

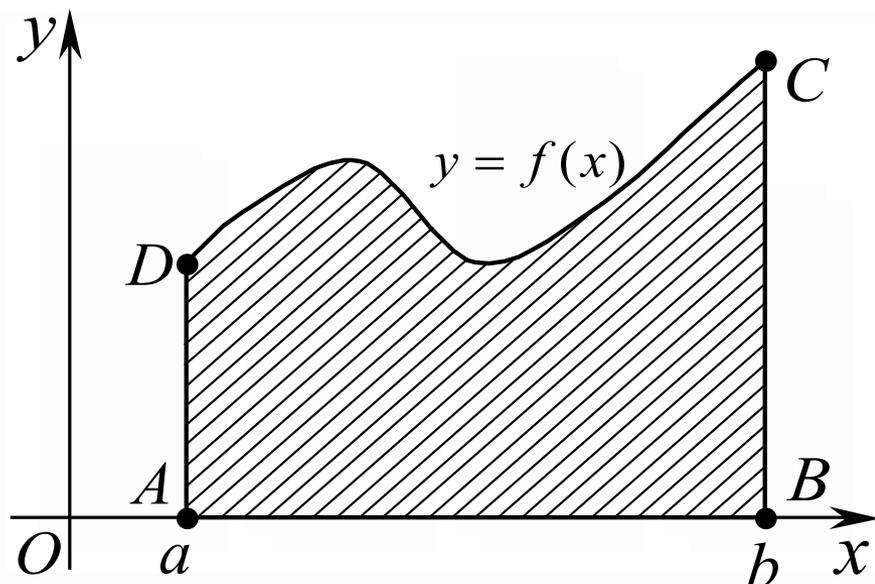
# ГЛАВА II. Определенный интеграл и его приложения

## §1. Определенный интеграл и его свойства

### 1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть  $f(x)$  – непрерывная на отрезке  $[a;b]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Область  $(\sigma) \in xOy$ , ограниченная отрезком  $[a;b]$  оси  $Ox$ , прямыми  $x = a$ ,  $x = b$  и кривой  $y = f(x)$ , называется **криволинейной трапецией с основанием  $[a;b]$** .

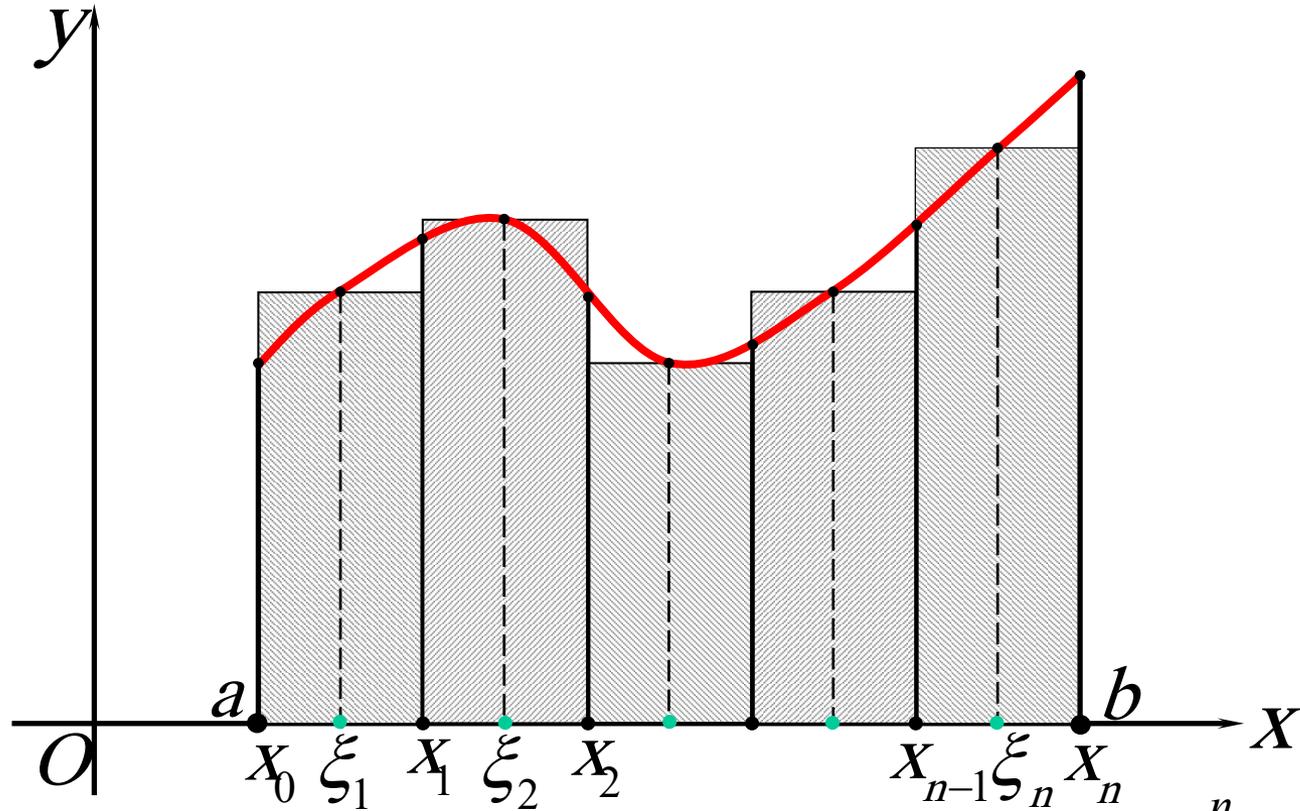


**Замечание.** Прямые  $x = a$  и  $x = b$  могут вырождаться в точки

ЗАДАЧА 1 (о площади криволинейной трапеции).

Пусть  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a; b]$ .

Найти площадь  $S$  криволинейной трапеции ( $\sigma$ ).



Если  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$ , то  $S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

Пусть  $\lambda = \max | [x_{i-1}; x_i] |$ . Тогда

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

## ЗАДАЧА 2 (о пройденном пути).

Пусть точка движется по кривой и ее скорость изменяется по закону  $v = f(t)$ .

Найти путь  $S$ , пройденный точкой за промежуток времени  $[T_1; T_2]$ .

### РЕШЕНИЕ.

1) Разобьем  $[T_1; T_2]$  на  $n$  частей точками

$$t_0 = T_1, t_1, t_2, \dots, t_n = T_2 \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n)$$

2) Выберем на  $[t_{i-1}; t_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) произвольную точку  $\tau_i$ .

Если  $[t_{i-1}; t_i]$  мал, то можно считать, что точка двигалась в течение этого времени равномерно со скоростью  $f(\tau_i)$ .

$\Rightarrow$  пройденное расстояние:  $f(\tau_i) \cdot \Delta t_i$ , где  $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ .

$$\Rightarrow S \approx \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$$

3) Пусть  $\lambda = \max | [t_{i-1}; t_i] |$ . Тогда

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\tau_i) \Delta t_i$$

## 2. Определенный интеграл: определение и условие его существования

Пусть  $f(x)$  задана на отрезке  $[a;b]$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.**

1) Разобьем  $[a;b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b,$$

где  $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$ .

2) На каждом отрезке  $[x_{i-1}; x_i]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) выберем произвольную точку  $\xi_i$  и найдем произведение

$$f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина отрезка  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Сумма

$$I_n(x_i, \xi_i) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

называется **интегральной суммой** для функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ .

Пусть  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} |x_{i-1} - x_i|$

Число  $I$  называется **пределом интегральных сумм**  $I_n(x_i, \xi_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$  такое, что для любого разбиения отрезка  $[a; b]$  у которого  $\lambda < \delta$ , при любом выборе точек  $\xi_i$  выполняется неравенство

$$|I_n(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon.$$

Если существует предел интегральных сумм  $I_n(x_i, \xi_i)$  при  $\lambda \rightarrow 0$ , то его называют **определенным интегралом от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$**  (или **в пределах от  $a$  до  $b$** ).

ОБОЗНАЧАЮТ:  $\int_a^b f(x) dx$

Называют:  $[a; b]$  – **промежуток интегрирования**,  
 $a$  и  $b$  – **нижний и верхний предел интегрирования**,  
 $f(x)$  – **подынтегральная функция**,  
 $f(x)dx$  – **подынтегральное выражение**,  
 $x$  – **переменная интегрирования**.

Функция  $f(x)$ , для которой на  $[a;b]$  существует определенный интеграл, называется **интегрируемой** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие интегрируемости функции на  $[a;b]$ ).

*Если функция  $f(x)$  интегрируема на отрезке  $[a;b]$ , то она на этом отрезке ограничена.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости функции на  $[a;b]$ ).

*Для того, чтобы функция  $f(x)$  была интегрируема на  $[a;b]$ , достаточно чтобы выполнялось одно из условий:*

- 1)  $f(x)$  непрерывна на  $[a;b]$ ;
- 2)  $f(x)$  монотонна на  $[a;b]$ ;
- 3)  $f(x)$  ограничена на  $[a;b]$  и имеет на  $[a;b]$  конечное число точек разрыва.

**Замечание.** Определяя определенный интеграл, полагали  $a < b$  .

Полагаем, что:

1) если  $a > b$  , то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) если  $a = b$  , то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такое расширение определения согласуется с определением определенного интеграла и его геометрическим (физическим) смыслом.

### 3. Свойства определенного интеграла

1) Геометрический смысл определенного интеграла.

Если  $f(x)$  – непрерывна на  $[a;b]$  и  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in [a;b]$ , то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где  $S$  – площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a;b]$  и ограниченной сверху кривой  $y = f(x)$ .

2) Физический смысл определенного интеграла

Если функция  $v = f(t)$  задает скорость движущейся точки в момент времени  $t$ , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

определяет путь  $S$ , пройденный точкой за промежуток времени  $[T_1; T_2]$ .

$$3) \int_a^b dx = b - a.$$

4) Постоянный множитель  $k$  ( $k \neq 0$ ) можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

5) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b \varphi(x) dx$$

6) Если отрезок интегрирования  $[a;b]$  разбит точкой  $c$  на две части  $[a;c]$  и  $[c;b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (1)$$

*Замечание.* Формула (1) будет иметь место и в том случае, когда точка  $c$  лежит не внутри отрезка  $[a;b]$ , а вне его.

7) Если  $f(x) > 0$  ( $f(x) \geq 0$ )  $\forall x \in [a;b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx > 0 \quad \left( \int_a^b f(x) dx \geq 0 \right)$$

8) Если  $f(x) \leq \varphi(x)$   $\forall x \in [a;b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx$$

9) Следствие свойств 8 и 3.

Если  $m$  и  $M$  – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции  $f(x)$  на отрезке  $[a;b]$ , то

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

10) Если  $f(x)$  – нечетная функция, то  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

Если  $f(x)$  – четная функция, то  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ .

11) Теорема о среднем.

*Если функция  $f(x)$  непрерывна на  $[a;b]$ , то в интервале  $(a;b)$  найдется такая точка  $c$ , что справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

## §2. Вычисление определенных интегралов

### 1. Интеграл с переменным верхним пределом.

#### Формула Ньютона-Лейбница

Пусть  $f(t)$  непрерывна на  $[a;b]$ .

Тогда  $f(t)$  непрерывна на  $\forall[a;x]$ , где  $a \leq x \leq b$ .

$\Rightarrow f(t)$  интегрируема на  $\forall[a;x]$ , где  $a \leq x \leq b$ .

Рассмотрим интеграл  $\int_a^x f(t) dt$

Имеем:  $\int_a^x f(t) dt = \Phi(x)$ ,  $D(\Phi(x)) = [a;b]$ .

ТЕОРЕМА 1 (о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу).

Функция  $\Phi(x)$  дифференцируема на  $[a;b]$ , причем

$$\Phi'(x) = f(x) .$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Любая непрерывная на  $[a;b]$  функция имеет на  $[a;b]$  первообразную.

Имеем:  $\Phi(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$  на  $[a;b]$ .

Пусть  $F(x)$  – еще одна первообразная для  $f(x)$  на  $[a;b]$ .

Тогда  $F(x)$  и  $\Phi(x)$  будут отличаться постоянным слагаемым (см. §1 теорема 2, I глава), т.е.

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C, \quad (1)$$

где  $a \leq x \leq b$ ,  $C$  – некоторое число.

Полагаем  $x = a$ . Тогда из (1) получим

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

$$\Rightarrow 0 = F(a) + C,$$

$$\Rightarrow C = -F(a).$$

Следовательно, (1) можно переписать в виде

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Полагая  $x = b$  получаем:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \quad (2)$$

Формула (2) называется **формулой Ньютона – Лейбница**.

Разность  $F(b) - F(a)$  принято сокращенно записывать в виде

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Символ  $\Big|_a^b$  называют **знаком двойной подстановки**.

Используя это обозначение, формулу (2) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

**Замечание.** В формуле (2) можно взять любую из первообразных функции  $f(x)$ , так как  $F(b) - F(a)$  не зависит от выбора первообразной.

## 2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле).

Пусть функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a;b]$  (или  $[b;a]$ ) и функция  $x = \varphi(t)$  удовлетворяет условиям

1)  $\varphi(t)$  непрерывно дифференцируема на отрезке с концами  $\alpha$  и  $\beta$ ;

2)  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$  и значения  $\varphi(t)$  при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$  не выходят за пределы отрезка с границами  $a$  и  $b$ .

Тогда функция  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  интегрируема на  $[\alpha;\beta]$  (или  $[\beta;\alpha]$ ) и справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (3)$$

Формула (3) называется **формулой замены переменной в определенном интеграле**.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ .

*Замечание.* Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \int_\alpha^\beta f(t) dt,$$

где  $t = \varphi(x)$ ,  $\alpha = \varphi(a)$ ,  $\beta = \varphi(b)$ .

ПРИМЕР. Вычислить интеграл  $\int_0^1 \frac{e^x dx}{4e^{2x} + 12e^x + 34}$

### 3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $[a;b]$ . Тогда существуют интегралы

$$\int_a^b u dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v du$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (4)$$

Формула (4) называется **формулой интегрирования по частям в определенном интеграле**.

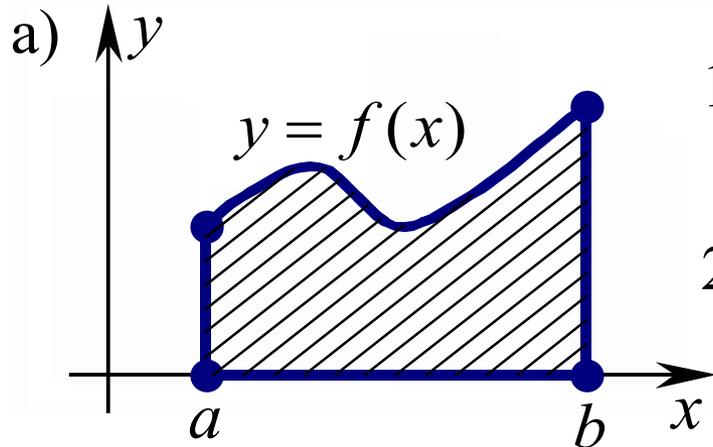
# §3. Геометрические приложения определенных интегралов

## 1. Площадь плоской области

### I) *Плоская область в декартовой системе координат*

**Основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейная трапеция**.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:



1)

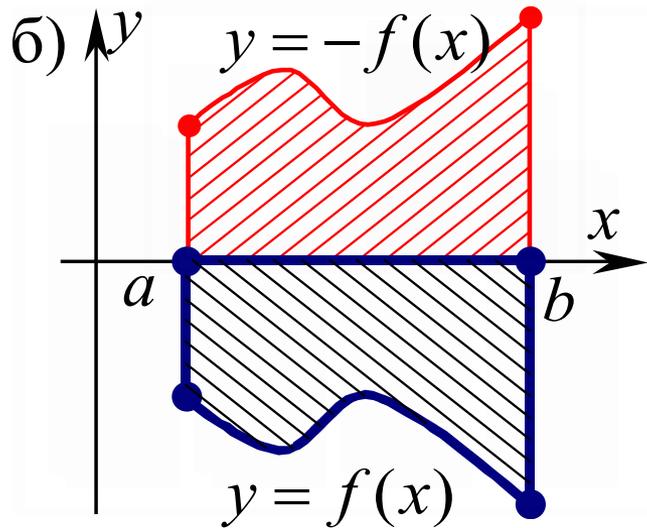
$$S = \int_a^b f(x) dx;$$

2) если  $y = f(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ .

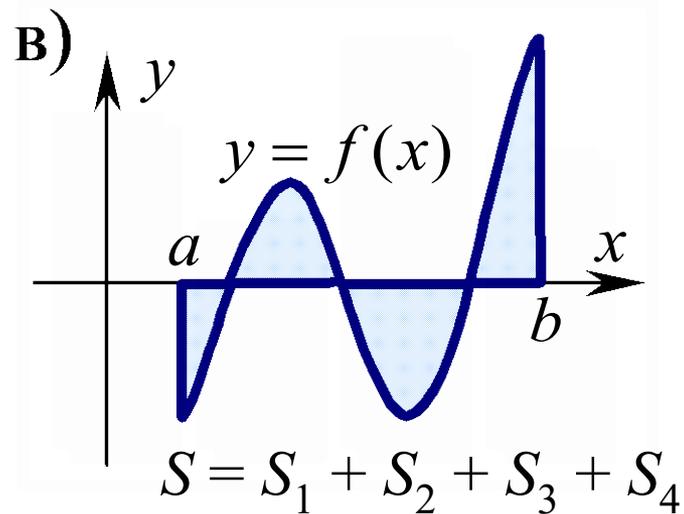


1) 
$$S = -\int_a^b f(x) dx,$$

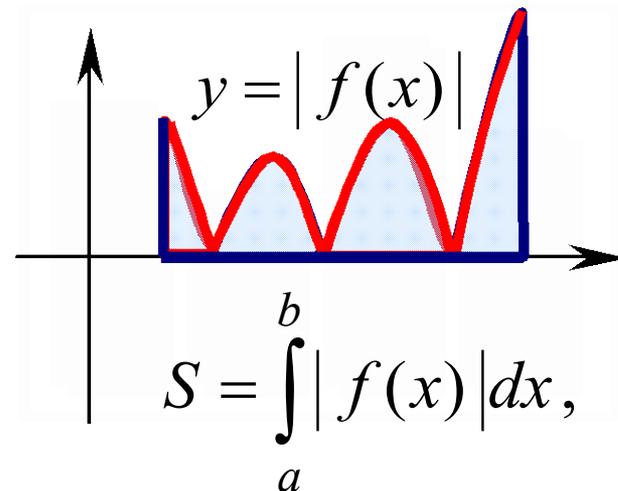
2) если  $y = f(x): \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то 
$$S = -\int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t) dt,$$

где  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ .



$\Rightarrow$



Кроме того, с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, **правильной в направлении оси  $Oy$** .

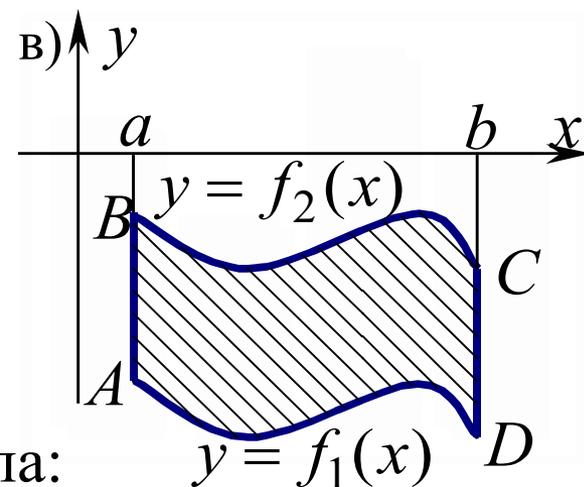
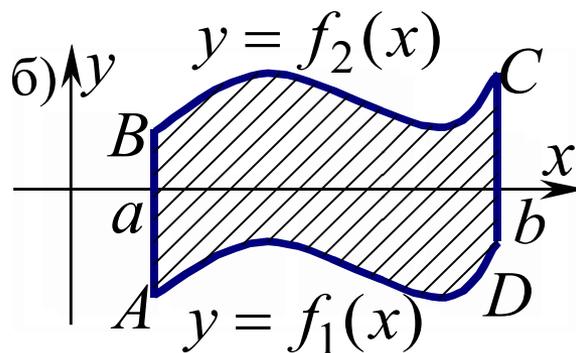
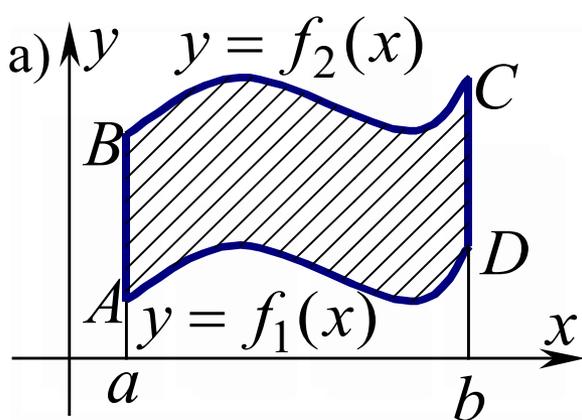
Правильной в направлении оси  $Oy$  является область  $(\sigma)$ , ограниченная линиями

$$x = a, x = b, y = f_1(x), y = f_2(x),$$

где  $a < b$  и  $f_1(x) \leq f_2(x), \forall x \in [a; b]$ .

**Замечание.** Прямые  $x = a$  и  $x = b$  могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области  $(\sigma)$  на плоскости:



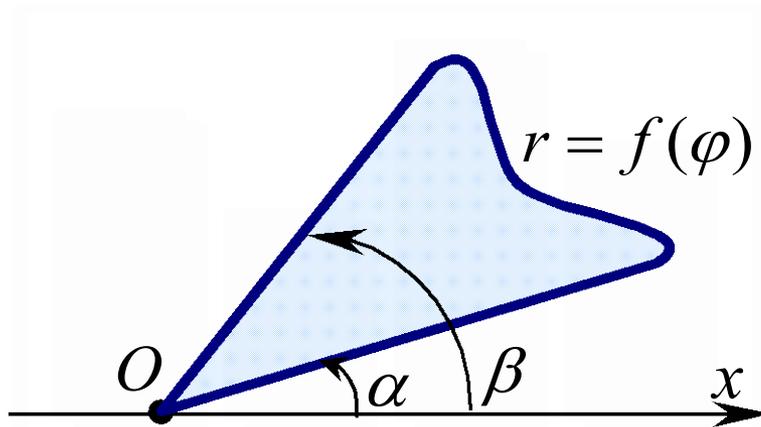
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx.$$

## II) Плоская область в полярной системе координат

**Основная область**, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – **криволинейный сектор**.

**Криволинейным сектором** называется область, ограниченная двумя лучами  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = \beta$  и кривой  $r = f(\varphi)$ .



Его площадь находится по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\varphi)]^2 d\varphi.$$

## 2. Длина плоской кривой

### I) *Плоская кривая в декартовой системе координат*

Пусть  $y = f(x)$  – непрерывно дифференцируема на  $[a;b]$ .

ЗАДАЧА: найти длину  $\ell$  кривой  $y = f(x)$ , где  $x \in [a;b]$ .

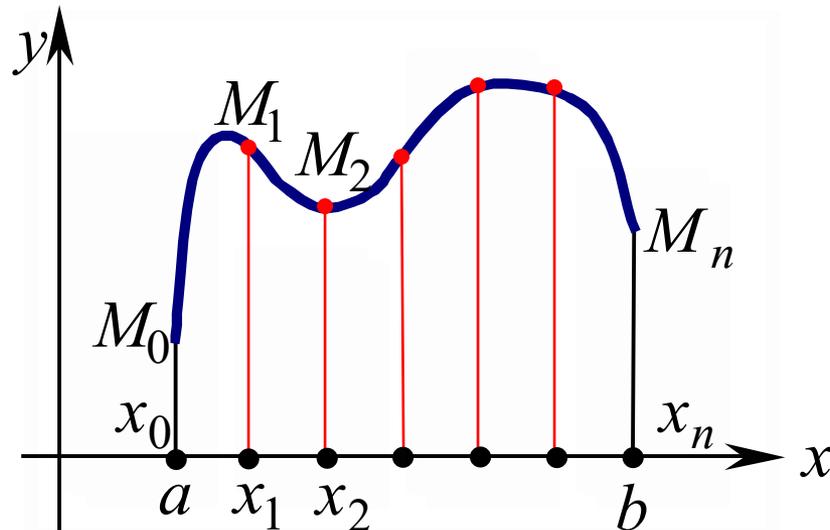
### РЕШЕНИЕ

Разобьем  $[a;b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

$\Rightarrow$   $(\ell)$  разобьется на части  $(\ell_1), (\ell_2), \dots, (\ell_n)$  точками  $M_0, M_1, \dots, M_n$

$\Rightarrow \ell = \sum \ell_i$ , где  $\ell_i$  – длина  $(\ell_i)$



Рассмотрим дугу ( $\ell_i$ ).

Если ( $\ell_i$ ) мала, то  $\ell_i \approx |M_{i-1}M_i| = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2}$

где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ,  $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ .

По теореме Лагранжа

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$$

где  $\xi_i$  — точка между  $x_{i-1}$  и  $x_i$ .

$$\Rightarrow \ell_i \approx \sqrt{[\Delta x_i]^2 + [f'(\xi_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i$$

$$\Rightarrow \ell = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x_i, \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i.$$

$$\Rightarrow \ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

### III) Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями

Пусть кривая  $(\ell)$  не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \quad (t_1 \leq t \leq t_2),$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – непрерывно дифференцируемые на  $[t_1; t_2]$ .

ЗАДАЧА. Найти длину  $\ell$  кривой  $(\ell)$ .

РЕШЕНИЕ

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2} dt$$

### III) Плоская кривая в полярных координатах

Пусть  $r = r(\varphi)$  – непрерывно дифференцируема на  $[\alpha; \beta]$ .

ЗАДАЧА: найти длину кривой  $r = r(\varphi)$ , где  $\varphi \in [\alpha; \beta]$ .

РЕШЕНИЕ.

Имеем:  $x = r \cdot \cos\varphi$ ,  $y = r \cdot \sin\varphi$

$\Rightarrow$  параметрические уравнения кривой

$$x = r(\varphi) \cdot \cos\varphi, \quad y = r(\varphi) \cdot \sin\varphi.$$

Тогда

$$x' = r' \cdot \cos\varphi - r \cdot \sin\varphi,$$

$$y' = r' \cdot \sin\varphi + r \cdot \cos\varphi$$

$$\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = r^2 + (r')^2.$$

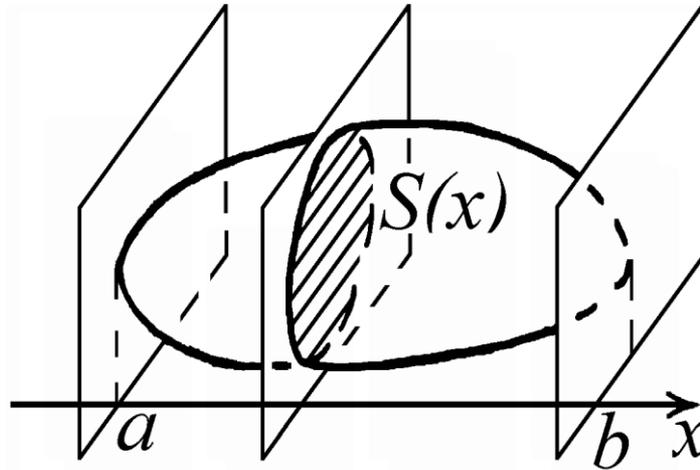
Следовательно, по формуле (1), получаем:

$$\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi$$

### 3. Вычисление объема тела

#### I) По площадям параллельных сечений

Пусть  $(V)$  – замкнутое и ограниченная область в  $Oxyz$  (тело).  
Пусть  $S(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси  $Ox$ .



Тогда объем тела  $(V)$  :

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

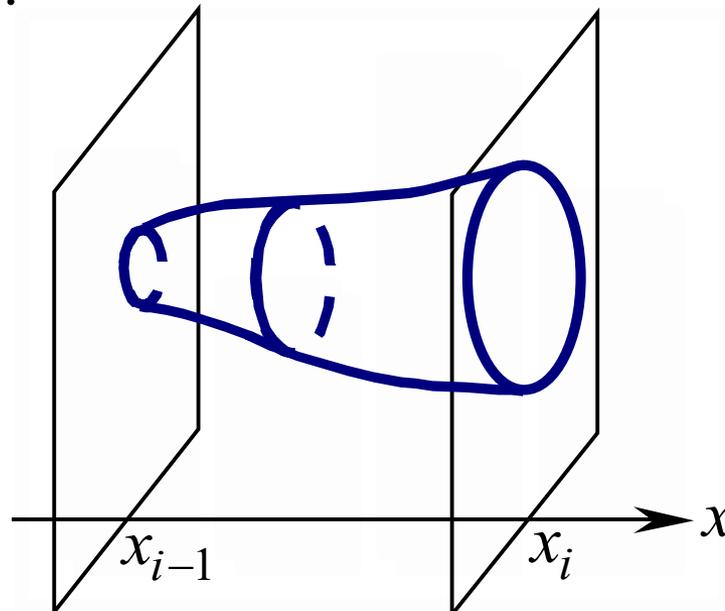
1) Разобьем  $[a;b]$  на  $n$  частей точками

$$x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b \quad (\text{где } x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n)$$

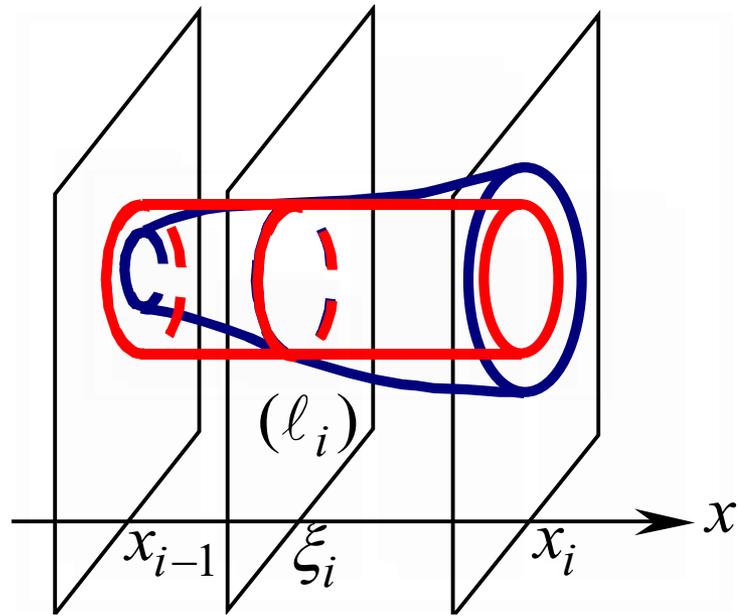
Плоскости  $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_n$  разобьют  $(V)$  на части  $(V_1), (V_2), \dots, (V_n)$

$$\Rightarrow V = \sum V_i, \text{ где } V_i \text{ — объем } (V_i).$$

2) Рассмотрим  $(V_i)$ .



Выберем  $\forall \xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$



Построим цилиндр, с направляющей  $(\ell_i)$ .

Его объем:  $S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , где  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  — длина  $[x_{i-1}; x_i]$ .

Если  $\Delta x_i$  — мала, то

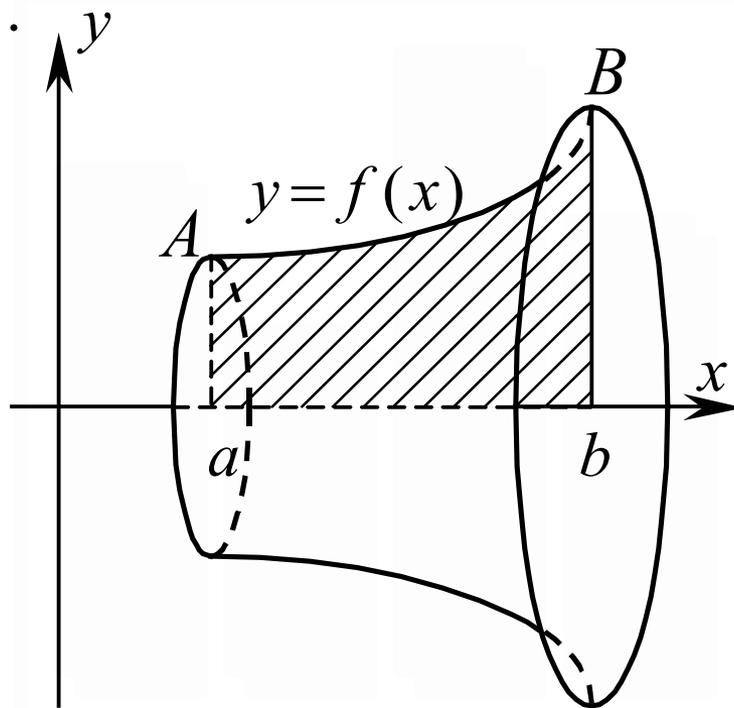
$$V_i \approx S(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{и} \quad V \approx \sum S(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Следовательно,  $V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n S(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ , где  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ .

$$\Rightarrow V = \int_a^b S(x) dx.$$

## III) Объем тела вращения

Пусть  $(V)$  – тело, которое получается в результате вращения вокруг  $Ox$  криволинейной трапеции с основанием  $[a; b]$ , ограниченной  $y = f(x)$ .



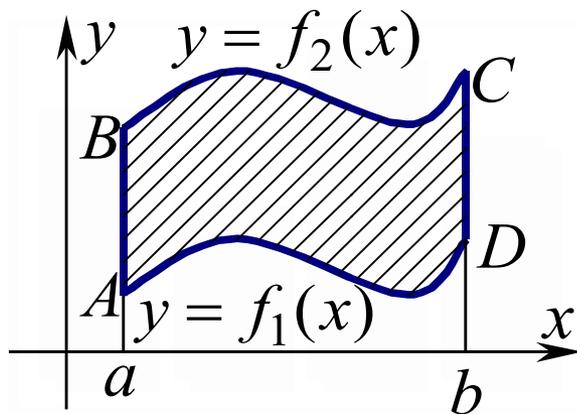
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пусть  $(V)$  – тело, полученное в результате вращения вокруг  $Ox$  области  $(\sigma)$ , ограниченной линиями

$$x = a, \quad x = b, \quad y = f_1(x), \quad y = f_2(x),$$

где  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x), \quad \forall x \in [a; b]$ .



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left( [f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

## 4. Физические приложения определенного интеграла

### **I) *Пройденный путь***

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью  $v(t)$   
Тогда путь  $S$ , пройденный точкой за время  $[T_1 ; T_2]$ , равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t) dt.$$

### **II) *Масса отрезка***

Пусть  $\gamma(x)$  – плотность распределения массы на отрезке  $[a;b]$ .

Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_a^b \gamma(x) dx.$$

### III) *Работа переменной силы*

Пусть под действием силы  $\vec{F}$  тело движется вдоль оси  $Ox$  из точки  $x_1 = a$  в точку  $x_2 = b$ .

Если  $F = F(x)$  и  $\vec{F} \uparrow Ox$ , то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x) dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении  $[a;b]$  на части, величина, соответствующая отрезку  $[a;b]$ , складывается из величин, соответствующих его частям).

## §5. Несобственные интегралы

Для существования  $\int_a^b f(x) dx$  необходимы условия:

1)  $[a;b]$  – конечен,

2)  $f(x)$  – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

# 1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; +\infty)$ .

$\Rightarrow y = f(x)$  непрерывна на  $\forall [a; b]$ , где  $b \geq a$ .

$\Rightarrow$  существует  $\int_a^b f(x) dx$ .

Имеем:  $\int_a^b f(x) dx = I(b)$ ,  $D(I) = [a; +\infty)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Несобственным интегралом I рода от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a; +\infty)$  называется предел функции  $I(b)$  при  $b \rightarrow +\infty$ .*

Обозначают:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют *сходящимся*.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют *расходящимся*.

Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $(-\infty; b]$ , то аналогично определяется и обозначается *несобственный интеграл I рода для функции  $f(x)$  по промежутку  $(-\infty; b]$* :

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $\mathbb{R}$ , то **несобственным интегралом I рода для функции  $f(x)$  по промежутку  $(-\infty; +\infty)$**  называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \quad (2)$$

где  $c$  – любое число.

Несобственный интеграл от  $f(x)$  по промежутку  $(-\infty; +\infty)$  называется **сходящимся**, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

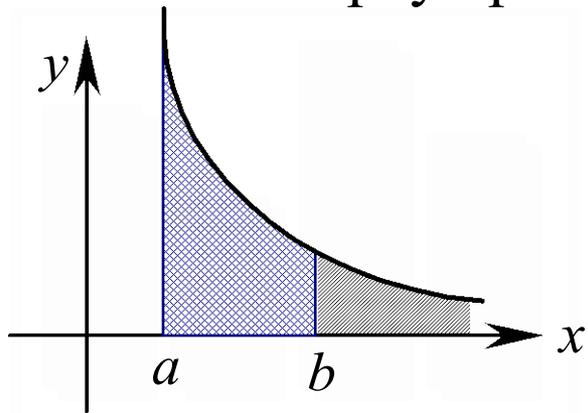
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку  $(-\infty; +\infty)$  называется **расходящимся**.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку  $[a; +\infty)$ . Для интегралов по промежутку  $(-\infty; b]$  и  $(-\infty; +\infty)$  все полученные результаты останутся справедливы.

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; +\infty)$  и  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; +\infty)$ .

Тогда  $\int_a^b f(x) dx$  – площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a; b]$ , ограниченной сверху кривой  $y = f(x)$ .



$\Rightarrow$  Если несобственный интеграл от  $y = f(x)$  по  $[a; +\infty)$  сходится и равен  $S$ , то полагают, что область, ограниченная  $Ox$ , кривой  $y = f(x)$  и прямой  $x = a$  (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь  $S$ .

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$  на  $[a; +\infty)$ .

Тогда  $\forall b \in [a; +\infty)$  имеем

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a))$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) \quad (3)$$

Обозначим  $\lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty}$ .

Тогда (3) примет вид:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) - F(a). \quad (4)$$

Формулу (4) называют **обобщением формулы Ньютона – Лейбница** для несобственных интегралов по промежутку  $[a; +\infty)$ .

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку  $(-\infty; b]$  доказываем справедливость формулы

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = F(x) \Big|_{-\infty}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x).$$

## 2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

**ТЕОРЕМА 1** (первый признак сравнения).

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны на  $[a; +\infty)$  и

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x), \quad \forall x \in [c; +\infty) \quad (\text{где } c \geq a).$$

Тогда:

1) если  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  – сходится, то  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже сходится,

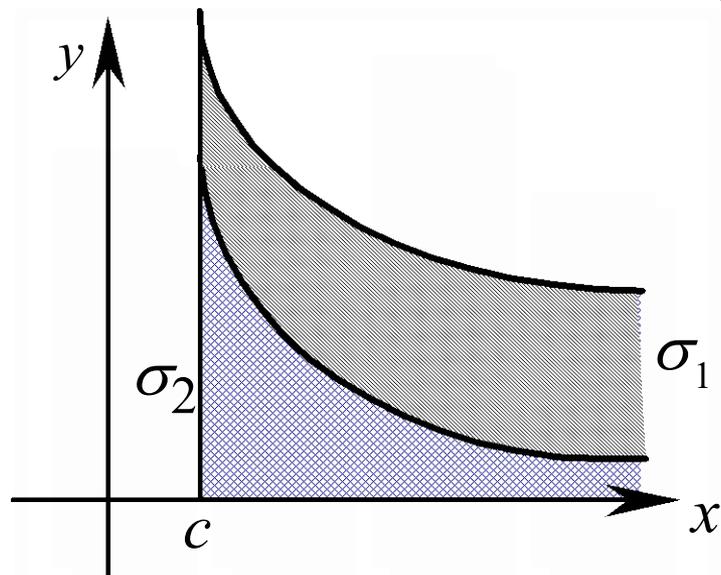
причем

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} \varphi(x) dx;$$

2) если  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – расходится, то  $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$  тоже расходится.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть  $(\sigma_1)$  и  $(\sigma_2)$  – области в  $xOy$ , ограниченные осью  $Ox$ , прямой  $x = c$  и кривыми  $y = \varphi(x)$  и  $y = f(x)$  соответственно. Неравенство  $0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$  (где  $x \in [c; +\infty)$ ) означает, что область  $(\sigma_2)$  является частью области  $(\sigma_1)$ .



- $\Rightarrow$  1) если область  $(\sigma_1)$  имеет площадь, то ее часть  $(\sigma_2)$  тоже имеет площадь;
- 2) если говорить о площади области  $(\sigma_2)$  нельзя, то и для содержащей ее области  $(\sigma_1)$  тоже нельзя говорить о площади.

## ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

Пусть  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и неотрицательны на  $[a; +\infty)$ .

Если  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = h$ , где  $h$  – действительное число, отличное

от нуля, то интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

Пусть  $f(x)$  непрерывна на  $[a; +\infty)$ .

Тогда определены несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} |f(x)| dx.$$

**ТЕОРЕМА 3** (признак абсолютной сходимости).

*Если сходится интеграл  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ , то и интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  тоже будет сходиться.*

*При этом интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называется **абсолютно сходящимся**.*

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  расходится, то об интеграле  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

Если  $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$  расходится, а  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  – сходится, то

интеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  называют **условно сходящимся**.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

### 3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b)$  и  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$  непрерывна на  $\forall [a; b_1]$ , где  $a \leq b_1 < b$ .

$\Rightarrow$  существует  $\int_a^{b_1} f(x) dx$

Имеем:  $\int_a^{b_1} f(x) dx = I(b_1)$ ,  $D(I) = [a; b)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** *Несобственным интегралом II рода по промежутку  $[a; b]$  от функции  $f(x)$ , неограниченной в точке  $b$ , называется предел функции  $I(b_1)$  при  $b_1 \rightarrow b - 0$ .*

Обозначают:  $\int_a^b f(x) dx$ .

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \quad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют **сходящимся**.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют **расходящимся**.

Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $(a;b]$  и  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +(-)\infty$ ,

то аналогично определяется и обозначается **несобственный интеграл II рода по промежутку  $[a;b]$  от функции  $f(x)$ , неограниченной в точке  $a$**  :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \rightarrow a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a;b] \setminus \{c\}$  и  $x = c$  – точка бесконечного разрыва функции, то **несобственным интегралом II рода от функции  $f(x)$  по промежутку  $[a;b]$**  называют

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (6)$$

Несобственный интеграл по промежутку  $[a;b]$  от функции  $f(x)$ , неограниченной внутри этого отрезка, называется **сходящимся**, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

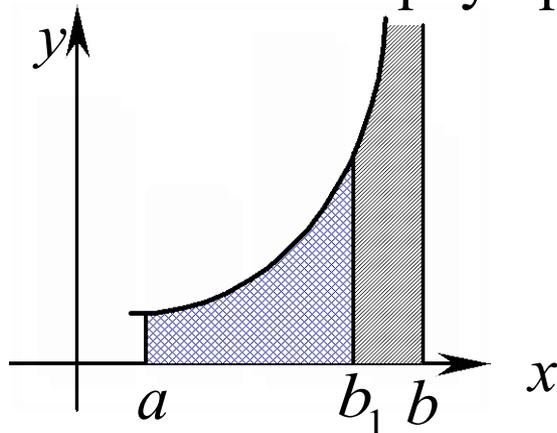
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку  $[a;b]$  называется **расходящимся**.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку  $[a;b]$  от функции, неограниченной в точке  $b$ . Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть  $y = f(x)$  непрерывна на  $[a; b)$  и  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b)$ .

Тогда  $\int_a^{b_1} f(x) dx$  – площадь криволинейной трапеции с основанием  $[a; b_1]$ , ограниченной сверху кривой  $y = f(x)$ .



$\Rightarrow$  Если несобственный интеграл от  $y = f(x)$  по  $[a; b]$  сходится и равен  $S$ , то полагают, что область, ограниченная  $Ox$ , кривой  $y = f(x)$  и прямыми  $x = a, x = b$  (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь  $S$ .

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть  $F(x)$  – первообразная для  $f(x)$  на  $[a; b)$ .

Тогда  $\forall b_1 \in [a; b)$  имеем

$$\int_a^{b_1} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{b_1 \rightarrow b-0} \int_a^{b_1} f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} (F(b_1) - F(a))$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) dx = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1) - F(a) \quad (7)$$

Ранее вводили обозначение:  $F(b-0) = \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1 \rightarrow b-0} F(b_1) - F(a) = F(b-0) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-0} = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x) - F(a). \quad (8)$$

Формулу (8) называют **обобщением формулы Ньютона – Лейбница** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке  $b$ .

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке  $a$ , доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_{a+0}^b = F(b) - \lim_{x \rightarrow a+0} F(x).$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

## *Замечание.*

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  – расходится, но  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} f(x)dx = A$ ,

то число  $A$  называют **главным значением** этого **несобственного интеграла**.

2) **Главным значением** расходящегося интеграла  $\int_a^b f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке  $c \in [a; b]$  называют число  $A$ , равное

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \right) = A.$$

Обозначают соответственно:  $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ ,  $v.p. \int_a^b f(x)dx$ .