

ВАРИАНТ № 1

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y + 4} - \log_3(y + 5x - 1).$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln(e^x + e^y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \operatorname{arctg} xy$, $x = \frac{u}{v^2}$, $y = \frac{u^2}{v}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = xy \ln(x + y)$, $x = t^2 + 1$, $y = \frac{1}{t^2}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(x^2 + y^2, xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^2 x + x^2 y + y^2 z + 2x - y = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^2 y^2 - xy^3 - 3y - 1$ найти:

а) производную в точке $M(2,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;

б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(2,2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 - x^2 = 1$ в точке $M(1,2,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \ln(2x - y)$ в окрестности точки $M(1,1)$

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x + y - 1 = 0$, $x = 2$, $y = 2$.

14) Вычислить приближённо $1,002 \cdot (2,003)^2$.

ВАРИАНТ № 2

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{x + 2y - 2} - \ln(yx).$$

2) Докажите, что функция $z = xy + xe^{y/x}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{y^2}{4x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{x+y}{x-y}$, $x = u^2v^2$, $y = \frac{u^2}{v^2} - 1$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = x^2y - y^3x$, $x = te^{-t}$, $y = \frac{e^t}{e^t + 1}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(x^2y; -y^3x)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + 2y = 9$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + 3x^2z = 2xy$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xyz$ найти:

а) производную в точке $M(5,1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(0,1,1)$;

б) $grad u$ в точке $K(3,1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 + z^2 = 4$ в точке $M(1,1,2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{1, -1, 1\}$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = \frac{x^3}{3} + 2y^2 - x + y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \sin(2\pi x - y)$ в окрестности точки $M(1,0)$

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2xy - y^2 + 4x + 1$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = 0$, $x + y + 1 = 0$, $x = 3$.

14) Вычислить приближённо $3,01 \cdot e^{0,01}$.

ВАРИАНТ № 3

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2 - x + y} - \ln(y + x^2 - 1).$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(x^2 + y^2 + xy)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, $(a, b - const)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \arcsin \frac{x}{y}$, $x = u + v$, $y = u^2 + v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \sqrt{xy} + x$, $x = \log_2 t$, $y = 2^t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(y \sin x; x \cos y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $0,5x^2 + 0,25y^2 = 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y + 2z - xz - yz = 2. \text{ Найти } \frac{\partial z}{\partial x} \text{ и } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

9) Для функции $z = (1 + \log_y x)^3$ найти:

а) производную в точке $M(e, e)$ в направлении от точки M к точке $N(3e, -2e)$;

б) $grad z$ в точке $K(1, 2)$.

10) Найти касательные плоскости к поверхности $\frac{x^2}{21} + \frac{y^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$, которые были бы параллельны плоскости $2x + 2y - 3z = 0$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 2$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 - y^2}$ в точке $M(1,98; 1,01)$.

ВАРИАНТ № 4

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - 3y - 6} - \log_5(y - x^2 + 3).$$

2) Докажите, что функция $z = x^y$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = zy(1 + \ln x).$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = xe^y + ye^x$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $x = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, $y = u + v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $x = ctgt$, $y = \cos t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f(y + \sin x; x + \cos y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 y + y^3 x = 3 - x^2 y^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(x + y)$ найти:

- а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(-3,6)$;
- б) $grad z$ в точке $K(1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(1, -1, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2xy - 3y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = e^{x^2 - y}$ в окрестности точки $M(1, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = (x - 2)^2 + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 1, x = 2, y = 0, y = 1$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{1}{2} \ln(y^2 - 2x^2)$ в точке $M(2, 1; 3, 02)$.

ВАРИАНТ № 5

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2xy} - \lg(y + x - 1).$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \frac{y}{y^2 - a^2 x^2}$ ($a = \text{const}$).

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{y}{x}$, $x = u^v$, $y = u^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = \operatorname{tg} t$, $y = \frac{1}{\sin t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\sin(x + y); \cos(x - y)]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xyz = x + y + z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ найти:

- а) производную в точке $M(-3, 1, 0)$ в направлении от точки M к точке $O(0, 0, 0)$;
- б) $\operatorname{grad} u$ в точке $N(1, 2, 2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $-3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ в точке $M(0, -2, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление вектора $\vec{q} = \{0, 1, 1\}$.

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = e^{x-y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0, y = 0, x + y = 1$.

14) Вычислить приближённо $\sin 59^\circ \cdot \operatorname{tg} 46^\circ$.

ВАРИАНТ № 6

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y^2} - \log_2(y - 2x + 1).$$

2) Докажите, что функция $z = xy + xe^{y/x}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x \sin \frac{x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \ln \frac{x}{y}$, $x = \ln(e + uv)$, $y = 1 + uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $x = \sqrt{t}$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = \mathcal{Y}(x)$ задана неявно уравнением

$$2(x^2 + y^2) + 3(2y^2 + 1) + 8(2x - y) - 4x = 0. \text{ Найти } \frac{dy}{dx}.$$

8) Функция $z = \mathcal{Z}(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 - 3xyz = a^3$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ найти:

а) производную в точке $M(3; 1)$ в направлении от точки M к точке $N(6, 5)$;

б) $grad z$ в точке $K(2, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y^2 - 4z^2 = -12$ в точке $M(1, -1, 2)$. В какой точке поверхности нормаль к ней будет иметь направление оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \sqrt{x + y}$ в окрестности точки $M(2, 2)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

14) Вычислить приближённо $(5, 2)^2 + (3, 96)^2$.

ВАРИАНТ № 7

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y-4} \cdot \sqrt{x} - \lg(x^2 + 1).$$

2) Проверьте, выполняется ли равенство $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}$ для функции

$$z = \sqrt{x} \cdot \sin \frac{y}{x}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \cos xy^2$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \operatorname{tg}(x + y)$, $x = 2^{uv}$, $y = u - v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = x^y$, $x = \operatorname{arctg} t$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 + y^3; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2(x + y) = y^2(x - y)$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xy + yz + xz - x^2 - y^2 - z^2$ найти:

а) производную в точке $M(1; 2; -3)$ в направлении от точки M к точке

$N(3, 3, -1)$;

б) $\operatorname{grad} u$ в точке $K(1, 0, 1)$.

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 + 4z^2 = 9$ в точке $M(1, -2, -2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy^2 + 3axy$ ($a > 0$).

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $z = \frac{x}{y}$ в окрестности точки $M(1, 1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 - 2y^2 + 4x$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 2$, $y = 2$, $x + y = 2$.

14) Вычислить приближённо $\sqrt{(3,01)^2 + (3,98)^2}$.

ВАРИАНТ № 8

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y-2} + \ln(x+2).$$

2) . Проверьте, выполняется ли равенство $2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ для функции

$$z = e^{\frac{x}{y^2}}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \sin(x^2 + xy)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \ln(2x + 3y)$, $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x - y; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $xy - \ln y = 1$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z = 1$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = xy^2 + z^3 - xyz$ найти:

- а) производную в точке $M(1; 1; 2)$ в направлении, образующим с осями координат углы 60° , 45° и 60° соответственно;
- б) *gradu* в точке $N(2, 1, 1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M_0(-1; 1; -1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + 2x + 4y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = x^{yz}$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 2 = 0$.

14) Вычислить приближённо $\arcsin \frac{0,2}{1,3}$.

ВАРИАНТ № 9

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2xy} - \lg(y + x - 1).$$

2) Докажите, что функция $z = e^{x^2+y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = 4z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = xy^2 + \sin \frac{x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = 2^{\frac{x}{y}}$, $x = 3u - 4v$, $y = 2uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \sin xy$, $x = t^2$, $y = e^{-t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 + y^3; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y - \sin x - \cos(x - y) = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \operatorname{arctg}(xy)$ найти:

- а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- б) $\operatorname{grad} z$ в точке $N(1,0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(1,1,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \ln(x - y + z)$ в окрестности точки $M(1,0,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2xy + x^2 - 4x + 8y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

14) Вычислить приближённо $0,99^{1,01}$.

ВАРИАНТ № 10

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{\frac{x}{y}} - \lg(y - x + 2).$$

2) Докажите, что функция $z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x^2 e^{\frac{y}{x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = 2x - y^2$, $x = \ln(u + v)$, $y = \ln u + \ln v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \sqrt[3]{y+1}$, $x = 3t+1$, $y = \ln t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\sin(x+y); x-y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x \sin y - \cos y + \cos xy = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x \cos y + y \cos z + z \cos x = 1$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = 3x^4 - xy + y^3$ найти:

а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении, составляющем с осью Ox угол в 60° , а с осью Oy – тупой угол;

б) $grad z$ в точке $N(2,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $y^2 - 2z^2 + x^2 = 3$ в точке $M(-2,1,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = e^{x-y+z}$ в окрестности точки $M(1,0,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 4x + 2y + 4x^2 + y^2 + 6$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0, y = 1, x + y + 2 = 0$.

14) Вычислить приближённо $\sqrt{(1,02)^2 + (1,97)^3}$.

ВАРИАНТ № 11

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2y + 4x + 4} - \ln(y - x).$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = x \cdot 2^{\frac{x}{y}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{1}{\sin xy}$, $x = \frac{1}{\sqrt{u+1}}$, $y = \frac{v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$, $x = (t-1)^2$, $y = 4^{tgt}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; x - y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $\cos xy = x + 2y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $\ln z = x + y + z - 1$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(e^x + e^y)$ найти:

а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \{-3, 4\}$;

б) $grad z$ в точке $N(1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - y^2 + z^2 = 2$ в точке $M(1,1,1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOY ?

11) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4.$$

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \cos(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x + 4y + x^2 + y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 1$, $x + y - 2 = 0$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{x+y}{x-y}$ в точке $M(2,04; 2,95)$.

ВАРИАНТ № 12

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x - 2} - \ln(yx).$$

2) Докажите, что функция $z = xy + xe^{y/x}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \frac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ($a - const$).

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = \sqrt{u} + v$, $y = uv$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \arcsin \frac{y}{x}$, $x = 3^{-t}$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x^2 - y^2; xy]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $2^x + 2^y = 2^{x+y}$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + xz + y - 2x = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$ найти:

а) производную в точке $O(0,0,0)$ в направлении вектора $\vec{e} = \{1, -2, 3\}$;

б) $grad u$ в точке $O(0,0,0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 9$ в точке $M(1,0,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = xy - x^2y - xy^2$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 2-го порядка малости для функции $u = \sin(x - y)$ в окрестности точки $M(\pi, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x + x^2 + y^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$.

14) Вычислить приближённо $\sqrt[5]{1,002} \cdot \sqrt[3]{7,995}$.

ВАРИАНТ № 13

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2 - 2y + 4x} - \sqrt{x^2 y}.$$

2) Докажите, что функция $z = x^y$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = zy(1 + \ln x).$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln(x + e^y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = y^x$, $x = 3u^2 + 1$, $y = u^3 + v^3$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = e^{x^2 y}$, $x = \lg t$, $y = \frac{1}{t^3}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f\left[x + y^2; \frac{x}{y}\right]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x - y = \arcsin x - \arcsin y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ найти:

- а) производную в точке $M(1,2)$ в направлении от точки M к точке $N(2,0)$;
 б) $gradz$ в точке $K(2,2)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 10y + 2z^2 = 2$ в точке $M(2,1,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 6x^3 y^2 - x^4 y^2 - x^3 y^3$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^3 y - yz^2 + xyz$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = 2x + y - 3$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 1 = 0$.

14) Вычислить приближённо $0,97^{1,05}$.

ВАРИАНТ № 14

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x} - \sqrt{x + y - 2}.$$

2) Докажите, что функция $z = ye^{x^2 - y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = ye^{\frac{y}{x}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \left(\frac{x}{y}\right)^2$, $x = \sin(2u + v)$, $y = \cos(u + 2v)$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = 2^{\frac{x}{y}}$, $x = \frac{1}{\sqrt{t}}$, $y = \arctg \sqrt{t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[xy^2; \frac{x^2}{y}]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ зада на неявно уравнением $x^3 + ax^2y + bxy^2 + y^3 = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^3 + 2y^3 + z^3 - 2xyz - 2y + 8 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \sin(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(3,7)$;

б) $grad z$ в точке $K\left(0, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 = 0$ в точке $M(1, 1, 3)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^2yz - xyz^2 + xy^2z$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x - 2y - 3$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 2, y = 2, x + y - 1 = 0$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = \sqrt{x^3 + y^3}$ в точке $M(1,02; 1,97)$.

ВАРИАНТ № 15

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y + 4x} - \sqrt{x - 2y}.$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2..$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^3 + y$, $x = e^{u-v}$, $y = e^{u+v}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - ?$

5) $z = \frac{x}{y^2}$, $x = \cos \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{\cos t}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[\ln(x + y); x - y]$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^2 - 2xy + 1 = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $xz^5 + y^2z - x^3 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \arcsin \frac{x}{x + y}$ найти:

а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $N(2,2)$;

б) $grad z$ в точке $K(3,4)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 2y^2 - z^2 + 1 = 0$ в точке $M(1,1,2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + 6xy + 5y^2 - x + 4y - 5$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^3 - z^3 + xy^2$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = e^{2x}(x + y^2)$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0, y = 0, x = 3, y = 2$.

14) Вычислить приближённо $\sqrt{(2,98)^2 + (4,01)^2}$.

ВАРИАНТ № 16

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x - y + 4} - \log_3(y + 5x - 1).$$

2) Докажите, что функция $z = e^{x/y}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = tg \frac{y}{x}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = y^{2x}$, $x = u \cdot v$, $y = \frac{v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \arctg \frac{1}{xy}$, $x = \sqrt[3]{t}$, $y = \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y = 1 + xe^y$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x - yz + e^z = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ найти:

а) производную в точке $M(3,4)$ в направлении радиус-вектора точки M ;

б) $grad z$ в точке $K\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 2z = 2$ в точке $M(-2,3,0)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2x^2 + xy^2 - 16x$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = \ln(x^3 y^3)$ в окрестности точки $M(1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x + y - 3xy$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 2 = 0$.

14) Вычислить приближённо $(1,1)^{3,97}$.

ВАРИАНТ № 17

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \ln(y + x - 1) + \sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

2) Докажите, что функция $z = e^{x/y}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \sqrt[3]{x^3 + y^2}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \frac{x}{y}$, $x = u^2 + v^2$, $y = u \cdot v$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \sin \frac{x}{\sqrt{y}}$, $x = 3t^2$, $y = \sqrt{t^2 + 1}$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[e^{x+y}; x - y] + e^{x+y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $a^2(x^4 + y^4) - x^3 y^2 = 9a^6$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x + y + z = e^z$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = x^2 + y^2 - 3x + 2y$ найти:

- а) производную в точке $O(0,0)$ в направлении от точки M к точке $N(3,4)$;
- б) $gradz$ в точке $O(0,0)$.

10) Записать уравнения касательной и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 + 7z^2 = -3$ в точке $M(4,7,3)$. Существует ли на поверхности точка, в которой касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости XOZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = 2 + (x - y)^2 + (y - 1)^4$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = e^{x^2 + y}$ в окрестности точки $M(1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy - x - y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 3 = 0$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ в точке $M(1,01; 1,03)$.

ВАРИАНТ № 18

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2y - 4x + 3} + \ln(x - 3y + 3).$$

2) Докажите, что функция $z = \frac{1}{x^3 - y^3}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -3z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^2 + y^3$, $x = 2u + 4v^3$, $y = 3u^2 + v$; $\frac{\partial z}{\partial u} = ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} = ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = ?$

5) $z = e^{x-2y}$, $x = \sin^2 t$, $y = t^3$; $\frac{dz}{dt} = ?$

6) $z = f[x + y^2; x^2 - y] + \sin xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^4 + y^4 = 2x^2 y^2$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $e^z - xyz - 1 = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln(x^2 + y^2)$ найти:

а) производную в точке $M(1, 3)$ в направлении вектора $\vec{l} = \{1, -2\}$;

б) $grad z$ в точке $N(1, 0)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2x^2 - 2y^2 - z^2 = 2$ в точке $M(-2, 1, 2)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - xy + y^2 - x$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = e^{x+y^2}$ в окрестности точки $M(0, 1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

14) Вычислить приближённо значение функции $z = 1 + \sqrt{y + x^2}$ в точке $M(0,99; 0,02)$.

ВАРИАНТ № 19

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{2x + 2y + 6} - \ln(4y - x + 4).$$

2) Докажите, что функция $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -2z.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = y \cos \frac{2x}{y}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = x^3 - y^3$, $x = u \cdot v$, $y = u^2 + v^2$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - ?$

5) $z = \frac{3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $x = r \cos t$, $y = r \sin t$ ($r - \text{const}$); $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f\left[\frac{x}{y}; x^2 - y^2\right] + \ln(x - y)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $y^3 - 3y + 2x = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$.

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = 3ux^2$ найти:

- а) производную в точке $M(-9, 12)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла;
- б) $\text{grad} z$ в точке $M(-9, 12)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - 2y^2 - z^2 = 1$ в точке $M(1, 1, 1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль на поверхности параллельна оси OZ ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 - 2xy + y^4$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^4 + y^3 + z^2xy + x^2y^2z^2$ в окрестности точки $M(1, 1, 0)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = 2$, $y = 2$, $x + y - 4 = 0$.

14) Вычислить приближённо $2,003^2 \cdot 3,998^3$.

ВАРИАНТ № 20

1) Найдите и постройте область определения функции

$$z = \sqrt{y - 2x + 4} - \lg(x + 2y + 6).$$

2) Докажите, что функция $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$ удовлетворяет уравнению

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}.$$

3) Найти все частные производные второго порядка от функции $u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Найти указанные частные производные сложной функции

4) $z = \sqrt{xy}$, $x = u^2 - v^2$, $y = e^{uv}$; $\frac{\partial z}{\partial u} - ?$ $\frac{\partial z}{\partial v} - ?$ $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - ?$

5) $z = \ln \cos \frac{\sqrt{x}}{y}$, $x = \sqrt[3]{t+1}$, $y = 3^t$; $\frac{dz}{dt} - ?$

6) $z = f[xy; x^2 - y^2] + \varphi(xy)$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - ?$

7) Функция $y = y(x)$ задана неявно уравнением $x^3 + y^3 - 2xy = 0$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

8) Функция $z = z(x, y)$ задана неявно уравнением $z^3 + zxy - x = 0$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

9) Для функции $z = \ln\left(x + \frac{1}{y}\right)$ найти:

- а) производную в точке $M(1,1)$ в направлении от точки M к точке $O(0,0)$;
- б) $grad z$ в точке $M(1,1)$.

10) Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $2z + y^2 + x^2 = 0$ в точке $M(1,1,-1)$. Существует ли на поверхности точка, в которой нормаль к поверхности параллельна оси OY ?

11) Исследовать на экстремум функцию $z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2)$.

12) Записать формулу Тейлора до членов 3-го порядка малости для функции $u = x^2 + y^3 + zxy + x^3 y^3 z^3$ в окрестности точки $M(1,1,1)$.

13) Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $z = xy^2 - 3x^2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $x = -1, y = -1, x = 0, y = 0$.

14) Вычислить приближённо $e^{1,02} \cdot 2,96$.