

## Вариант 1

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $x + y = 6$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x^3 y^3 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 4 - x$ ;

4.2.  $y^2 - 2y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $\sqrt{3}y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 4x$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 7x^2 + y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ ;

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = 16\sqrt{2x}, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad x + z = 2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $64(x^2 + y^2) = z^2$ ,  $x^2 + y^2 = 4$ ,

$y = z = 0$  ( $y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2 yz \vec{i} - xy^2 z \vec{j} + xyz^2 \vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + (y^2 - 2x)\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;0)$  в точку  $A(1;1)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  вдоль контура  $L$ :  $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$ ,  $y = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t$ ,  $z = \sin t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L y dl$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = \frac{x^2}{2}$  от точки  $A(0;0)$  до точки  $B(2;2)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(4;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 9\pi x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ ,  $S$ :  $2x + 8y + \frac{z}{3} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ ,  $S$ :  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x^2 y^2 z + 1) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 2

Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2 - 2x + 4$ ,  $y = 3$ ,  $x = -1$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y\sqrt{x} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ;

3.2.  $\iint_D (xy - 9x^5 y^5) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x^2$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ;

4.2.  $y = 6 + x - x^2$ ,  $y = 6 - 2x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 2x$ , ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7}{8}x^2 + 2y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^3 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = \pi$ ,

$y = \pi$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = y; \quad x^2 + y^2 = 4y; \quad z = 0; \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 2z$ ,

$x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его

в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10x$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x(y^2 - z^2)\mathbf{i} - y(z^2 + x^2)\mathbf{j} + z(x^2 + y^2)\mathbf{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 + 2y)\mathbf{i} + (y^2 + 2x)\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(-4;0)$  в точку  $A(0;2)$  по дуге параболы  $y = 2 - \frac{1}{8}x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = -x^2y^3\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$  вдоль контура  $L$ :  $x = \sqrt[3]{4} \cos t$ ,  $y = \sqrt[3]{4} \sin t$ ,  $z = 3$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{x+y}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = x + 2$ , соединяющий точки  $A(0,2)$  и  $B(1;3)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^2 dx + (x+y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(2;0)$ ,  $B(2;2)$ ,  $C(0;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = \pi x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ,  $S$ :  $2x + \frac{y}{6} + z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + (y^2 + x^2)\mathbf{j} + (y^2 + z^2)\mathbf{k}$ ,  $S$ :  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (3xy + 4yz) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -3x - 2y + 1$ , лежащая в первом октанте.

### Вариант 3

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^3$ ,  $y = 8$ ,  $x = 1$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x^2 y^3 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = -1$ ;

3.2.  $\iint_D (54x^2 y^2 + 150x^4 y^4) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = 2x^2$ ,  $y = 3 - x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 2x$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7}{8}x^2 + 2y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = -2$ ,  $y = 4x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = 5\sqrt{x}; \quad y = \frac{5}{3}x; \quad z = 0; \quad z = 5 + \frac{5}{3}x.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 27$ ,  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10x$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = (x^2 + y)zi - x(y^2 + z)j + (x + y)z^2k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 + 2y)i + (y^2 + 2x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(1;1)$  в точку  $A(2;4)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$$

вдоль контура  $L: x = \cos t, y = \sin t, z = 2(1 - \cos t)$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L x^2 dl$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{1}{2}x - 1$ , соединяющий точки  $A(0, -1)$  и  $B(2;0)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (y^2 - x^2)dx + (3x^2 + y^2)dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(2;0), C(0;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = \pi xi + \frac{\pi}{2} yj + (4 - 2z)k, S: x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = -xi + 2yj + yzk, S: z = x^2 + y^2, z = 4$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (4x^2y + 3z) dS$ , где  $S$  – часть плоскости  $z = -x - y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 4

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2 - 4x + 4$ ,  $y = 4 - x^2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D ux^2 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint (9x^2 y^2 + 25x^4 y^4) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 10x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \sqrt{3x}$ ;

4.2.  $y = 2x^2$ ,  $y = x + 3$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x; y) = \frac{7}{2}x^2 + 6y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,

$y = 2$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + 2y^2 = 3z$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ;

( $z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = x + y$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2(y - z)\vec{i} - xy^2z\vec{j} + (x + y)z^2\vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x - y)\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(-1;1)$  в точку  $A(1;1)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$  вдоль контура  $L: x = \cos t$ ,  $y = \frac{\sqrt{2} \sin t}{2}$ ,  $z = \frac{\sqrt{2} \cos t}{2}$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{x - y + 1}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = -2 + \frac{x}{2}$ , соединяющий точки  $A(0, -2)$  и  $B(4;0)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x + 2y)dx + 4xydy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(1;0)$ ,  $C(0;1)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 9\pi x\mathbf{i} + (5y + 1)\mathbf{j} + 2\pi z\mathbf{k}$ ,  $S: 3x + y + \frac{z}{9} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = y\mathbf{i} + 2zy\mathbf{j} + 2z^2\mathbf{k}$ ,  $S: 1 - z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} xyz dS$ , где  $S$  – часть плоскости  $z = -x - y + 1$ ,

лежащая в первом октанте.

## Вариант 5

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f(x, y) dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2 - 2x + 2$ ,  $y = 2 + 6x - x^2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x^2 \sqrt{y} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 4$ ;

3.2.  $\iint_D \left( 3x^2 y^2 + \frac{50}{3} x^4 y^4 \right) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x^3$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 2y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x = 0$ .

4.2.  $y = 3 - 0,5x^2$ ,  $y = 2 - 0,5x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 4x^2$ , если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 2x + 6y^3$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^1 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2x$ ,  
 $z = 0$ ,  $z = 36$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2; \quad y = \sqrt{x}; \quad y = 0; \quad z = 15x; \quad z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 = 4z^2$ ,  $x = 0$ ;  
 $y = 0$ ; ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 20z$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = xy^3 z \vec{i} - xyz^2 \vec{j} + x^3 yz \vec{k}$  найдите  $\operatorname{rot} \vec{a}$ ,  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = x^2yi - yj$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(-1;0)$  в точку  $A(0;1)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля:

$$\vec{a} = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$$

вдоль контура  $L: x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 1 - \cos t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}},$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 2x$ , соединяющий точки  $A(0,0)$  и  $B(2;1)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^{-1}dx - x^{-1}dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(1;1), B(2;1), C(2;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 5\pi xi + (9y + 1)j + 4\pi zk, S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

6.2.  $\vec{a} = (y^2 + z^2)i + (xy + y^2)j + (xz + z)k, S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (3xy + 4yz) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -3x - 2y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 6

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2$ ,  $y = 2x - x^2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y^2 x^3 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = -1$ ;

3.2.  $\iint_D \left( 6x^2 y^2 + \frac{25}{3} x^4 y^4 \right) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $1 \leq \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 3$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq \frac{x}{4}$ ;

4.2.  $y = x^2 - x + 3$ ,  $y = 4x - 1$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 16x$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 8y + x^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = \pi$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2; y = \sqrt{x}; y = 0; z = 15x; z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 4z$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 5y$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = xyz^2 \vec{i} - x^3 yz \vec{j} + (x + y)z^2 \vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = xy\mathbf{i} + (y + x)\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;0)$  в точку  $A(1;1)$  по дуге параболы  $y = 1 - x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = 2y\mathbf{i} - 3x\mathbf{j} + x\mathbf{k}$  вдоль контура  $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2 - 2\sin t - 2\cos t$

в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{x + y},$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = x + 2$ , соединяющий точки  $A(1,3)$  и  $B(2;4)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(2;0), B(2;2), C(0;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = (2x + 1)\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 3\pi z\mathbf{k}, S: \frac{x}{3} + y + 2z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = y^2 x\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} + \frac{z^3}{3}\mathbf{k}, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (xy + yz + xz) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 7

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-1}^{-\ln y} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \sqrt{x} y^2 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 2$ ;

3.2.  $\iint_D (4xy + 176x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x^3$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 8y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 10y + x^2 = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ;

4.2.  $y = x^2 + 2x + 6$ ,  $y = -3x + 2$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = 2x$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7x^2}{8} + 2y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x - y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{4}\right) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = \frac{x}{2}$ ,

$z = 0$ ,  $z = -\pi^2$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad z = 8 - y^2, \quad z = 0.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 8z$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;

$z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 5x$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = \sqrt{x}zi - y^2zj + xyz^2k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = yi + (2y + 5x^2)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(-4;0)$  в точку  $A(0;2)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = 2zi - xj + yk$  вдоль контура  $L: x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 1$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .
4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{2x + y},$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = x + 3$ , соединяющий точки  $A(1,4)$  и  $B(2;5)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(1;1), B(3;2), C(2;5)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 2\pi xi + (7y + 2)j + 7\pi zk, S: x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

6.2.  $\vec{a} = zi + yzj - xyk, S: x^2 + y^2 \leq 4, z = 0, z = 4.$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (xy + yz + xz) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - 7y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 8

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2 - 4x + 5$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \sqrt{yx} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint_D (xy - 4x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 10y + x^2 = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = x^2 - x - 3$ ,  $y = 2x + 1$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7}{2}x^2 + 6y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^3 (x - y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V x^2 z \sin\left(\frac{xyz}{4}\right) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  
 $y = 2\pi$ ,  $z = 0$ ,  $z = 4$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = 20\sqrt{2y}; \quad x = 5\sqrt{2y}; \quad z = 0; \quad y + z = 0,5.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = \frac{4}{25}z^2$ ;  $x^2 + y^2 = \frac{2}{5}z$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 28xz$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = xy^3zi - x\sqrt{y}zj + 2yz^2k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 - y)i + (y^2 - 2x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;2)$  в точку  $A(3;-1)$  по прямой.
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = xi + z^2j + yk$  вдоль контура  $L: x = \cos t$ ,  $y = 2\cos t$ ,  $z = 2\cos t - 2\sin t - 1$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{x-y}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = -2 + \frac{x}{2}$ , соединяющий точки  $A(0, -2)$  и  $B(4;0)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (y^2 - x^2)dx + (3x^2 + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(0;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = (\pi - 1)xi + 2\pi yj + (1 - \pi z)k$ ,  $S: \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = yi + y^2j + yzk$ ,  $S: z = x^2 + y^2$ ,  $z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (4xyz - x)dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - 4y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 9

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = -x^2 - 4x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -3$ ,  $x = -1$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \sqrt{xy^3} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 2$ ;

3.2.  $\iint_D (4xy + 176x^3y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x^2$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y = \sqrt{3x}$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = -4x + x^2$ ,  $y = -4 + x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = 4x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = x + 3y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (x - y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = -2$ ,  $y = 4x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 6x; \cdot x^2 + y^2 = 9x; y = 0; z = 0; z = \sqrt{x^2 + y^2}; (y \leq 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = z^2$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ; ( $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$ ;  $z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 6z$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = (x^2 - y)zi - (x + y^2)zj + x(y - z^2)k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = 2yi + (y + 3x^2)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(-4;0)$  в точку  $A(0;2)$  по дуге параболы  $y = 2 - \frac{1}{8}x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = yi - xj + zk$  вдоль контура  $L: x = \cos t, y = \sin t, z = 3$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{x^2 + y^2},$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 4 - 2x$ , соединяющий точки  $A(0,4)$  и  $B(2;0)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x^2 - 2y)dx + (3x + y)dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(2;0), C(0;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 9\pi yj + (7z + 1)k, S: x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = (x + z)i + yk, S: z = 8 - x^2 - y^2, z = x^2 + y^2$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (x^2 + y^2 + 2z)dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - 2y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 10

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f(x, y) dy + \int_{\ln x}^2 dx \int_1^1 f(x, y) dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному

и расставьте пределы интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = -x^2 - 4x$ ,  $y = 1$ ,  $x = -3$ ,  $x = -1$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y^2 x^2 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = -3$ ;

3.2.  $\iint_D (44x + 16x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 8x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ;

4.2.  $y = x^2 + x + 2$ ,  $y = -2x + 6$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 3x + 6y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^1 (x - y + z) dz$ .

6.2.  $\iiint_V 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x = \frac{5}{2}\sqrt{y}, \quad x = \frac{5}{6}y, \quad z = 0, \quad z = \frac{5}{6}(3 + \sqrt{y})$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $25(x^2 + y^2) = z^2$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 2(x^2 + y^2)$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2\sqrt{y}zi - \sqrt{x}y^2j + 4yz^2k$  найдите  $\text{rot}\vec{a}$ ,  $\text{div}\vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot}\vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 + y)i + (y^2 - x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;0)$  в точку  $A(2;2)$  по дуге параболы  $y = \frac{1}{2}x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = 3yi - 3xj + xk$  вдоль контура  $L: x = 3\cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $z = 3 - 3\sin t - 3\cos t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x+y}}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{x-3}{2}$ , соединяющий точки  $A(3,0)$  и  $B(5;1)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(1;1)$ ,  $B(2,2)$ ,  $C(1;3)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = \pi yj + (4 - 2z)k$ ,  $S: 2x + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = (y + z)i + (x - 2y + z)j + xk$ ,  $S: x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x - y - z)dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - y + 2$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 11

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y^3 x dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = -2$ ;

3.2.  $\iint_D (4xy + 16x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 8x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;

4.2.  $y = -x^2 - x - 2$ ,  $y = 2x - 6$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 2x + 3y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x - y + z) dz$ .

6.2.  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $z = 0$ ,  $z = 8$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0, \quad (z \geq 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $16(x^2 + y^2) = z^2$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$  ( $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 5(x^2 + y^2)$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = \frac{xy}{z}i - y^2zj + \frac{z}{x}k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 - y)i + (y^2 - 2x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;0)$  в точку  $A(1;1)$  по дуге параболы  $y = x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = -x^2y^3i + 2j + xzk$  вдоль контура  $L: x = \sqrt{2} \cos t, y = \sqrt{2} \sin t, z = 1$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .
4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2}}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = -x + 4$ , соединяющий точки  $A(0,4)$  и  $B(4;0)$ .
5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L \frac{3}{4} x^2 y^2 dx + \frac{x^2}{2} (1 + xy) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(1;0)$ ,  $C(0;1)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

$$6.1. \vec{a} = 7\pi xi + (4y + 1)j + 2\pi zk, S: \frac{x}{3} + 2y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$6.2. \vec{a} = (3yz - x)i + (x^2 - y)j + (6z - 1)k, S: z^2 = 9(x^2 + y^2), z = 3.$$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (y^2 + x^2z) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - 7y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 12

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f(x, y) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y^3 \sqrt{x} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 3$ ;

3.2.  $\iint_D (4xy + 16x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x^3$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 8y + x^2 = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ;

4.2.  $y = x^2 + 5x - 1$ ,  $y = 2x + 3$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y^2 = 8x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 7x + 3y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x - y + z) dz$ .

6.2.  $\iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,

$y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2; x = \sqrt{y}; x = 0; z = 0; z = 30y.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = 6z$ ;

$x = y = z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 20y$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2 z \vec{i} - x(y + z) \vec{j} + x(y - z^2) \vec{k}$  найдите  $\operatorname{rot} \vec{a}$ ,  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = xyi + (y^2 - x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(1;0)$  по дуге параболы  $y = (1-x)^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = bz i - xj + xzk$  вдоль контура  $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 3$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L e^{2x} dl,$$

где  $L$  – дуга кривой  $y = e^x$  от точки  $A(0,1)$  до точки  $B(\ln 4;4)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0), B(2;0), C(4;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = (21\pi - 1)i + 62\pi yj + (1 - 2\pi z)k, S: 8x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

6.2.  $\vec{a} = (3x - y - z)i + 3yj + 2zk, S: z = x^2 + y^2, z = 2y.$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (xy + yz + xz) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - 4y + 2$ , лежащая в первом октанте.

### Вариант 13

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-2-x}^0 f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f(x, y) dy.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = (x + 2)^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x^3 y dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = -2$ ;

3.2.  $\iint_D (6xy + 24x^3 y^3) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x^2$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 2y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 6y + x^2 = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = 1 - 5x - x^2$ ,  $y = -2x - 3$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = 4x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 2y + 7x^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (x + y - z) dz$ .

6.2.  $\iiint_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = 2x$ ,  $z = 0$ ,  $z = -1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad z = 0, \quad z = \frac{9}{4} - x^2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{25}$ ;  $x^2 + y^2 = \frac{z}{25}$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 14yz$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2 yz \mathbf{i} - \frac{y}{x} \mathbf{j} + (x-2y)z^2 \mathbf{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(1;4)$  по дуге параболы  $y = (x+1)^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = z\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - x\mathbf{k}$  вдоль контура  $L: x = \sqrt{2} \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ ,  $z = \sqrt{2} \cos t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{x}{2}$ , соединяющий точки  $A(0,0)$  и  $B(1;2)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (xy + x + y)dx + (xy + x - y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(1;1)$ ,  $B(2;2)$ ,  $C(1,3)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 4\pi x \mathbf{i} + 7\pi y \mathbf{j} + (2z + 1)\mathbf{k}$ ,  $S: 2x + \frac{y}{3} + 2z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = xy^2 \mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ,  $S: x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 1$ ,  $z = 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x^2 + y^2 z) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -3x - 8y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 14

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = 2x - x^2$ ,  $y = 0$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x^3 \sqrt{y} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint_D \left( \frac{4}{5} xy - 9x^3 y^3 \right) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x - 2x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 4x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ;

4.2.  $y = x^2 - x + 2$ ,  $y = 2x + 6$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = 16x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7x^2}{4} + \frac{y}{2}$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^1 dy \int_0^3 (x + y - z) dz$ .

6.2.  $\iiint_V y^2 z \cos\left(\frac{xyz}{3}\right) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,

$y = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 2\pi$

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x + y = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad z = 0, \quad z = \frac{12}{5}x.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 9z^2$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10z$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = ye^{-x}i - y^2zj + x(y^2 - z^2)k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x - y)i + (y + x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(1;0)$  по дуге параболы  $y = 1 - x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = xi + 2z^2j + yk$  вдоль контура  $L: x = \cos t$ ,  $y = 3\sin t$ ,  $z = 2\cos t - 3\sin t - 2$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L y dl,$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 1 - \frac{3}{4}x$ , соединяющий точки  $A(0,1)$  и  $B(4;-2)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L y^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(3;0)$ ,  $B(3;3)$ ,  $C(0;3)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

$$6.1. \vec{a} = \pi yj + (1 - 2z)k, S: \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$6.2. \vec{a} = x^3i + y^3j + z^3k, S: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x^2 + y^2 - z) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - 5y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 15

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = \frac{1}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \sqrt{x^3 y} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint_D \left( \frac{4}{5} xy + 9x^2 y^2 \right) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = -x^3$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 2x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 6x + y^2 = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ;

4.2.  $y = -x^2 + x - 2$ ,  $y = -2x - 6$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = 16x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7x^2}{4} + y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^2 dy \int_0^1 (x + y - z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi xy}{2}\right) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = x$ ,

$z = 0$ ,  $z = 2\pi^2$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 5y, \quad z = 0, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $9(x^2 + y^2) = z^2$ ;  $x^2 + y^2 = 4$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ;  $z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна

$\rho(x, y) = \frac{5}{3}(x^2 + y^2)$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2 z \vec{i} - y^2 \cos z \vec{j} + xz^2 \vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x + y^2) \vec{i} + (y - x) \vec{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(1;2)$  по дуге параболы  $y = x^2 + 1$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = x \vec{i} - \frac{1}{3} z^2 \vec{j} + y \vec{k}$  вдоль контура  $L: x = \frac{\cos t}{2}$ ,

$y = \frac{\sin t}{3}$ ,  $z = \cos t - \frac{\sin t}{3} - \frac{1}{4}$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,

$0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x dl,$$

где  $L$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $A(1,1)$  до точки  $B(2;4)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(1;1)$ ,  $B(3;2)$ ,  $C(2;5)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = (5y + 3) \vec{j} + 11\pi z \vec{k}$ ,  $S: x + \frac{y}{3} + 4z = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = x^2 \vec{i} + xy \vec{j} + 3z \vec{k}$ ,  $S: z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z = 4$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (z^2 - xy) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -4x - 5y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 16

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D xy^2 dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -3$ ,  $y = -1$ ;

3.2.  $\iint_D \left( \frac{4}{5} xy + \frac{9}{11} x^2 y^2 \right) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $x = \sqrt[3]{y}$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 6y + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 8y + y^2 = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = x$ ;

4.2.  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = 4 + x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = \frac{7x^2}{2} + 8y$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x + y - z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,  $y = -1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = 17\sqrt{2x}; \quad y = 2\sqrt{2x}; \quad z = 0; \quad x + z = 0,5.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $(x^2 + y^2 \leq 1)$ , если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 6z^2$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = (3x - y)zi + y^2(z - 3)j + \sqrt{xz^2}k$  найдите  $\operatorname{rot} \vec{a}$ ,  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = x^2 yi + (y - x)j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(4;-1)$  по дуге параболы  $y = 1 - \frac{1}{2}x^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = 4yi - 3xj + xk$  вдоль контура  $L: x = 4\cos t$ ,  $y = 4\sin t$ ,  $z = 4 - 4\cos t - 4\sin t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x dl,$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 1 - 2x$ , соединяющий точки  $A(0,1)$  и  $B(2;-3)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (y - x^2) dx + (x + y^2) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(4;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = xi + (\pi z - 1)k$ ,  $S: 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = 3xzi - 2xj + yk$ ,  $S: x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (xyz + x + y) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - y + 2$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 17

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = 2^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D x\sqrt{y} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $y = 4$ ;

3.2.  $\iint_D (8xy + 18x^2 y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = -x^2$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 8y + x^2 = 0$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = -x^2 + 2x$ ,  $y = -4 - x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 1$ ,  $y^2 = 4x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 6x + 3y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^2 dx \int_0^3 dy \int_0^1 (x + y - z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2x$ ,  $z = 0$ ,  $z = \pi^2$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0, \quad z = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad (z \geq 0).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x^2 + y^2 = z$ ;  $x = 0$ ;  $y = 0$ ;  $z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10y$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = \frac{xz}{y} \vec{i} - (y^2 + 3z) \vec{j} + x \sin z \vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x - y)\mathbf{i} + (x^2 - 2y)\mathbf{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;2)$  в точку  $A(1;1)$  по дуге параболы  $y = 2 - x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = -z\mathbf{i} - x\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$  вдоль контура  $L: x = 5\cos t, y = 5\sin t, z = 4$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L x dl$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = \frac{3}{8}x^2$  от точки  $A(0,0)$  до точки  $B(4;6)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (2x - y)^2 dx + (x^2 + y) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(-1;0), B(0;1), C(1;0)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 7\pi x\mathbf{i} + 2\pi y\mathbf{j} + (7z + 2)\mathbf{k}, S: x + y + \frac{z}{2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = (zx + y)\mathbf{i} - (2y - x)\mathbf{j} - (x^2 + y^2)\mathbf{k}, S: z = x^2 + y^2, z = 4, x = 0, y \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x^2 - y^2 - z) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - y + 1$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 18

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f(x, y) dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ ,  $y = e$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \sqrt[3]{xy} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = -2$ ,  $y = 1$ ;

3.2.  $\iint_D (12xy + 27x^2 y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $x^2 - 6x + y^2 = 0$ ,  $x^2 - 10x + y^2 = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ;

4.2.  $y = x^2 + 2x + 1$ ,  $y = -3x - 3$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = 2$ ,  $y^2 = \frac{x}{2}$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 4x + 6y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x + y - z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 0,5$ ,  $z = 0$ ,  $z = 0,5$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$y = \frac{5}{3}\sqrt{x}; \quad y = \frac{5}{9}x; \quad z = 0; \quad z = \frac{5}{9}(3 + \sqrt{x}).$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = \frac{z^2}{49}$ ;  $x^2 + y^2 = \frac{z}{7}$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10xz$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = \frac{xz}{y}i - \sqrt{z}y^2j + (x - z^2)k$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x - y^2)i + yxj$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0; -1)$  в точку  $A(1; 0)$  по дуге параболы  $y = x^2 - 1$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = zi + xj + yk$  вдоль контура  $L: x = 2\cos t$ ,  $y = 2\sin t$ ,  $z = 0$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L x dl,$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 2x - 3$ , соединяющий точки  $A(2, 1)$  и  $B(3; 3)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (xy - 2x + y)dx + (x^2 + y)dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0; 0)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(4; 0)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 7xi + (5\pi y + 2)j + 4\pi zk$ ,  $S: x + y + \frac{z}{2} = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = 6xi - 2yj - zk$ ,  $S: z = 3 - 2(x^2 + y^2)$ ,  $z^2 = x^2 + y^2$ ,  $z \geq 0$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (xy - z + 1)dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -x - y + 2$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 19

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dy \int_{-2-y}^0 f(x, y) dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint_D f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы

интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = \frac{1}{2^x}$ ,  $y = 1$ ,  $x = -2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ,  $y = 9$ ;

3.2.  $\iint_D (24xy + 18x^2 y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^3$ ,  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $y^2 - 4y + x^2 = 0$ ,  $y^2 - 8y + x^2 = 0$ ,  $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ ,  $x = 0$ ;

4.2.  $y = -2x - x^2 - 1$ ,  $y = 3 + 3x$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = \frac{1}{2}$ ,  $y^2 = 2x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 4x + 9y^2$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_0^3 (-x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = -1$ ,  $y = 0$ ,  $y = x$ ,

$z = 0$ ,  $z = 8$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 0, \quad z = 10 - y^2.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ;  $x^2 + y^2 = 4z^2$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 10z$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = x^2 e^{yz} \vec{i} - \frac{y^2}{z} \vec{j} + (xy - z^2) \vec{k}$  найдите  $\text{rot } \vec{a}$ ,  $\text{div } \vec{a}$  и  $\text{div}(\text{rot } \vec{a})$ .

2. Найдите работу силы  $\vec{F} = xy\vec{i} + x^2\vec{j}$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;1)$  в точку  $A(1;4)$  по дуге параболы  $y = (x+1)^2$ .

3. Вычислите циркуляцию векторного поля:

$$\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$$

вдоль контура  $L: x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2(1 - \cos t)$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

4. Вычислите криволинейный интеграл  $\int_L \frac{dl}{\sqrt{x+y+4}}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = 3 - 2x$ , соединяющий точки  $A(1,1)$  и  $B(2;-1)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x - y)^2 dx + (x + y)^2 dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(-2;0), B(0;2), C(2;0)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

6.1.  $\vec{a} = 2\pi x\vec{i} + 6\pi y\vec{j} + 10\vec{k}, S: 2x + y + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ .

6.2.  $\vec{a} = (2x + y)\vec{j} + (y + 2z)\vec{k}, S: z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2)$ .

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(s)} (z - xy) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -2x - y + 2$ , лежащая в первом октанте.

## Вариант 20

1. Измените порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f(x, y) dx.$$

2. Перейдите в двойном интеграле  $\iint f(x, y) dx dy$  к двукратному и расставьте пределы интегрирования, если область  $D$  ограничена линиями  $y = e^x$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $x = 2$ .

3. Вычислите двойной интеграл:

3.1.  $\iint_D y^2 \sqrt{x^3} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = -2$ ;

3.2.  $\iint_D (4xy + 3x^2 y^2) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x = 1$ ,  $y = x^2$ ,  $y = -\sqrt{x}$ .

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями:

4.1.  $1 \leq \frac{x^2}{16} + y^2 \leq 3$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq \frac{x}{4}$ ;

4.2.  $y = x^2 + 4x + 3$ ,  $y = 9x - 1$ .

5. Найдите массу пластинки, ограниченной линиями  $x = \frac{1}{4}$ ,  $y^2 = 16x$ ,  $y = 0$  ( $y \geq 0$ ), если

плотность её в каждой точке равна  $\rho(x, y) = 16x + \frac{9y^2}{2}$ .

6. Вычислите тройной интеграл:

6.1.  $\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (-x + y + z) dz$ ;

6.2.  $\iiint_V x^2 z \sin\left(\frac{xyz}{2}\right) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена поверхностями  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$ ,

$y = 4$ ,  $z = 0$ ,  $z = \pi$ .

7. Найдите объём тела, ограниченного поверхностями

$$x + y = 4, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 0, \quad z = 3y.$$

8. Найдите массу тела, ограниченного поверхностями  $16(x^2 + y^2) = z^2$ ;  $x^2 + y^2 = 1$ ;  $x = 0$ ;

$y = 0$ ;  $z = 0$ ; ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ), если плотность его в каждой точке равна

$\rho(x, y) = 5(x^2 + y^2)$ .

1. Для векторного поля  $\vec{a} = z \cos x i - (y^2 - 2z) j + xz^2 k$  найдите  $\operatorname{rot} \vec{a}$ ,  $\operatorname{div} \vec{a}$  и  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$ .
2. Найдите работу силы  $\vec{F} = (x^2 - y) i + (y - x^2) j$ , совершаемую при перемещении материальной точки массой  $m$  из точки  $O(0;0)$  в точку  $A(1;-1)$  по дуге параболы  $y = -x^2$ .
3. Вычислите циркуляцию векторного поля  $\vec{a} = 2yi - zj + xk$  вдоль контура  $L: x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 4 - \sin t - \cos t$  в направлении, соответствующем возрастанию параметра  $t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .
4. Вычислите криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{dl}{2x + 4y - 3},$$

где  $L$  – отрезок прямой  $y = 5x - 1$ , соединяющий точки  $A(0, -1)$  и  $B(1;4)$ .

5. Вычислите с помощью формулы Грина интеграл

$$\int_L (x + y)^2 dx + (x^2 - y^2) dy,$$

где  $L$  – контур треугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(2;0)$ ,  $C(4;2)$ .

6. Вычислите поток векторного поля  $\vec{a}$  через замкнутую поверхность  $S$  (нормаль внешняя), применив теорему Остроградского – Гаусса:

$$6.1. \vec{a} = 6\pi x i + 3\pi y j + 10k, S: 2x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$$

$$6.2. \vec{a} = zi - 4yj + 2xk, S: z = x^2 + y^2, z = 9, x \geq 0, y = 0.$$

7. Вычислите поверхностный интеграл  $\iint_{(S)} (x^3 z - yx) dS$ , где  $S$  – часть плоскости

$z = -3x - y + 3$ , лежащая в первом октанте.