i(\xi_i;\eta_i\zeta_i)$ и вычислим произведение $f(P_i)\cdot\Delta S_i$, где ΔS_i – площадь части (ΔS_i).

Сумму

$$I_n(\Delta S_i, P_i) = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\cdot\Delta S_i$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $f(x,y,z)$ по поверхности (S) (соответствующей данному разбиению поверхности (S) и данному выбору точек P_i).

Пусть d_{i} – диаметр (ΔS_{i}) , $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta S_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения поверхности* (S) *у которого* $\lambda < \delta$*, при любом выборе точек* P_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta S_i, P_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i, P_i)$ *при* $\lambda \to 0$*, то его называют* ***поверхностным интегралом I рода (по площади поверхности) от функции*** $f(x,y,z)$ ***по поверхности*** **(S)**.

Обозначают: $\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds.$

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА I РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. $\iint\limits_{(S)} ds = S,$ где S – площадь поверхности (S).

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла I рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c \cdot f(x,y,z)ds = c \cdot \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds.$$

3. Поверхностный интеграл I рода от алгебраической суммы 2-х (конечного числа) функций равен алгебраической сумме поверхностных интегралов I рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)]ds = \iint\limits_{(S)} f_1(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S)} f_2(x,y,z)ds.$$

4. Если поверхность интегрирования (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющие общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(S_1)} f(x,y,z)ds + \iint\limits_{(S_2)} f(x,y,z)ds.$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла I рода).

5. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) > 0$ $(f(x,y,z) \geq 0)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds > 0 \qquad \left(\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \geq 0 \right).$$

6. Если всюду на поверхности (S) $f(x,y,z) \leq \varphi(x,y,z)$, то

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \leq \iint\limits_{(S)} \varphi(x,y,z)ds.$$

7. Следствие свойств 6, 2 и 1.
Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x,y,z)$ на поверхности (S), то

$$m \cdot S \le \iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds \le M \cdot S,$$

где S – площадь поверхности (S).

8. Теорема о среднем для поверхностного интеграла I рода.
Если функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на квдрируемой поверхности* (S), *то найдется такая точка* $P_0(x_0,y_0,z_0) \in (S)$, *что справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = f(x_0,y_0,z_0) \cdot S,$$

где S *– площадь поверхности* (S).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

3. Вычисление поверхностного интеграла I рода

Пусть поверхность (S) задана формулой

$$z = \varphi(x,y),\ \ (x,y)\in(\sigma_{xy})\subset xOy\ . \qquad (1)$$

Говорят: ***поверхность задана явно***.

Поверхность (1) называется ***гладкой***, если $\varphi(x,y)$ имеет в области (σ_{xy}) непрерывные частные производные

$$\varphi'_x(x,y)\ \text{è}\ \ \varphi'_y(x,y).$$

В явном виде можно также задать поверхность формулой

$$x = \psi(y,z),\ \ (y,z)\in(\sigma_{yz})\subset yOz \quad \text{или} \quad y = \chi(x,z),\ \ (x,z)\in(\sigma_{xz})\subset xOz\ .$$

Пусть поверхность (S) задана уравнением

$$F(x,y,z) = 0. \qquad (2)$$

Говорят: ***поверхность задана неявно***.

Поверхность (2) называется ***гладкой***, если для любой ее внутренней точки существует такая окрестность, которая может быть задана явно и является гладкой.

Пусть функция $u = F(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные F'_x, F'_y è F'_z.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$ называется ***особой***, если $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0.$

Если на поверхности $F(x,y,z) = 0$ *нет особых точек, то она является гладкой.*

С геометрической точки зрения, гладкость поверхности (S) означает, что в каждой внутренней точке поверхности существует касательная плоскость (и нормаль), причем ее положение непрерывно меняется при перемещении точки касания по поверхности.

Поверхность, составленная из нескольких гладких частей, называется *кусочно-гладкой*.

ТЕОРЕМА 1.

Пусть (S) *– гладкая поверхность, заданная уравнением* (1);

(σ_{xy}) *– квадрируемая область в плоскости* xOy ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и справедливо равенство*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(x,y,\varphi(x,y)\big)\cdot\sqrt{1+(\varphi'_x)^2+(\varphi'_y)^2}\,dxdy. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

СЛЕДСТВИЕ 2.

Пусть (S) – *гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$x = \psi(y,z),\ \ (y,z)\in(\sigma_{yz})\ ;$$

(σ_{yz}) – *квадрируемая область в плоскости* yOz ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S) .

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} f\big(\psi(y,z),y,z\big)\cdot\sqrt{1+(\psi'_y)^2+(\psi'_z)^2}\,dydz.$$

СЛЕДСТВИЕ 3.

Пусть (S) – *гладкая поверхность, заданная уравнением*

$$y = \chi(x,z),\ \ (x,z)\in(\sigma_{xz})\ ;$$

(σ_{xz}) – *квадрируемая область в плоскости* xOz ;

функция $f(x,y,z)$ *непрерывна на* (S).

Тогда $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S) *и*

$$\iint\limits_{(S)} f(x,y,z)ds = \iint\limits_{(\sigma_{xz})} f\big(x,\chi(x,z),z\big)\cdot\sqrt{1+(\chi'_x)^2+(\chi'_z)^2}\,dxdz.$$

ТЕОРЕМА 4 (достаточные условия существования поверхностного интеграла I рода).

Пусть (S) *– кусочно-гладкая поверхность, которая может быть явно задана, например, формулой* $z = \varphi(x,y)$, $(x,y)\in(\sigma_{xy})$.

Если (σ_{xy}) *– квадрируемая область в плоскости* xOy *и функция* $f(x,y,z)$ *кусочно-непрерывна на* (S), *то* $f(x,y,z)$ *интегрируема по поверхности* (S).

4. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов I рода

1) Площадь S квадрируемой поверхности $(S) \in Oxyz$:

$$S = \iint\limits_{(S)} ds.$$

Пусть (S) – материальная квадрируемая поверхность в $Oxyz$ с плотностью $\gamma(x,y,z)$.

Тогда

2) $\iint\limits_{(S)} \gamma(x, y, z) ds = m$ – масса поверхности (S) .

3) Статические моменты поверхности (S) относительно плоскостей xOy, yOz и xOz равны соответственно:

$$S_{xy} = \iint\limits_{(S)} z \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{yz} = \iint\limits_{(S)} x \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$S_{xz} = \iint\limits_{(S)} y \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

4) $x_0 = \dfrac{S_{yz}}{m}, \quad y_0 = \dfrac{S_{xz}}{m}, \quad z_0 = \dfrac{S_{xy}}{m}$ – координаты центра тяжести поверхности (S).

5) Моменты инерции поверхности (S) относительно осей Ox, Oy и Oz равны соответственно:

$$I_x = \iint\limits_{(S)} (y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

$$I_y = \iint\limits_{(S)} (x^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

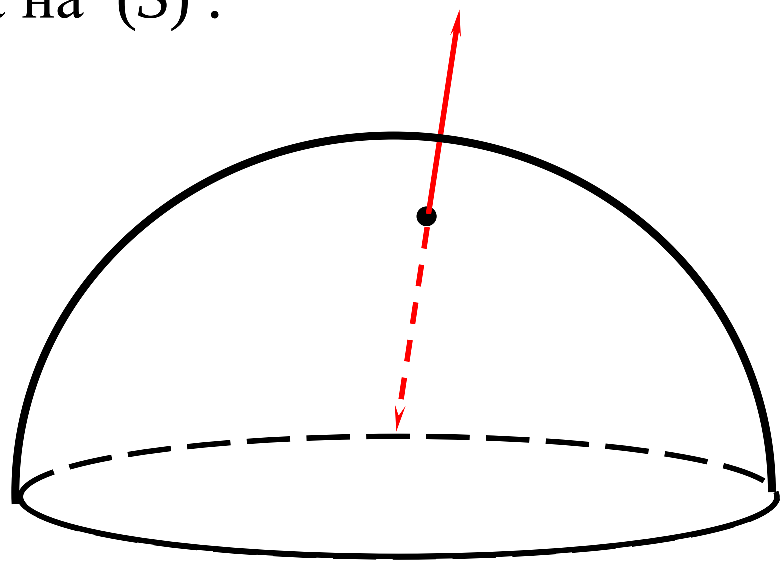
$$I_z = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$$

6) $I_o = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \gamma(x, y, z) ds$ – момент инерции поверхности (S) относительно начала координат .

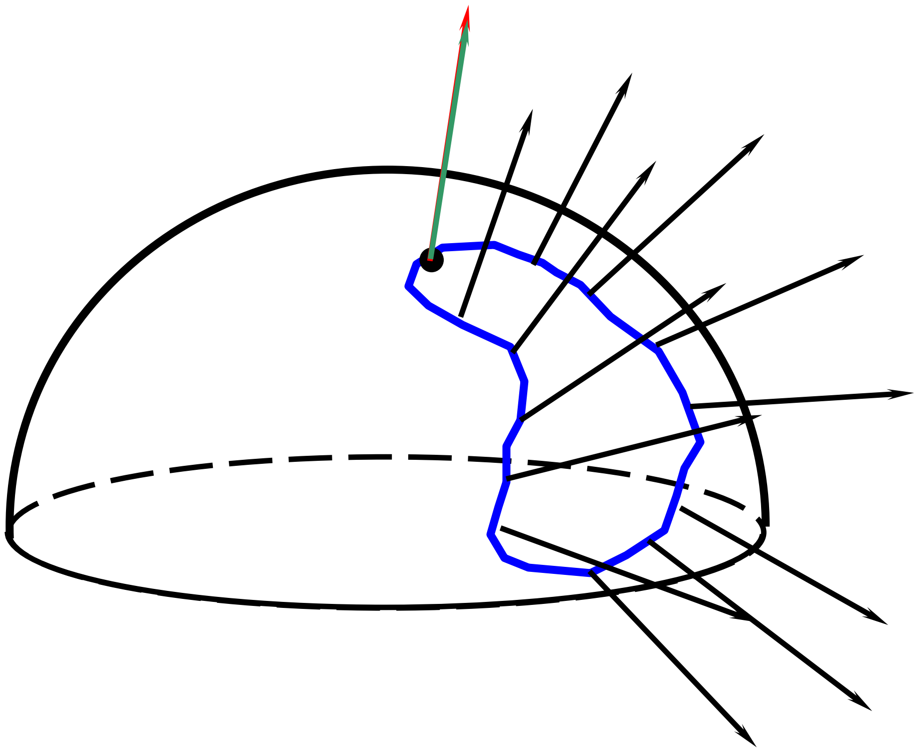
§12. Поверхностный интеграл II рода (по координатам)

1. Односторонние и двусторонние поверхности

Пусть (S) – гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, M – любая точка на (S) .

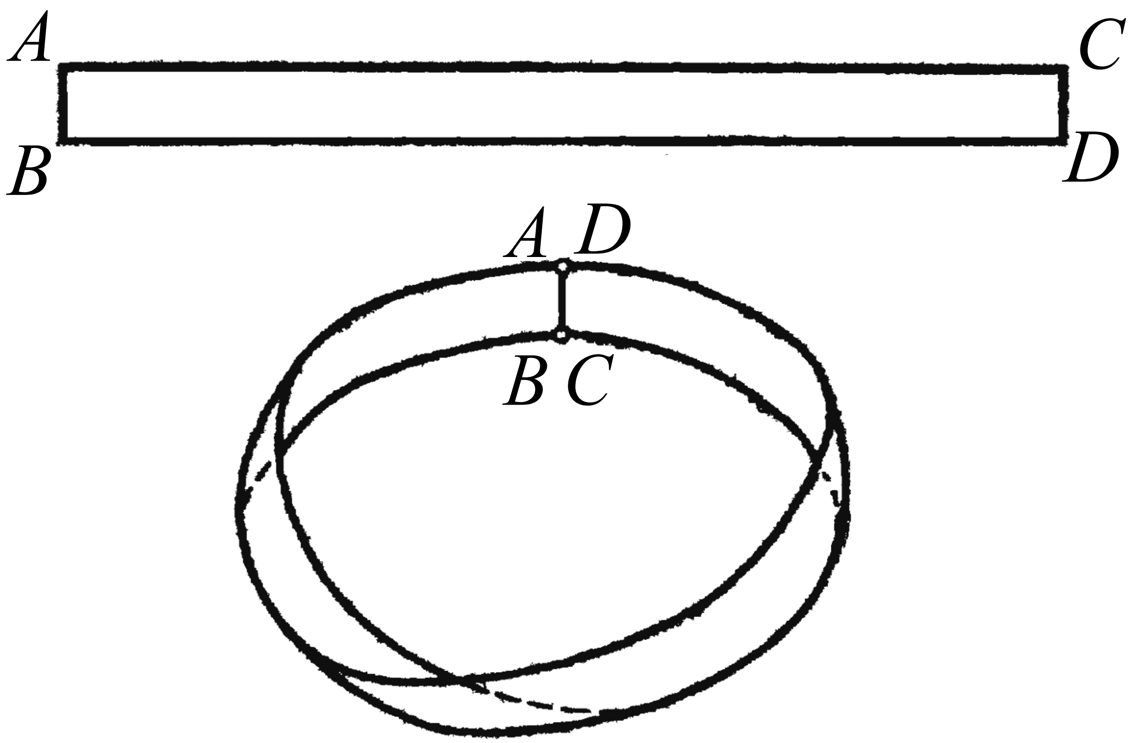


1) Проведем в M нормаль (вектор, перпендикулярный к касательной плоскости) к (S).
2) Выберем одно из двух направлений нормали.



3) Непрерывно перемещаем M вместе с выбранной нормалью вдоль любой замкнутой кривой (ℓ) на (S), не пересекающей ее границу

Если в прежнее положение точка M вернется с тем же направлением нормали (для любой точки M и любой кривой (ℓ)), то поверхность называют ***двусторонней***



Если в прежнее положение точка *M* вернется с противоположным направлением нормали (хотя бы для одной точки *M* и хотя бы одной кривой (ℓ)), то поверхность называют ***односторонней***

2. Определение и свойства поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, с выбранным направлением нормали (т.е. стороной) и на (S) задана функция $R(x,y,z)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1. Разобьем область (S) произвольным образом на n частей, не имеющих общих внутренних точек:

$$(\Delta S_1),\ (\Delta S_2),\ \ldots,\ (\Delta S_n).$$

2. В каждой области (ΔS_i) выберем произвольную точку $K_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.
3. Обозначим через $\Delta S_{i(xy)}$ – площадь проекции (ΔS_i) на плоскость xOy, взятую со знаком «+», если выбранное на (S) направление нормали в точке M_i составляет с осью Oz острый угол, и со знаком «–» в противном случае.
4. Вычислим произведение $R(K_i) \cdot \Delta S_{i(xy)}$.

Сумму $$I_n(\Delta S_i, K_i) = \sum_{i=1}^{n} R(K_i) \cdot \Delta S_{i(xy)}$$

назовем ***интегральной суммой*** для функции $R(x,y,z)$ по поверхности (S) по переменным x и y (соответствующей данному разбиению области (S) и данному выбору точек K_i).

Пусть d_i – диаметр (ΔS_i) , $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(\Delta S_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$ *, если для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что для любого разбиения поверхности* (S) *у которого* $\lambda < \delta$, *при любом выборе точек* K_i *выполняется неравенство*

$$| I_n(\Delta S_i, K_i) - I | < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(\Delta S_i, K_i)$ *при* $\lambda \to 0$, *то его называют* ***поверхностным интегралом II рода от функции*** $R(x,y,z)$ ***по поверхности*** (S) ***по переменным x и y***.

Обозначают: $$\iint\limits_{(S)} R(x, y, z)\,dxdy.$$

Аналогично определяются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \quad \text{и} \quad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

Сумму

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz + \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$$

записывают в виде

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

и ***называют поверхностным интегралом* II *рода*** (***по координатам***).

СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТНОГО ИНТЕГРАЛА II РОДА

Замечание: предполагаем, что все рассматриваемые в свойствах интегралы существуют.

1. Поверхностный интеграл II рода зависит от стороны поверхности (т.е. от выбора нормали). При перемене стороны поверхности (S) поверхностный интеграл II рода меняет знак.

2. Постоянный множитель можно выносить за знак поверхностного интеграла II рода, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot P dydz = c\cdot \iint\limits_{(S)} P dydz,$$

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot Q dxdz = c\cdot \iint\limits_{(S)} Q dxdz,$$

$$\iint\limits_{(S)} c\cdot R dxdy = c\cdot \iint\limits_{(S)} R dxdy.$$

3. Поверхностный интеграл II рода от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме криволинейных поверхностных II рода от этих функций, т.е.

$$\iint\limits_{(S)} [P_1 + P_2]dydz = \iint\limits_{(S)} P_1 dydz + \iint\limits_{(S)} P_2 dydz$$

$$\iint\limits_{(S)} [Q_1 + Q_2]dxdz = \iint\limits_{(S)} Q_1 dxdz + \iint\limits_{(S)} Q_2 dxdz$$

$$\iint\limits_{(S)} [R_1 + R_2]dxdy = \iint\limits_{(S)} R_1 dxdy + \iint\limits_{(S)} R_2 dxdy$$

4. Если поверхность (S) разбита на две части (S_1) и (S_2), не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy =$$

$$= \iint\limits_{(S_1)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy + \iint\limits_{(S_2)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

(свойство аддитивности поверхностного интеграла II рода).

5. Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Ox (т.е. имеющая уравнение $\varphi(y,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oy (т.е. имеющая уравнение $\psi(x,z)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = 0$$

Если (S) – цилиндрическая поверхность с образующими, параллельными оси Oz (т.е. имеющая уравнение $\chi(x,y)=0$), то

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = 0$$

3. Вычисление поверхностного интеграла II рода

Пусть (S) – двусторонняя поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$,

(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область

$f(x,y)$ – непрерывна в области (σ_{xy}) ,

$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Выберем нижнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz тупой) .

Тогда:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{(\sigma_{xy})} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Аналогично вычисляются интегралы

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \qquad \text{и} \qquad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

ТЕОРЕМА 1 (достаточные условия существования поверхностного интеграла II рода).

Если (S) *– двусторонняя поверхность, состоящая из конечного числа явно заданных поверхностей* $z = f_i(x,y)$, $R(x,y,z)$ *– кусочно-непрерывна на* (S), $f_i(x,y)$ *– кусочно-непрерывна в области* (σ) (*проекции поверхности* (S) *на плоскость* xOy), *то поверхностный интеграл* II *рода*

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy$$

существует.

Аналогичные утверждения справедливы и для интегралов

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz \qquad \text{и} \qquad \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz$$

4. Формула Остроградского – Гаусса

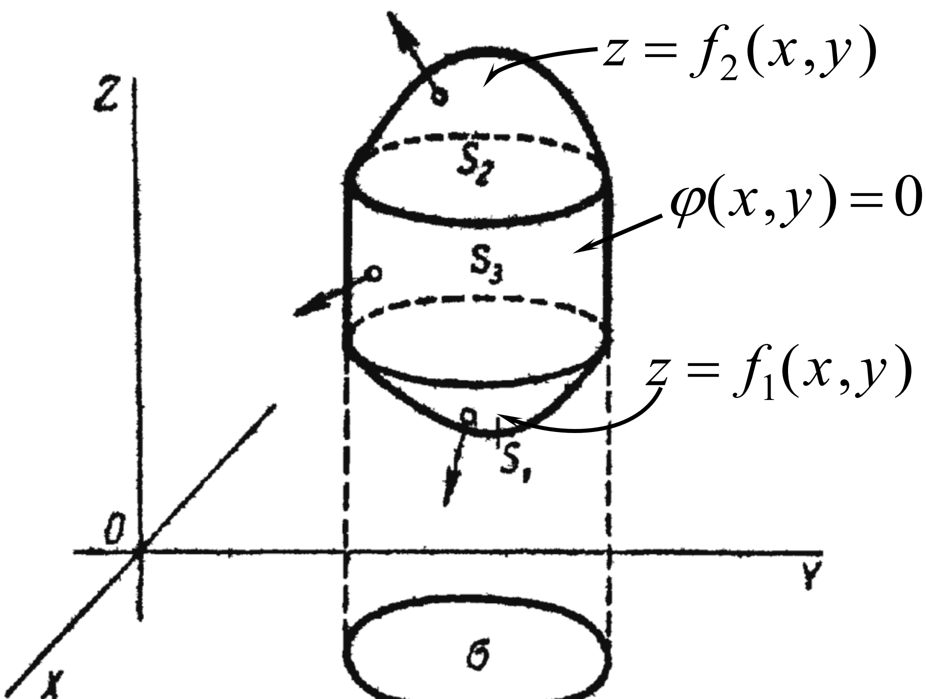
Пусть (V) кубируемое цилиндрическое тело, ограниченное поверхностями (S_1): $z = f_1(x,y)$ (низ),

(S_2): $z = f_2(x,y)$ (верх),

(S_3): $\varphi(x,y) = 0$ (боковая поверхность),

функции $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$ непрерывны в квадрируемой области $(\sigma_{xy}) \in xOy$ (проекции (V) на плоскость xOy),

$R(x,y,z)$ и $R'_z(x,y,z)$ кусочно-непрерывны и ограничены в области (V)



Получили $$\iint\limits_{+(S)} R(x,y,z)dxdy = \iiint\limits_{(V)} R'_z dxdydz$$

Аналогично получаем:

$$\iint\limits_{+(S)} P(x,y,z)dydz = \iiint\limits_{(V)} P'_x dxdydz$$

$$\iint\limits_{+(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iiint\limits_{(V)} Q'_y dxdydz$$

В общем случае:

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} (P'_x + Q'_y + R'_z)dxdydz$$

– **формула Остроградского – Гаусса**.

5. Связь между поверхностными интегралами I и II рода

Пусть (S) – двусторонняя гладкая поверхность, заданная уравнением $z = f(x,y)$

(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy, квадрируемая область,

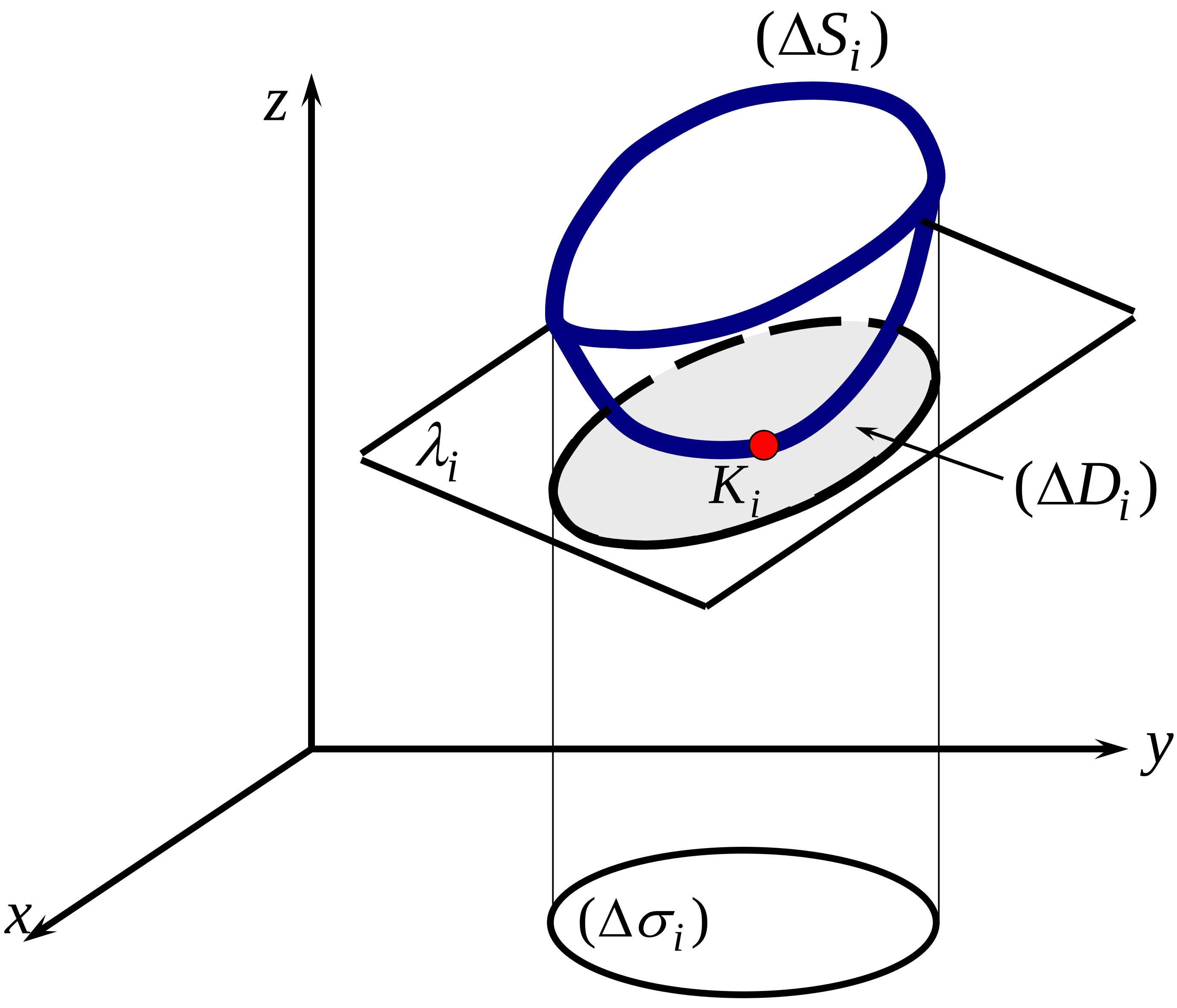
$f(x,y)$ – непрерывна в (σ_{xy})

$R(x,y,z)$ – непрерывна на (S) .

Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Тогда существует интеграл

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\,dxdy$$



(ΔS_i)
z
λ_i
K_i
(ΔD_i)
y
x
$(\Delta\sigma_i)$

Получили:

$$\iint\limits_{(S)} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{(S)} R(x,y,z)\cdot\cos\gamma ds$$

Формула остается справедливой и при выборе нижней стороны поверхности.

Аналогично доказывается справедливость формул

$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\cdot\cos\alpha ds$$

$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)dxdz = \iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\cdot\cos\beta ds$$

Таким образом, в общем случае получаем:

$$\iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(S)} \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cdot\cos\beta + R\cdot\cos\gamma\right)ds$$

– связь поверхностных интегралов I и II рода.

ЛЕММА 2.

Пусть 1) *гладкая двусторонняя поверхность* (S) *имеет уравнение* $z = f(x,y)$,

2) (σ_{xy}) – *квадрируемая область, проекция* (S) *на* xOy.

Если существует интеграл

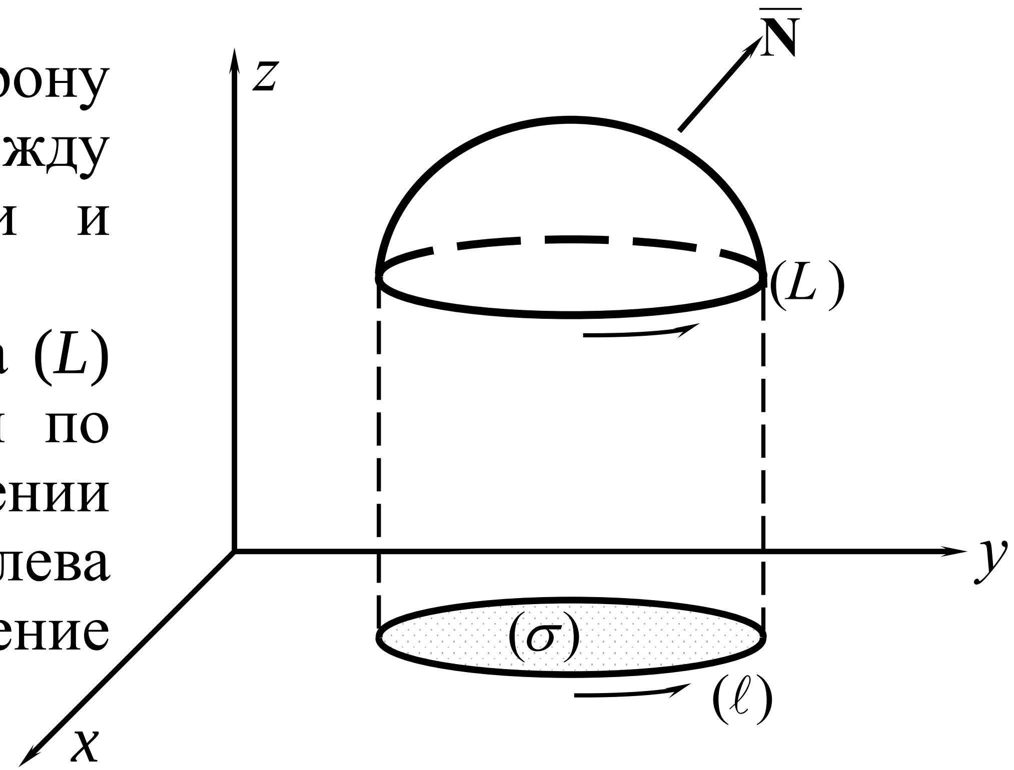
$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

то справедливо равенство

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iint\limits_{(\sigma_{xy})} \left(- f'_x \cdot P - f'_y \cdot Q + R\right) dxdy$$

7. Формула Стокса

Пусть (S) – двусторонняя незамкнутая поверхность, которая может быть задана явно, например, уравнением $z = f(x,y)$;
(σ_{xy}) – проекция (S) на плоскость xOy,
(L) – граница (S), кусочно-гладкая замкнутая кривая;
(ℓ) – проекция (L) на плоскость xOy ($\Rightarrow$ кусочно-гладкая замкнутая).



Выберем верхнюю сторону поверхности (т.е. угол между нормалью к поверхности и осью Oz острый) .

Выберем направление обхода (L) так, чтобы при движении по (L) в выбранном направлении область (S) оставалась слева (положительное направление обхода).

Пусть $f(x,y)$ – непрерывна в области (σ_{xy});
$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – непрерывны на (S) вместе со своими частными производными.

Тогда существует интеграл

$$\oint\limits_{+(L)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

и для него справедливо равенство:

$$\oint\limits_{+(L)} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \iint\limits_{(S)} (R'_y - Q'_z)dydz + (P'_z - R'_x)dxdz + (Q'_x - P'_y)dxdy$$

– **формула Стокса**

§13. Векторное поле

1. Определение векторного поля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* G *– некоторая область в пространстве* $Oxyz$ *. Говорят, что на* G *задано* ***векторное поле*** (***векторная функция***), *если в каждой точке* $M(x;y;z)\in G$ *задан вектор* $\bar{\mathbf{a}}$, *длина и направление которого зависят от координат точки* M.

Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}(x;y;z) = \bar{\mathbf{a}}(M)$ или $\bar{\mathbf{a}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$

Векторное поле может зависеть не только от координат точки, но и от времени. Такое поле называют ***нестационарным*** (***переменным***).

Будем рассматривать только ***стационарные*** (не зависящие от времени) векторные поля.

Частные случаи векторных полей:

1) Однородное поле

Векторное поле называется ***однородным***, если $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – постоянный вектор, т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}$.

2) Плоское поле

Векторное поле называется ***плоским***, если в выбранной системе координат координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ не зависят от одной переменной, причем проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ на ось отсутствующей переменной – нулевая.

Например, $\bar{\mathbf{a}}= P(x;y)\mathbf{i}+ Q(x;y)\mathbf{j}$

Основные характеристики векторных полей

1) Векторные линии
2) Поток вектора
3) Дивергенция
4) Циркуляция
5) Ротор

2. Векторные линии

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Векторной линией*** *векторного поля* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется линия, в каждой точке которой направление касательной совпадает с направлением поля (т.е. с вектором* $\bar{\mathbf{a}}(M)$).

ПРИМЕРЫ:

1) В поле скоростей текущей жидкости векторные линии – линии тока жидкости.
2) В электрическом (электромагнитном) поле векторные линии – силовые линии.

В векторном поле $\bar{\mathbf{a}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ векторные линии – решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}$$

3. Поток вектора. Дивергенция

Поток вектора и дивергенция – характеристики интенсивности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

(S) – незамкнутая ориентированная поверхность в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Потоком векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *через поверхность* (S) *называется величина* K, *равная*

$$K = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dxdy$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТОКА ВЕКТОРА

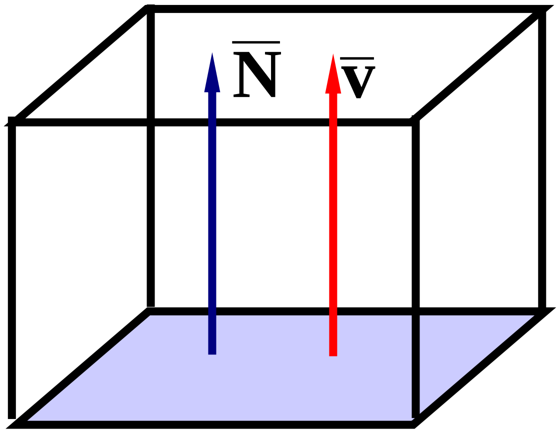
Пусть имеется текущая жидкость:

$\Rightarrow$ $\overline{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости.

(S) – незамкнутая двусторонняя поверхность, помещенная в жидкость

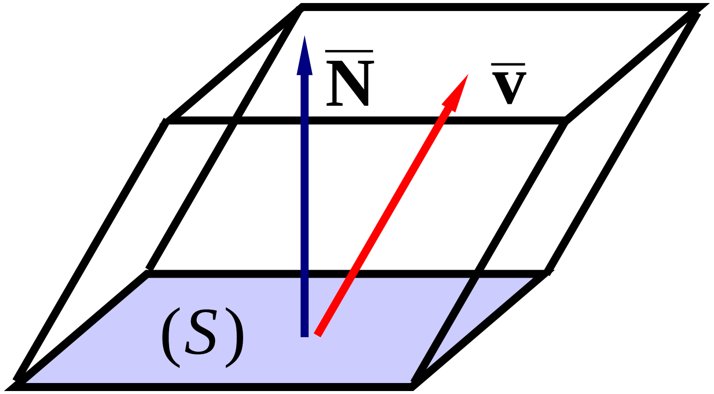
Найдем K – количество жидкости, протекающей через (S) за единицу времени (в направлении нормали $\overline{\mathbf{N}}$).

1) Пусть (S) – плоская область, $\overline{\mathbf{v}}$ – const, $\overline{\mathbf{v}} \perp (S)$.



$$\Rightarrow \ K = S \cdot |\, \overline{\mathbf{v}} \,|$$

2) Пусть (S) – плоская область, φ – угол между $\overline{\mathbf{v}}$ и $\overline{\mathbf{N}}$.



$$\Rightarrow \quad K = S \cdot \underbrace{\cos\varphi \cdot |\,\overline{\mathbf{v}}\,|}_{\text{Ïð}_{\overline{\mathbf{N}}}\overline{\mathbf{v}}}$$

Пусть $\overline{\mathbf{n}} \perp (S)$ и $|\,\overline{\mathbf{n}}\,| = 1.$

Тогда $$\text{Ïð}_{\overline{\mathbf{n}}}\overline{\mathbf{v}} = \frac{(\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{n}})}{|\,\overline{\mathbf{n}}\,|} = (\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{n}})$$

$$\Rightarrow \quad K = S \cdot (\overline{\mathbf{n}}\,, \overline{\mathbf{v}})$$

3) Рассмотрим общий случай.

Пусть (S) – произвольная поверхность,

$$\bar{\mathbf{v}} = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

а) Разобьем (S) на n частей, не имеющих общих внутренних точек: $(\Delta S_1), (\Delta S_2), \ldots, (\Delta S_n)$.

б) На каждой части (ΔS_i) выберем произвольную точку M_i

Если (ΔS_i) – мала, то (ΔS_i) можно считать плоской, а скорость жидкости постоянной и равной $\bar{\mathbf{v}}(M_i)$

$$\Rightarrow K_i \approx \Delta S_i \cdot (\bar{\mathbf{n}}(M_i), \bar{\mathbf{v}}(M_i))$$

где K_i – поток жидкости через (ΔS_i) .

$$\Rightarrow \quad K = \sum_{i=1}^{n} K_i \approx \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

$$\Rightarrow \quad K = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\bar{\mathbf{v}}(M_i), \bar{\mathbf{n}}(M_i)) \cdot \Delta S_i$$

где d_i – диаметр (ΔS_i) , $\quad \lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} d_i$

Получили:

$$K = \iint\limits_{(s)} (\overline{\mathbf{v}}, \overline{\mathbf{n}}) ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) ds$$

$$\Rightarrow \quad K = \iint\limits_{(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy$$

Таким образом, *если* $\overline{\mathbf{v}}(M)$ – *поле скоростей текущей жидкости*, *то* K – ***количество жидкости, протекающей через поверхность (S) за единицу времени*** (в направлении нормали).

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\mathbf{\nabla}(M)$ тупой, то $K<0$

$\Rightarrow$ жидкость течет в сторону, противоположную нормали к поверхности.

Если угол между нормалью к поверхности и вектором $\mathbf{\nabla}(M)$ равен 90°, то $K = 0$

$\Rightarrow$ жидкость через поверхность не течет (линии тока жидкости параллельны поверхности).

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТОКА ВЕКТОРА ЧЕРЕЗ ЗАМКНУТУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

Пусть $\bar{\mathbf{v}}(M)$ – поле скоростей текущей жидкости,
(S) – замкнутая поверхность (внешняя сторона), ограничивающая область (V)

Тогда $K=K_2-K_1$, где K_1 – количество жидкости втекающей в область (V), K_2 – количество жидкости вытекающей из (V) за единицу времени.

$\Rightarrow$ 1) Если $K>0$, то из (V) вытекает жидкости больше чем втекает (внутри области (V) имеются источники, добавляющие жидкость)

2) Если $K<0$, то из (V) вытекает жидкости меньше чем втекает (внутри области (V) имеются стоки, удаляющие жидкость)

3) Если $K=0$, то из (V) вытекает жидкости столько же, сколько втекает (внутри области (V) либо нет источников и стоков, либо их суммарная мощность равна)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Дивергенцией*** *векторного поля в точке* M *называется предел отношения потока вектора через замкнутую поверхность, окружающую точку* M, *к объему тела, ограниченного этой поверхностью, при условии, что вся поверхность стягивается в точку* M.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$.

Таким образом, если

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

то

$$\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \lim_{(S)\to M} \frac{\oint\!\!\oint_{(S)} P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy}{V}$$

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)>0$, то точка М называется ***источником***.

Если $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)<0$, то точка М называется ***стоком***.

Величина $|\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M)|$ характеризует мощность источника (стока).

ТЕОРЕМА. *Пусть в области* $G \subset Oxyz$ *задано векторное поле*:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}\,,$$

причем функции P,Q,R *и их частные производные непрерывны в* G .

Тогда $\forall M \in G$ *существует* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M)$ *и справедлива формула*

$$\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = \frac{\partial P(M)}{\partial x} + \frac{\partial Q(M)}{\partial y} + \frac{\partial R(M)}{\partial z}$$

ОБОЗНАЧИМ:

$$\bar{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right\}$$

Этот символический вектор называют ***набла-вектором*** или ***оператором Гамильтона***.

$$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = (\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{a}})$$

ТЕОРЕМА Остроградского – Гаусса в векторной форме.

Поток вектора $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *изнутри замкнутой поверхности* (S) (*т.е. нормаль к поверхности внешняя*) *равен тройному интегралу от дивергенции этого вектора по телу, ограниченному поверхностью* (S):

$$\iint\limits_{+(S)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(x, y, z)dxdydz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ТЕОРЕМЫ Остроградского – Гаусса:

В поле скоростей текущей жидкости поток жидкости через замкнутую поверхность равен суммарной мощности всех источников и стоков ограниченных этой поверхность.

СВОЙСТВА ДИВЕРГЕНЦИИ

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) = 0$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\operatorname{div}(C_1\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\bar{\mathbf{a}}_2) = C_1\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}_2$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\operatorname{div}[u(M)\cdot\bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M)\cdot\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) + (\operatorname{grad} u(M), \bar{\mathbf{a}}(M))$$

4. Циркуляция. Ротор

Циркуляция и ротор – характеристики вращательной способности поля.

Пусть в области $G \subset Oxyz$ задано векторное поле:

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

(ℓ) – замкнутый контур в G.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Циркуляцией векторного поля*** $\bar{\mathbf{a}}(M)$ (*вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M)$) *по замкнутому контуру* (ℓ) *называется величина* C, *равная*

$$C = \oint\limits_{(\ell)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА

Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ – сила, под действием которой точка перемещается по контуру (ℓ), то циркуляция вектора $\bar{\mathbf{a}}(M)$ – работа силы.

Наибольшего значения циркуляция будет достигать если (ℓ) – векторная линия.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Ротором векторного поля***

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$$

называется вектор $[\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}]$

ОБОЗНАЧАЮТ: $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$

Имеем:

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = [\overline{\nabla}, \bar{\mathbf{a}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ РОТОРА

Вектор $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M)$ указывает направление, ортогонально которому вращательная способность поля наибольшая.

ТЕОРЕМА (формула Стокса в векторной форме). *Циркуляция вектора* $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(x;y;z)\mathbf{i} + Q(x;y;z)\mathbf{j} + R(x;y;z)\mathbf{k}$ *по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую поверхность, ограниченную этим контуром* (говорят: *натянутую на этот контур*).

СВОЙСТВА РОТОРА

1) Если $\bar{\mathbf{a}}(M) = \text{const}$, то $\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{0}}$;

2) Если C_1, C_2 – const, то $\text{rot}(C_1\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\bar{\mathbf{a}}_2) = C_1\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_1 + C_2\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}_2$;

3) Если $u = u(x,y,z) = u(M)$, то

$$\text{rot}[u(M) \cdot \bar{\mathbf{a}}(M)] = u(M) \cdot \text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) + [\text{grad}\, u(M)\, ,\, \bar{\mathbf{a}}(M)]\ ;$$

4) $\text{rot}(\text{grad}\, u) = \bar{\mathbf{0}}$;

5) $\text{div}(\text{rot}\,\bar{\mathbf{a}}) = 0$.

5. Типы векторных полей

а) соленоидальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***соленоидальным*** (трубчатым), *если* $\operatorname{div}\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

Физический смысл: векторное поле соленоидальное $\Leftrightarrow$ в нем нет источников и стоков.

СВОЙСТВА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *является ротором некоторого векторного поля* (т.е. $\bar{\mathbf{a}}(M) = \operatorname{rot} \bar{\mathbf{b}}(M) = [\bar{\nabla}, \bar{\mathbf{b}}]$), *то оно является соленоидальным*.

   Вектор $\bar{\mathbf{b}}(M)$ называют ***векторным потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Поток векторного поля через любую замкнутую поверхность* (S) *равен нулю*.

б) потенциальное

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***потенциальным*** *если*

$$\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$$

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ

1) *Векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *потенциальное* $\Leftrightarrow$ *оно является градиентом некоторого скалярного поля*, т.е.

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\ u(M) = \bar{\nabla}\, u$$

Функцию $u(M)$ называют ***потенциалом*** векторного поля $\bar{\mathbf{a}}(M)$.

2) *Циркуляция потенциального векторного поля по любой замкнутой линии* (ℓ) *равен нулю.*

3) *Векторные линии потенциального поля незамкнуты.*

4) *В потенциальном поле векторные линии перпендикулярны к поверхностям уровня потенциала*

в) гармоническое

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *называется* ***гармоническим*** *если оно является соленоидальным и потенциальным одновременно.*

СВОЙСТВА ГАРМОНИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1) *Поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv \bar{\mathbf{0}}$ *и* $\mathrm{div}\,\bar{\mathbf{a}}(M) \equiv 0$.

2) *Если векторное поле* $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *гармоническое, то* $\exists \mathrm{u}(M)$ *такая, что*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \mathrm{grad}\,\mathrm{u}(M)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) называют ***уравнением Лапласа***.

Функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа, называется ***гармонической***.

Векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$, *не яляющееся соленоидальным, потенциальным или гармоническим, называется полем общего вида.*

ТЕОРЕМА (о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей).

Пусть $\bar{\mathbf{a}}(M) = P(M)\mathbf{i} + Q(M)\mathbf{j} + R(M)\mathbf{k}$ – *поле общего вида,*

$P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$ – *непрерывно дифференцируемы.*

Тогда векторное поле $\bar{\mathbf{a}}(M)$ *может быть представлено в виде*

$$\bar{\mathbf{a}}(M) = \bar{\mathbf{a}}_1(M) + \bar{\mathbf{a}}_2(M) ,$$

где $\bar{\mathbf{a}}_1(M)$ – *потенциальное поле,*

$\bar{\mathbf{a}}_2(M)$ – *соленоидальное поле.*