Глава 3. Функции нескольких переменных

Лектор – Шерстнёва
Анна Игоревна

§1. Определение функции нескольких переменных. Предел и непрерывность ФНП

1. Определение функции нескольких переменных

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Пусть $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i \subseteq \mathbb{R}\}$, $U \subseteq \mathbb{R}$.

Функция $f : X \to U$ *называется* ***функцией n переменных***.

Записывают: $$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где f – закон, задающий соответствие между $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и u.

Называют:

X – область определения функции (Обозначают: D(u)),

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – аргументы (независимые переменные),

U – область значений (Обозначают: E(u)),

u ($u \in U$) – зависимая переменная (функция).

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФНП

1) словесный;
2) табличный;
3) аналитический:
   а) явное задание (т.е. формулой $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$)
   б) неявное задание (т.е. уравнением $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$).
4) Функцию $z = f(x,y)$ можно задать графически.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Графиком функции*** $z = f(x,y)$ *называется геометрическое место точек пространства с координатами* $(x; y; f(x,y))$, $\forall (x,y) \in D(z)$.

График функции $z = f(x,y)$ будем также называть «поверхностью $z = f(x,y)$ ».

Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называют геометрическое место точек (x,y) плоскости, в которых функция принимает одно и то же значение C.

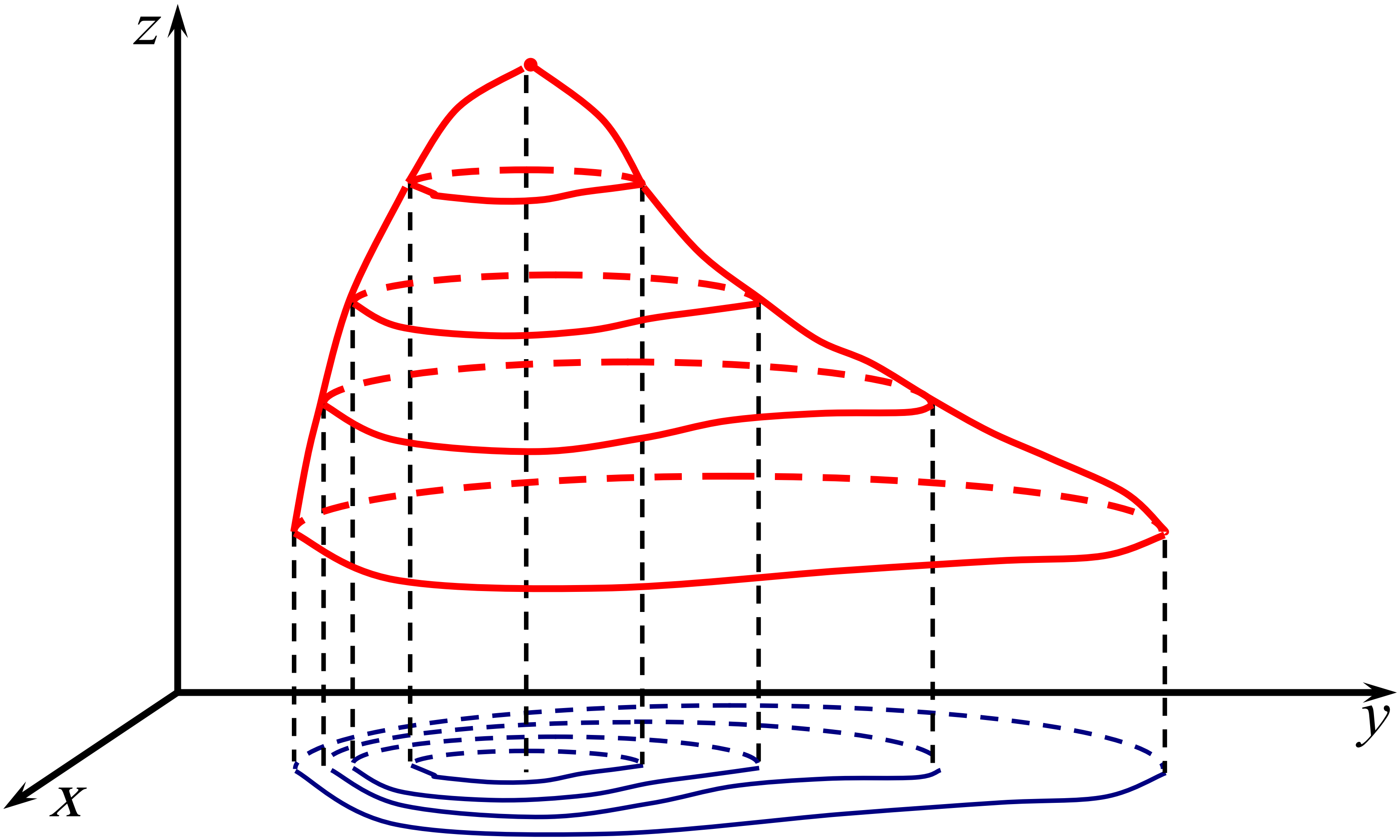
$\Rightarrow$ 1) Линия уровня – линия в $D(z)$, которая имеет уравнение

$$f(x,y) = C\,.$$

2) Линия уровня – проекция на плоскость xOy линии пересечения графика функции $z = f(x,y)$ и плоскости $z = C$.

Полагаем C равными $C_1,\ C_1 + h,\ C_1 + 2h,\ \ldots,\ C_1 + nh$.

Получим линии уровня, по расположению которых можно судить о графике функции и, следовательно, о характере изменения функции.



Таким образом, там, где линии «гуще», функция изменяется быстрее (поверхность, изображающая функцию, идет круче).

Поверхностью уровня функции $u = f(x,y,z)$ называют геометрическое место точек пространства $Oxyz$, в которых функция принимает одно и то же значение C.

Уравнение поверхности уровня: $f(x,y,z) = C$.

2. Предел функции нескольких переменных

Напомним:

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***при*** $\boldsymbol{x}$ ***стремящемся к*** $\boldsymbol{x_0}$ (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\text{если } x \in \mathrm{U}^*(x_0, \delta) \text{ , то } f(x) \in \mathrm{U}(A, \varepsilon) \text{ .}$$

Последовательность $(x_1, x_2 , \ldots, x_n)$ будем считать декартовыми координатами точки n-мерного пространства и рассматривать функцию n переменных как функцию точки этого пространства.

$\mathbb{R}^n$ – n-мерное пространство,
$u = f(M)$, где $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ – функции n переменных.

Если $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2) \in Oxyz$, то расстояние между ними

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} .$$

Обобщая эти формулы, будем считать, что расстояние между точками n-мерного пространства

$$M_1(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ M_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

равно

$$|M_1 M_2| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} .$$

Пусть $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}) \in \mathbb{R}^n$. Множество точек $\mathbb{R}^n$, находящихся от M_0 на расстоянии меньшем ε, будем называть ***ε-окрестностью точки M_0*** и обозначать $U(M_0,\varepsilon)$.

Иначе говоря, ε-окрестность $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ состоит из таких точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых имеет место неравенство

$$|M_0M| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \varepsilon$$

При $n = 1$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Ox \mid |M_0M| = |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

При $n = 2$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in xOy \mid |M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ – круг с центром в точке $M_0(x_0,y_0)$ и радиусом ε.

При $n = 3$

$$U(M_0,\varepsilon) = \{M \in Oxyz \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \varepsilon\},$$

т.е. $U(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – шар с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ и радиусом ε.

ε-окрестность точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$ без самой точки M_0 будем называть ***проколотой*** и обозначать $U^*(M_0,\varepsilon)$

Пусть функция n переменных $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0 \in \mathbb{R}^n$, кроме, может быть, самой M_0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции $f(M)$ при M стремящемся к M_0*** (пределом функции $f(M)$ в точке M_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

$$\text{если } M \in U^*(M_0, \delta) \text{, то } f(M) \in U(A, \varepsilon).$$

Записывают в общем случае:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A, \qquad f(M) \to A, \text{ при } M \to M_0$$

Для функции $z = f(x,y)$:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = A.$$

Замечания.

1) Условие $M \in U^*(M_0, \delta)$ означает, что выполняется неравенство:
$$0 < \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + \ldots + (x_n - x_{0n})^2} < \delta$$

2) Условие $f(M) \in U(A, \varepsilon)$ означает, что для $f(M)$ выполняется неравенство $$|f(M) - A| < \varepsilon$$

3) Так как формально определение предела функции n переменных ничем не отличается от определения предела функции одной переменной, то все утверждения, которые были получены о пределах функции одной переменной и в которых не используется упорядоченность точек числовой прямой, остаются верными и для предела функции n переменных.

3. Непрерывность функции нескольких переменных

Пусть $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности $M_0 \in \mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Функция $f(M)$ называется* ***непрерывной в точке M_0*** *если справедливо равенство*

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$$

или, иначе говоря, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

если $M \in U(M_0, \delta)$ (т.е. $|MM_0| < \delta$),

то $f(M) \in U(f(M_0), \varepsilon)$ (т.е. $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$).

Справедливы утверждения:

1) арифметические операции над непрерывными в точке M_0 функциями приводят к непрерывным в этой точке функциям (при условии, что деление производится на функцию, не обращающуюся в ноль);
2) сложная функция, составленная из нескольких непрерывных функций, тоже будет непрерывной.

Если функция $u = f(M)$ определена в некоторой окрестности точки M_0 (за исключением, может быть, самой M_0), но не является в этой точке непрерывной, то ее называют ***разрывной в точке*** M_0, а саму точку M_0 – ***точкой разрыва*.**

Пусть G – некоторое множество точек в $\mathbb{R}^n$ и $M_0 \in G$.

Точка M_0 называется ***внутренней точкой*** множества G, если $\exists U(M_0, \varepsilon) \subset G$.

Множество, каждая точка которого – внутренняя, называется ***открытым***.

Точка M_0 называется ***граничной точкой*** множества G, если в любой ее ε-окрестности есть как точки из G, так и точки, не принадлежащие G.

Множество всех граничных точек множества G называется его ***границей***.

Множество, содержащее свою границу, называется ***замкнутым***.

Множество G называется ***связным***, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, состоящей из точек этого множества.

Замечание.

Непрерывной кривой в n-мерном пространстве называется геометрическое место точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n = x_n(t),$$

где $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, …, $x_n = x_n(t)$ – непрерывные функции параметра $t \in (\alpha;\beta)$.

Связное открытое множество называется ***областью***.

Связное замкнутое множество называется ***замкнутой областью***.

Область, целиком лежащая в некоторой ε-окрестности точки $O(0,0,\ldots,0)$, называется ***ограниченной***.

ТЕОРЕМА (аналог теорем Вейерштрасса и Коши для ФНП).

Если функция n *переменных* $u = f(M)$ *непрерывна в замкнутой и ограниченной области* D, *то она*

1) *ограничена*;
2) *достигает в* D *своего наибольшего и наименьшего значения*;
3) *принимает все промежуточные значения между любыми двумя своими значениями*.

§2. Частные производные

Для наглядности, здесь и далее все определения и утверждения будем формулировать для функции 2-х (или 3-х) переменных. На случай большего числа неизвестных они обобщаются естественным образом.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – открытая область.

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 приращение Δx, оставляя значение y_0 неизмененным (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta_x z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0,y_0).$$

$\Delta_x z(M_0)$ называется ***частным приращением*** функции $z = f(x,y)$ ***по x в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Предел при* $\Delta x \to 0$ *отношения*

$$\frac{\Delta_x z(M_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

(если он существует и конечен) *называется* ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной*** x ***в точке*** $M_0(x_0,y_0)$.

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z'_x(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad f'_x(x_0, y_0)$$

или

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x}, \quad z'_x(M_0), \qquad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x}, \quad f'_x(M_0)$$

Замечания.

1) Обозначения

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$$

надо понимать как целые символы, а не как частное двух величин. Отдельно взятые выражения $\partial z(x_0,y_0)$ и ∂x смысла не имеют.

2) $z'_x(M_0)$ характеризует скорость изменения функции $z = f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ (физический смысл частной производной по x).

Аналогично определяется частная производная функции $z = f(x,y)$ по переменной y в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z(M_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Обозначают:

$$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z'_y(M_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad f'_y(M_0)$$

Соответствие

$$(x_0; y_0) \to f'_x(x_0; y_0) \quad \left(\text{и} \quad (x_0; y_0) \to f'_y(x_0; y_0) \quad\right)$$

является функцией, определенной на $D_1(D_2) \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***частной производной функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x*** (y) и обозначают

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad f'_x(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x}, \quad f'_x(M)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad f'_y(x,y), \quad \frac{\partial f(M)}{\partial y}, \quad f'_y(M)\right).$$

Операция нахождения для функции $z = f(x,y)$ ее частных производных

$$f'_x(x,y) \quad \text{и} \quad f'_y(x,y)$$

называется ***дифференцированием функции*** $z = f(x,y)$ ***по переменной x и y*** соответственно.

Фактически, $f'_x(x, y)$ $\left(f'_y(x, y) \right)$ – это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной x (соответственно y) при постоянном значении другой переменной.

Поэтому, вычисление частных производных производится по тем же самым правилам, что и для функции одной переменой. При этом, одна из переменных считается константой.

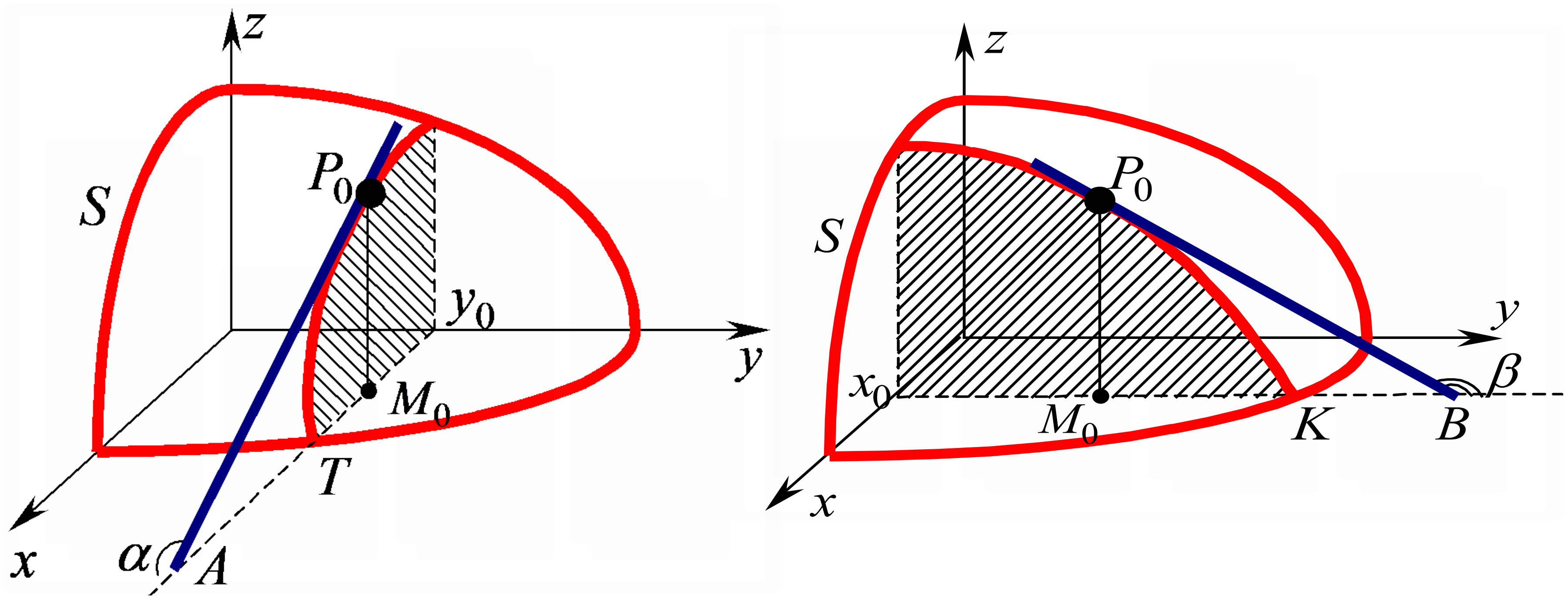
ПРИМЕР. Найти частные производные по x и по y функции

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^3$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$.



Тогда $$f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha \quad (\ f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta\ ),$$

где α(β) – угол наклона к оси Ox(Oy) касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ $(x = x_0)$.

§3. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x,y)$ имеет $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, определенные на $D \subseteq xOy$.

Функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ называют также ***частными производными первого порядка функции*** $f(x,y)$ (или ***первыми частными производными функции*** $f(x,y)$).

$f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в общем случае функции переменных x и y.

Частные производные по x и по y от $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, если они существуют, называются ***частными производными второго порядка*** (или ***вторыми частными производными***) ***функции*** $f(x,y)$.

Обозначения.

1) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}$, $\quad z''_{xx}$, $\quad f''_{xx}(x,y)$;

2) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_x(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$, $\quad z''_{xy}$, $\quad f''_{xy}(x,y)$;

3) $\frac{\partial}{\partial x}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}$, $\quad z''_{yx}$, $\quad f''_{yx}(x,y)$;

4) $\frac{\partial}{\partial y}\left(f'_y(x,y)\right)$: $\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\quad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$, $\quad z''_{yy}$, $\quad f''_{yy}(x,y)$.

Частные производные второго порядка в общем случае являются функциями двух переменных.

Их частные производные (если они существуют) называют ***частными производными третьего порядка*** (или ***третьими частными производными***) ***функции*** $z = f(x,y)$.

Продолжая этот процесс, назовем ***частными производными порядка*** n ***функции*** $z = f(x,y)$ частные производные от ее частных производных $(n-1)$-го порядка.

Обозначения аналогичны обозначениям для частных производных 2-го порядка. Например:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}\right).$$

Частные производные порядка $n > 1$ называют ***частными производными высших порядков***.

Частные производные высших порядков, взятые по разным аргументам, называются ***смешанными***.

Частные производные высших порядков, взятые по одному аргументу, называют иногда ***несмешанными***.

ПРИМЕР. Найти частные производные 2-го порядка от функции

$$z = x^4 + 3x^2y^5 .$$

ТЕОРЕМА 1 (условие независимости смешанной производной от последовательности дифференцирований).

Пусть $z = f(x,y)$ в некоторой области $D \subseteq xOy$ имеет все частные производные до n-го порядка включительно и эти производные непрерывны.

Тогда смешанные производные порядка m $(m \leq n)$, отличающиеся лишь последовательностью дифференцирований, совпадают между собой.

§4. Дифференцируемость функций нескольких переменных

1. Дифференцируемые функции нескольких переменных

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$, D – область (т.е. открытое связное множество).

Пусть $\forall M_0(x_0,y_0) \in D$.

Придадим x_0 и y_0 приращение Δx и Δy соответственно (так, чтобы точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in D$).

При этом $z = f(x,y)$ получит приращение

$$\Delta z(M_0) = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0).$$

$\Delta z(M_0)$ называется ***полным приращением функции*** $\boldsymbol{z = f(x,y)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{M_0(x_0,y_0)}$, соответствующим Δx и Δy.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция* $z = f(x,y)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ *если ее полное приращение в этой точке может быть записано в виде*

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \,, \qquad (1)$$

где A, B *– некоторые числа,*

α_1, α_2 *– бесконечно малые при* $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$

(или, что то же, *при* $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$).

Замечание. Функции α_1 и α_2 зависят от $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$.

Равенство (1) можно записать и в более сжатой форме:

$$\Delta z(M_0) = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho \,, \qquad (2)$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$\alpha = \dfrac{\alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y}{\rho}$ – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в каждой точке некоторой области D, называется ***дифференцируемой в D***.

Напомним: для дифференцируемой функции $y = f(x)$ справедливы утверждения:

1) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0)$;

2) $y = f(x)$ дифференцируема в $x_0 \Rightarrow y = f(x)$ непрерывна в x_0.

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда она непрерывна в этой точке и имеет в ней частные производные по обеим независимым переменным. Причем

$$f'_x(x_0, y_0) = A, \quad f'_y(x_0, y_0) = B.$$

Замечания.

1) С учетом теоремы 1 равенства (1) и (2) можно записать соответственно в виде:

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y \qquad (3)$$

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha \cdot \rho \qquad (4)$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$,

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

α – бесконечно малая при $\rho \to 0$.

2) Утверждение обратное теореме 1 неверно. Из непрерывности функции двух переменных в точке и существования в этой точке ее частных производных еще не следует дифференцируемость функции.

ПРИМЕР. Функция $z = x + y + \sqrt{|x| \cdot |y|}$ непрерывна в точке (0;0) и имеет в этой точке частные производные, но не является в этой точке дифференцируемой.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия дифференцируемости ФНП)

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$, причем в самой точке M_0 эти производные непрерывны.

Тогда функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в этой точке.

2. Дифференциал ФНП

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + \alpha_1 \cdot \Delta x + \alpha_2 \cdot \Delta y$$

где α_1, α_2 – бесконечно малые при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то линейная относительно Δx и Δy часть ее полного приращения в этой точке, т.е.*

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

называется ***полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$*** *и обозначается $dz(M_0)$ или $df(x_0,y_0)$.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ полного дифференциала функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

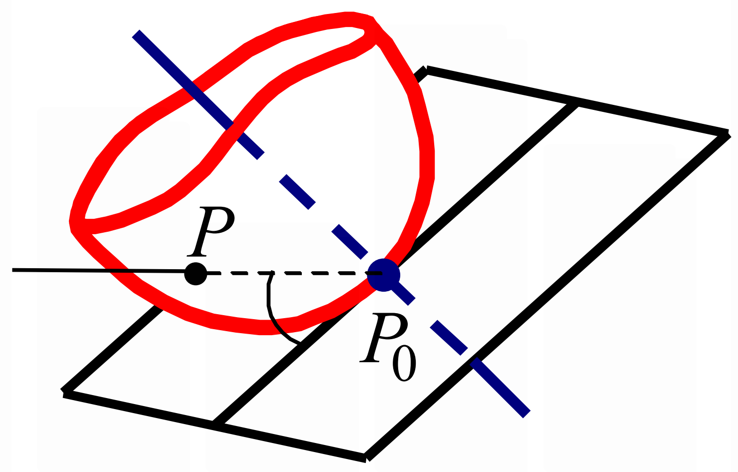
Пусть S – поверхность,

P_0 – фиксированная точка на поверхности S,

P – текущая точка на поверхности S.

Проведем секущую прямую PP_0.

Плоскость, проходящая через точку P_0, называется ***касательной плоскостью к поверхности S в точке P_0***, если угол между секущей PP_0 и этой плоскостью стремится к нулю когда точка P стремится к P_0, двигаясь по поверхности S произвольным образом.



Прямая, проходящая через точку P_0 перпендикулярно касательной плоскости к поверхности в этой точке, называется ***нормалью к поверхности в точке*** P_0.

ДОКАЗАНО, что

1) если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, то поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость.
Ее уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Rightarrow$ уравнение нормали к поверхности $z = f(x,y)$ в $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

2) если поверхность задана уравнением $F(x,y,z) = 0$,

$F(x,y,z)$ – дифференцируема в $P_0(x_0,y_0,z_0)$, причем хотя бы одна из ее частных производных не обращается в P_0 в ноль,

то касательная плоскость к поверхности в точке $P_0(x_0,y_0,z_0)$ существует и ее уравнение

$$F'_x(P_0)(x-x_0)+F'_y(P_0)(y-y_0)+F'_z(P_0)(z-z_0)=0$$

$\Rightarrow$ уравнения нормали к поверхности $F(x,y,z) = 0$ в $P_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(P_0)}$$

Замечание.

Точка $P_0(x_0,y_0,z_0)$ поверхности $F(x,y,z) = 0$, в которой все частные производные функции $F(x,y,z)$ обращаются в ноль, называется ***особой точкой поверхности***.

Пусть функция $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

$\Rightarrow$ поверхность $z = f(x,y)$ имеет в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательную плоскость. Ее уравнение:

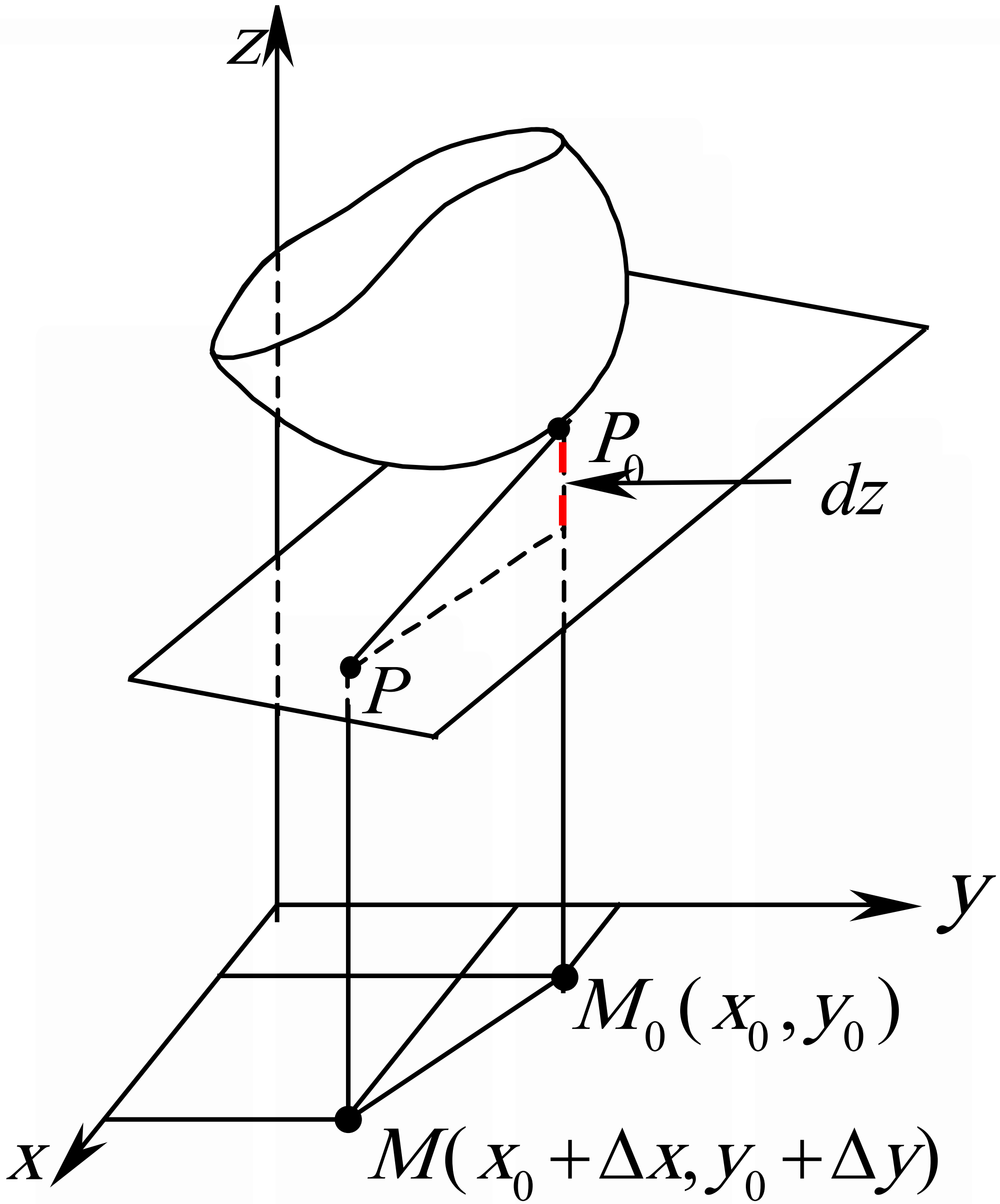
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Обозначим $x - x_0 = \Delta x,\ y - y_0 = \Delta y.$

Тогда уравнение касательной плоскости примет вид:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

ТАКИМ ОБРАЗОМ, полный дифференциал функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ равен приращению, которое получает аппликата точки $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ касательной плоскости к поверхности $z = f(x,y)$, когда ее координаты x_0 и y_0 получают приращения Δx и Δy соответственно.


z
P_0
dz
P
y
$M_0(x_0, y_0)$
x
$M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$

Очевидно, что соответствие $(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) \to df(x_0, y_0)$ является функцией (четырех переменных).

Ее называют ***полным дифференциалом функции $z = f(x,y)$*** и обозначают dz или $df(x,y)$.

Полный дифференциал функции n переменных обладает теми же свойствами, что и дифференциал функции одной переменной.

В частности, для $df(x,y)$ существует вторая, ***инвариантная форма записи***:

$$dz = f'_x(x,y) \cdot dx + f'_y(x,y) \cdot dy. \qquad (5)$$

3. Дифференциалы высших порядков ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в области $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.
Ее дифференциал $dz(M)$ – функция переменных x, y, dx, dy.
Далее будем $dz(M)$ называть ***дифференциалом 1-го порядка***.

Зафиксируем значение dx и dy.
Тогда $dz(M)$ станет функцией двух переменных x и y.

Дифференциал функции $dz(M)$ (если он существует) называется ***дифференциалом 2-го порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***вторым дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^2z, $d^2f(x,y)$.

$d^2z(M)$ – функция переменной x и y.
Дифференциал функции $d^2z(M)$ (если он существует) называют ***дифференциалом третьего порядка функции*** $z = f(x,y)$ (или ***третьим дифференциалом функции*** $z = f(x,y)$) и обозначается d^3z, $d^3f(x,y)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции z = f(x,y)*** как дифференциал от ее дифференциала порядка $n-1$. Обозначают: $d^n z$, $d^n f(x,y)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) обозначают $d^n z(M_0)$, $d^n f(x_0,y_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция $z = f(x,y)$ имеет дифференциал порядка n, то ее называют ***n раз дифференцируемой***.

ТЕОРЕМА 3 (о связи дифференциала n-го порядка и n-х частных производных).

Если все производные k-го порядка функции $z = f(x,y)$ в области D непрерывны, то она k раз дифференцируема.

При этом имеет место <u>символическая</u> формула

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x,y). \qquad (6)$$

Замечание.

1) Чтобы записать дифференциал по формуле (6) необходимо:

а) формально раскрыть скобку по биномиальному закону,

б) умножить получившееся выражение на $f(x,y)$,

в) заменить каждое произведение

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-m} \cdot f(x,y)$$

частной производной $\dfrac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}}$

Например, для $n = 2$ получим:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2$$

Для $n = 3$ получим:

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(dx)^2 dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx (dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3$$

2) Символическая формула для нахождения дифференциала $d^k u$ функции $u = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ будет иметь вид

$$d^k u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при условии, что $x_1, x_2, \ldots x_n$ – независимые аргументы.

§5. Частные производные сложных ФНП. Дифференциалы сложных ФНП

1. Частные производные сложной функции

Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Тогда z – ***сложная функция*** независимых переменных u и v.
Переменные x и y называются для z ***промежуточными переменными***.

ЗАДАЧА: найти частные производные функции z по u и v.

ТЕОРЕМА 1 (о производной сложной функции).
Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(u,v)$, $y = \varphi_2(u,v)$.
Если $f(x,y)$, $\varphi_1(u,v)$, $\varphi_2(u,v)$ дифференцируемы, то справедливы формулы

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (1)$$

Теорема 1 естественным образом обобщается на случай функции большего числа независимых и промежуточных аргументов. А именно, если

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \text{где } x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_m) \ (i = 1,2, \ldots, n),$$

то

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_k} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t_k} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_k} \qquad (\forall k = \overline{1,m})$$

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ сложной ФНП

1) Пусть $z = f(x,y)$, где $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$.
Тогда z – сложная функцией одной переменной t.
Если $f(x,y)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (2)$$

2) Пусть $z = f(x,y)$, где $y = \varphi(x)$
Тогда z – сложная функцией одной переменной x.
Если $f(x,y)$, $\varphi(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Производная $\frac{dz}{dx}$ в левой части формулы (3) называется ***полной производной функции z***.

§6. Дифференцирование неявных функций

ТЕОРЕМА 1 (существования неявной функции).

Пусть функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$ *и все ее частные производные* 1-*го порядка определены и непрерывны в некоторой окрестности точки* $P_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, u_0)$.

Если $F(P_0) = 0$ *и* $F'_u(P_0) \neq 0$,

то $\exists$ *такая окрестность* U *точки* $M_0(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$, *в которой уравнение*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0$$

определяет непрерывную функцию $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *причем*

1) $f(M_0) = u_0$;

2) *для любой точки* $M(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$ U
$$F'_u(x_1, x_2, \ldots, x_n, f(x_1, x_2, \ldots, x_n)) \neq 0;$$

3) *функция* $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *имеет в окрестности* U *непрерывные частные производные по всем аргументам.*

ЗАДАЧА. Найти частные производные неявно заданной функции.

1) Пусть $F(x,y)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в некоторой окрестности $P_0(x_0,y_0)$

Тогда уравнение $F(x,y) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки x_0, непрерывную функцию $y = f(x)$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} \tag{1}$$

2) Пусть $F(x,y,z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в окрестности $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

Тогда уравнение $F(x,y,z) = 0$ определяет в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$ непрерывную функцию $z = f(x,y)$.

Так как фактически $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ это обыкновенная производная функции $z = f(x,y)$, рассматриваемой как функция одной переменной при постоянном значении другой, то по формуле (1) получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

§7. Формула Тейлора для ФНП

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то справедлива формула (3):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \beta_n (x - x_0)^n,$$

где $\beta_n(x_0,x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Формулу (3) называют ***формулой Тейлора разложения функции f(x) по степеням*** $(x - x_0)$ (***в окрестности точки*** x_0).

Сумму

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

называют ***многочленом Тейлора функции f(x) по степеням*** $(x - x_0)$.

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ ***называют остаточным членом формулы Тейлора***.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – ***форма Пеано***;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то R_n можно записать в ***форме Лагранжа*** **:**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x.

Если c – точка между x_0 и x, то $\exists\theta\in(0;\, 1)$ такое, что

$$c = x_0 + \theta \cdot \Delta x\,,\ \text{где}\ \Delta x = x - x_0\,.$$

$\Rightarrow$ Остаточный член в форме Лагранжа примет вид:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!} \cdot \Delta x^{n+1}.$$

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (4):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (4) называют ***формулой Маклорена***.

Заметим, что

$$f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^n = f^{(n)}(x_0) \cdot (\Delta x)^n = d^n f(x_0).$$

Следовательно, формулу (3) можно записать в виде (5):

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \cdot \Delta x)}{(n+1)!}.$$

Формулу (5) можно обобщить на случай ФНП.

Пусть $z = f(x,y)$ $n + 1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности U точки $M_0(x_0,y_0)$.

Тогда, как и в случае функции $y = f(x)$, справедлива формула

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(M_0)}{n!} + R_n, \quad (5)$$

где $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$,

$$R_n = \frac{d^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

(или $R_{\mathrm{n}} = o(\rho^n)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0.$) .

Формулу (5) называют **формулой Тейлора для функции $z = f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ (по степеням $(x - x_0)$, $(y - y_0)$).**

Сумму

$$f(M_0)+\frac{df(M_0)}{1!}+\frac{d^2 f(M_0)}{2!}+\ldots+\frac{d^n f(M_0)}{n!}$$

называют ***многочленом Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$.***

Слагаемое R_n называют ***остаточным членом формулы Тейлора функции $f(x,y)$ в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$*** в форме Лагранжа (Пеано).

Аналогичный вид имеет формула Тейлора для функций большего числа переменных

§8. Понятие квадратичной формы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Многочлен n переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *в котором все члены имеют одинаковую степень, называется* ***однородным*** или ***формой***.

ПРИМЕРЫ.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 4x_2 - 5x_3$

– однородный 1-й степени (линейная форма);

2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2$

– однородный 2-й степени (***квадратичная форма***);

3) $f(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1^2x_2 + x_1x_2^2 - 4x_2^3$

– однородный 3-й степени.

Общий вид квадратичной формы:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \\ + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \\ + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + \ldots + 2a_{2n}x_2x_n + \\ + \ldots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n .$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$.

Тогда квадратичную форму можно записать в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Квадратичная форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *называется* ***положительно*** (***отрицательно***) *определенной если*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0 \quad [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 0]$$

для любых, не равных одновременно нулю, значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы называются ***знакоопределенными***.

Если квадратичная форма может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то она называется ***неопределенной***.

Симметрическая матрица из коэффициентов квадратичной формы, т.е. матрица вида

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

называется ***матрицей квадратичной формы***.

Главными угловыми минорами квадратной матрицы $\mathbf{C} = (c_{ij})$ называются ее миноры вида

$$c_{11}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \qquad \text{è ò.ä.}$$

ТЕОРЕМА 1 (критерий Сильвестра).

1) *Квадратичная форма положительно определена* $\Leftrightarrow$ *все главные угловые миноры ее матрицы – положительные*.

2) *Квадратичная форма отрицательно определена* $\Leftrightarrow$ *знаки главных угловых миноров ее матрицы чередуются*, *начиная с минуса*, т.е.

$$a_{11} < 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} < 0 \qquad \text{è ò.ä.}$$

§9. Экстремумы ФНП

Пусть $z = f(x,y)$ определена в некоторой области $D \subseteq xOy$,
$M_0(x_0,y_0) \in D$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.
Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \leq f(x_0,y_0) .$$

Точка $M_0(x_0,y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $f(x,y)$, если $\forall M(x,y) \in \mathrm{U}(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) \geq f(x_0,y_0) .$$

Точки максимума и минимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Значения функции в точках максимума и минимума называются соответственно ***максимумами*** и ***минимумами*** (***экстремумами***) этой функции.

Замечания.

1) По смыслу точкой максимума (минимума) функции $f(x,y)$ могут быть только внутренние точки области D.

2) Если $\forall M(x,y) \in U^*(M_0,\delta)$ выполняется неравенство

$$f(x,y) < f(x_0,y_0) \quad [\ f(x,y) > f(x_0,y_0)\ ],$$

то точку M_0 называют ***точкой строгого максимума*** (соответственно ***точкой строгого минимума***) функции $f(x,y)$.

Определенные в 1 точки максимума и минимума называют иногда точками ***нестрогого максимума*** и ***минимума***.

3) Понятия экстремумов носят локальный характер. В рассматриваемой области функция может совсем не иметь экстремумов, может иметь несколько (в том числе бесчисленно много) минимумов и максимумов. При этом некоторые минимумы могут оказаться больше некоторых ее максимумов.

ТЕОРЕМА 1 (необходимые условия экстремума).

Если функция $z = f(x,y)$ *в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *имеет экстремум, то в этой точке либо обе ее частные производные первого порядка равны нулю, либо хотя бы одна из них не существует.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1.

Если $M_0(x_0,y_0)$ – точка экстремума функции $z = f(x,y)$, то касательная плоскость к графику этой функции в точке $P_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ либо параллельна плоскости xOy, либо вообще не существует.

Точки, в которых обе частные производные первого порядка функции $z = f(x,y)$ равны нулю, называются ***стационарными точками*** функции $z = f(x,y)$.

Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 1, называются ***критическими точками*** функции $z = f(x,y)$.

Пусть $z = f(x,y)$, $D(z) = D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0,y_0) \in D$.

Пусть $z = f(x,y)$ дважды дифференцируема в окрестности U точки M_0 и M_0 – критическая точка для $z = f(x,y)$. Тогда

1) $\forall M \in U$

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

где $R_2 = o(\rho^2)$ при $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$;

2) $f'_x(M_0) = 0, \quad f'_y(M_0) = 0$

$$\Rightarrow \quad df(M_0) = 0 \quad \text{и} \quad f(M) = f(M_0) + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + R_2,$$

$$\Rightarrow \quad \Delta f(M_0) \approx \frac{d^2 f(M_0)}{2!},$$

Получили, что знак $\Delta f(M_0)$ и $d^2 f(M_0)$ совпадает.

Следовательно, доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2 (достаточные условия экстремума функции n переменных).

Пусть M_0 – *<u>стационарная</u> точка функции* $z = f(M)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция* $f(M)$ *имеет непрерывные частные производные 2-го порядка.*

Тогда

1) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *максимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *отрицательно определена* ;
2) $f(M)$ *имеет в точке* M_0 *минимум, если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *положительно определена* ;
3) *если квадратичная форма* $d^2f(M_0)$ *является неопределенной, то* M_0 *не является точкой экстремума*;
4) *если* $d^2f(M_0) \geq 0$ *или* $d^2f(M_0) \leq 0$ (т.е. среди главных угловых миноров имеются нулевые), *то никакого заключения о критической точке* M_0 *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования*.

Если $z = f(x,y)$, то $d^2f(M_0)$ – квадратичная форма с матрицей

$$\begin{pmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{pmatrix}$$

Тогда:

1) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ отрицательно определена если

$$f''_{xx}(M_0) < 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0;$$

2) Квадратичная форма $d^2f(M_0)$ положительно определена если

$$f''_{xx}(M_0) > 0, \qquad \begin{vmatrix} f''_{xx}(M_0) & f''_{xy}(M_0) \\ f''_{xy}(M_0) & f''_{yy}(M_0) \end{vmatrix} > 0.$$

ТЕОРЕМА 3 (достаточные условия экстремума функции ДВУХ переменных).

Пусть $M_0(x_0,y_0)$ *– критическая точка функции* $z = f(x,y)$ *и в некоторой окрестности точки* M_0 *функция имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно.*

Обозначим

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0).$$

Тогда

1) *если* $A \cdot C - B^2 < 0$, *то точка* $M_0(x_0,y_0)$ *не является точкой экстремума;*
2) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A > 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет минимум;*
3) *если* $A \cdot C - B^2 > 0$ *и* $A < 0$, *то в точке* $M_0(x_0,y_0)$ *функция имеет максимум;*
4) *если* $A \cdot C - B^2 = 0$, *то никакого заключения о критической точке* $M_0(x_0,y_0)$ *сделать нельзя и требуются дополнительные исследования.*

Замечание.

Если с помощью теоремы 3 исследовать критическую точку $M_0(x_0,y_0)$ не удалось, то ответ на вопрос о наличии в M_0 экстремума даст знак $\Delta f(x_0,y_0)$:

а) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем

$$\Delta f(x_0,y_0) < 0,$$

то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого максимума;

б) если при всех достаточно малых Δx и Δy имеем

$$\Delta f(x_0,y_0) > 0,$$

то $M_0(x_0,y_0)$ – точка строгого минимума.

В случае нестрогих экстремумов при <u>некоторых</u> значениях Δx и Δy приращение функции будет нулевым

§10. Скалярное поле

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* G *– некоторая область в пространстве* $Oxyz$ [*на плоскости* xOy]. *Говорят, что на* G *задано* ***скалярное поле****, если в каждой точке* $M \in G$ *определена функция* 3-*х переменных* $u = f(M)$ [*функция* 2-*х переменных* $z = f(M)$].

Поведение скалярного поля характеризуют

1) производная по направлению;

2) градиент.

1. Производная по направлению

Пусть $z = f(x,y)$ определена в области $D \subseteq xOy$,

$M_0(x_0,y_0) \in D$,

s – некоторый вектор.

Пусть $M(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in D$, такая, что $\overline{\mathbf{M_0M}} \uparrow\uparrow \mathbf{s}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Если существует и конечен*

$$\lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{|M_0M|\to 0} \frac{z(M) - z(M_0)}{|M_0M|}$$

то его называют ***производной функции*** $z = f(x,y)$ ***в точке*** $M_0(x_0,y_0)$ ***по направлению вектора s***.

Обозначают:

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial s}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \ell}, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial \ell}$$

ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

$\dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – средняя скорость изменения функции $z = f(x,y)$ на отрезке M_0M.

$\Rightarrow \lim\limits_{|M_0M| \to 0} \dfrac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|}$ – скорость изменения функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора **s** .

Так же как и для функции одной переменной доказывается, что

1) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} > 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора **s** возрастает;

2) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} < 0$, то функция в точке $M_0(x_0,y_0)$ в направлении вектора **s** убывает;

3) если $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial s} = 0$, то в направлении вектора **s** функция не изменяется.

$\Rightarrow$ направление вектора **s** – направление линии уровня функции, проходящей через точку M_0

(вектор **s** является касательным к линии уровня в точке M_0).

Замечание.

Частные производные функции являются частным случаем производной по направлению. А именно:

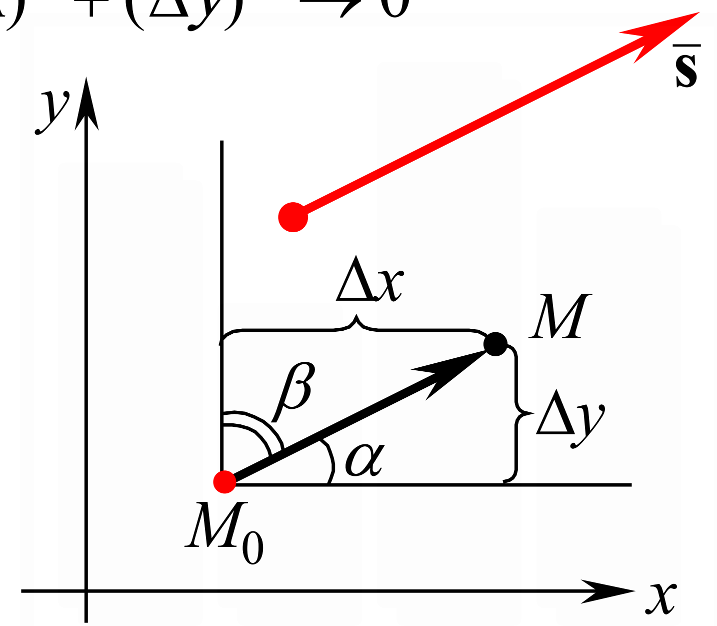
1) $f'_x(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{i}$ (направлению оси Ox);

2) $f'_y(M_0)$ – производная функции по направлению вектора $\mathbf{j}$ (направлению оси Oy).

Пусть $z = f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$. Тогда

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y + \mu \cdot \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где μ – бесконечно малая при $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$



Обозначим $|M_0M| = \rho$. Тогда

$$\Delta x = \rho \cdot \cos\alpha, \quad \Delta y = \rho \cdot \cos\beta$$

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho,$$

где cosα, cosβ – направляющие косинусы вектора **s** .

Следовательно,

$$\Delta z(M_0) = f'_x(x_0,y_0)\rho\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\rho\cos\beta + \mu \cdot \rho$$

Разделив на $|M_0M| = \rho$ и перейдя к пределу при $\rho \to 0$, получим

$$\lim_{|M_0M|\to 0} \frac{\Delta z(M_0)}{|M_0M|} = \lim_{\rho\to 0}\left(f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta + \mu\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial s} = f'_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0, y_0)\cos\beta\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$ – направляющие косинусы вектора **s** .

Замечание. Аналогично определяется и обозначается производная по направлению для функции 3-х переменных $u = f(x,y,z)$.
Для нее получим

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial s} = f'_x(M_0)\cos\alpha + f'_y(M_0)\cos\beta + f'_z(M_0)\cos\gamma\,,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – направляющие косинусы вектора **s**.

2. Градиент

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Градиентом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$*** *называется вектор с координатами*

$$f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0).$$

Обозначают: $\mathbf{grad}\, z(M_0)$.

СВОЙСТВА ГРАДИЕНТА

1) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ определяет направление, в котором функция в точке M_0 возрастает с наибольшей скоростью.

   При этом $|\,\mathbf{grad}\, z(M_0)\,|$ равен наибольшей скорости изменения функции в точке M_0.

2) $\mathbf{grad}\, z(M_0)$ перпендикулярен к линии уровня функции $z = f(x,y)$, проходящей через точку M_0.

Замечание. Для функции 3-х переменных градиент определяется и обозначается аналогичным образом, и сохраняет все свои свойства.