

# Глава 1.

# Неопределённый интеграл

---

Лектор – Шерстнёва  
Анна Игоревна

# §1. Первообразная функция и неопределенный интеграл

Основная задача дифференциального исчисления:

для функции  $f(x)$  найти  $f'(x)$ .

Обратная задача: известна  $f'(x)$ , требуется найти  $f(x)$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Пусть  $f(x)$  и  $F(x)$  определены на  $X \subseteq \mathbb{R}$ .

Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $f(x)$  на промежутке  $X \subseteq \mathbb{R}$ , если  $F(x)$  дифференцируема на  $X$  и  $\forall x \in X$  выполняется равенство

$$F'(x) = f(x).$$

**ПРИМЕРЫ.**

1)  $F(x) = \sin x$  – первообразная для  $f(x) = \cos x$  на  $\mathbb{R}$ , т.к.

$$(\sin x)' = \cos x, \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

2)  $F(x) = \ln|x|$  – первообразная для  $f(x) = \frac{1}{x}$  на любом промежутке, не содержащем точки  $x = 0$ , т.к.

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$$

## ВОПРОСЫ:

- 1) для любой ли функции существует первообразная;
- 2) если функция имеет первообразную, то будет ли она единственной?

## ТЕОРЕМА 1 (о связи первообразных).

*Пусть  $F(x)$  – первообразная для функции  $f(x)$  на  $X$ .*

*Функция  $\Phi(x)$  будет первообразной для  $f(x)$  на  $X \Leftrightarrow$  функции  $\Phi(x)$  и  $F(x)$  на  $X$  связаны равенством*

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

*где  $C$  – некоторое число.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество всех первообразных функции  $f(x)$  называют **неопределенным интегралом** от функции  $f(x)$  и обозначают символом

$$\int f(x) dx$$

Называют:

$f(x)$  – подинтегральная функция,

$f(x)dx$  – подинтегральное выражение,

$x$  – переменная интегрирования,

символ  $\int$  – знак интеграла.

По определению и теореме 1

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

где  $F(x)$  – любая первообразная для  $f(x)$ ,  $C$  – произвольная постоянная.

Нахождение первообразной для функции  $f(x)$  называется **интегрированием функции  $f(x)$** .

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости).

*Если функция непрерывна на некотором промежутке, то она имеет на этом промежутке первообразную.*

**Замечание.**

Производная от элементарной функции всегда является функцией элементарной.

Первообразная от элементарной функции может не быть функцией элементарной.

Интегралы от таких функций называются ***неберущимися***.

Неберущимися являются, например, интегралы

$$\int e^{-x^2} dx, \quad \int \sin x^2 dx, \quad \int \cos x^2 dx, \\ \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{x} dx, \quad \int \frac{e^x}{x} dx, \quad \int \frac{dx}{\ln x}.$$

# СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Производная неопределенного интеграла равна подинтегральной функции:

$$\left( \int f(x) dx \right)' = f(x)$$

## *Замечание.*

Правильность интегрирования всегда можно проверить: достаточно продифференцировать результат. При этом должна получиться подинтегральная функция.

$$2. \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

*Замечание.*

Имеем:

$$F'(x) \cdot dx = dF(x).$$

$\Rightarrow$  свойство 2 можно записать в виде

$$\int d(F(x)) = F(x) + C.$$

3. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$$

4. Постоянный множитель  $k$  ( $k \neq 0$ ) можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$$



## §2. Методы интегрирования

### 1. Непосредственное интегрирование

Суть метода: с помощью простых преобразований (выполнение каких-либо арифметических действий, применение стандартных формул алгебры и геометрии и т.д.) подинтегральная функция записывается в виде суммы функций, первообразные для которых известны (говорят: «записывается в виде суммы табличных интегралов»).

# Таблица интегралов

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$2. \int dx = x + C$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

$$4. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$5. \int e^x dx = e^x + C$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$10. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$11. \int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$14. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$16. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$17. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$18. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$$

# Примеры

$$1. \int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$2. \int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int dx = x + C$$

Пример 1. 
$$\begin{aligned} \int (3x^2 - 2x + 5) dx &= 3 \int x^2 dx - 2 \int x dx + 5 \int dx = \\ &= 3 \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = \\ &= x^3 - x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

Пример 2. 
$$\int \left( \frac{1}{x^2} - \sin x + \sqrt{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx =$$

$$= \int x^{-2} dx - \int \sin x dx + \int x^{1/2} dx - \int \frac{1}{x} dx - \int x^{-1/3} dx =$$

$$= \frac{x^{-2+1}}{-2+1} - (-\cos x) + \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} - \ln |x| - \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} =$$

$$= -x^{-1} + \cos x + \frac{2x^{3/2}}{3} - \ln |x| - \frac{3x^{2/3}}{2} + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$$

Пример 3.  $\int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 1) - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx =$

$$= \int 1 dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int dx = x + C$$

Проверка:  $F(x) = x - \operatorname{arctg} x + C$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

$F'(x) = f(x)$  – подынтегральная функция

$$F'(x) = (x - \operatorname{arctg} x + C)' = 1 - \frac{1}{1 + x^2} + 0 = \frac{1 + x^2 - 1}{1 + x^2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

## 2. Замена переменной (метод подстановки)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция  $y = f(x)$  называется **непрерывно дифференцируемой** на промежутке  $X \subseteq \mathbb{R}$ , если  $f(x)$  дифференцируема на  $X$ , причем ее производная  $f'(x)$  – непрерывна на  $X$ .

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной под знаком интеграла).

Пусть  $\varphi: T \rightarrow X$  и  $x = \varphi(t)$  – непрерывно дифференцируема на  $T$ ,  
 $f: X \rightarrow Y$  и  $y = f(x)$  непрерывна на  $X$ .

Тогда функции  $f(x)$  и  $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$  интегрируемы на  $X$  и  $T$  соответственно, причем, если

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C.$$

### 3. Внесение функции под знак дифференциала – частный случай подстановки

СЛЕДСТВИЕ 4 теоремы 3 (об инвариантности формул интегрирования).

*Любая формула интегрирования остается справедливой, если везде заменить переменную на непрерывно дифференцируемую функцию, т.е. если*

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(u)du = F(u) + C,$$

где  $u = \varphi(x)$  – любая непрерывно дифференцируемая функция

Например, так как  $\int \cos x dx = \sin x + C,$

то  $\int \cos(x^2 + 1)d(x^2 + 1) = \sin(x^2 + 1) + C,$

$$\int \cos e^x d(e^x) = \sin e^x + C$$

$$\int f(x)dx = \int f(z)dz$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Пример.  $\int \sin x d \sin x = \left| \sin x = z \right| = \int z dz = \frac{z^2}{2} + C = \frac{(\sin x)^2}{2} + C$

Пример.  $\int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)} = \ln|\ln x| + C$

$$du = u' dx$$

Пример.  $\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} d(\cos x) = (\cos x)' dx \\ \frac{d(\cos x)}{(\cos x)'} = dx \end{array} \right| = \int \frac{\sin x d \boxed{\cos x}}{\cos x \cdot (\boxed{\cos x})'} =$

$$= \int \frac{\cancel{\sin x} d \cos x}{\cos x \cdot (-\cancel{\sin x})} = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = - \ln|\cos x| + C$$



Пример. 
$$\int \sin(2x + 1) dx = \int \frac{\sin(2x + 1) d(2x + 1)}{(2x + 1)'} =$$

$$= \int \frac{\sin(2x + 1) d(2x + 1)}{2} = -\frac{\cos(2x + 1)}{2} + C$$

Пример. 
$$\int \frac{dx}{1 - x} = \int \frac{d(1 - x)}{(1 - x)(1 - x)'} = \int \frac{d(1 - x)}{(1 - x)(-1)} = -\ln(1 - x) + C$$

Пример. 
$$\int \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} \frac{d(\operatorname{tg} 3x)}{(\operatorname{tg} 3x)'} = \int \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos^2 3x} \frac{d(\operatorname{tg} 3x)}{\frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3} =$$

$$= \frac{1}{3} \int \operatorname{tg} 3x d(\operatorname{tg} 3x) = \frac{1}{3} \frac{(\operatorname{tg} 3x)^2}{2} + C$$

Пример.

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \left| \begin{array}{l} e^x + 1 = z \\ e^x = z - 1 \\ x = \ln(z - 1) \\ dx = \frac{dz}{z - 1} \end{array} \right| = \int \frac{(z - 1) dz}{z(z - 1)} = \int \frac{dz}{z} = \ln |z| + C = \\ = \ln |e^x + 1| + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt{x^3}} dx = \int \frac{x^{1/2}}{x^{4/3} + x^{3/2}} dx = \left| \begin{array}{l} x = z^6 \\ dx = 6z^5 dz \end{array} \right| \\ = \int \frac{(z^6)^{1/2}}{(z^6)^{4/3} + (z^6)^{3/2}} 6z^5 dz = 6 \int \frac{z^3}{z^8 + z^9} z^5 dz = 6 \int \frac{z^8}{z^8(1+z)} dz = \\ = 6 \int \frac{dz}{1+z} = 6 \int \frac{d(z+1)}{1+z} = 6 \ln |z+1| + C = 6 \ln |\sqrt[6]{x} + 1| + C$$

## 4. Интегрирование по частям

### ТЕОРЕМА 5.

Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  непрерывно дифференцируемы на  $X \subseteq \mathbb{R}$ . Тогда на  $X$  существуют интегралы

$$\int u dv \quad \text{и} \quad \int v du$$

и справедливо равенство

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Формула (1) называется **формулой интегрирования по частям**.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

I.

$$\int p_n(x) a^x dx$$

$$\int p_n(x) \cos x dx$$

$$\int p_n(x) \sin x dx$$

$$\underbrace{\int p_n(x)}_U \underbrace{e^x dx}_{dV}$$

II.

$$\int \ln x \cdot P_n(x) dx$$

$$\int \operatorname{arctg} x \cdot P_n(x) dx$$

$$\underbrace{\int \arcsin x \cdot P_n(x) dx}_U \underbrace{\quad}_dV$$

III. (циклический)

$$\int a^{mx} \cos nx dx$$

$$\int a^{mx} \sin nx dx$$

$$\underbrace{\int a^{mx}}_{U=a^{mx}} \underbrace{\sin nx dx}_{dV}$$

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Пример.

$$\int \underbrace{(x^2 + 1)}_U \underbrace{\sin 2x dx}_{dV} = \left| \begin{array}{ll} U = x^2 + 1 & dU = (x^2 + 1)' dx = 2x dx \\ dV = \sin 2x dx & V = \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 2x}{2} \end{array} \right|$$

$$= (x^2 + 1) \cdot \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int 2x \left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) dx =$$

$$= -\frac{(x^2 + 1)\cos 2x}{2} + \int \underbrace{x}_U \underbrace{\cos 2x dx}_{dV} = \left| \begin{array}{ll} U = x & dU = dx \\ dV = \cos 2x dx & V = \int \cos 2x dx = \frac{\sin 2x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -\frac{(x^2 + 1)\cos 2x}{2} + x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx =$$

$$= -\frac{(x^2 + 1)\cos 2x}{2} + x \cdot \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{4} \cos 2x + C$$

### §3. Интегрирование рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Рациональной дробью* называется отношение 2-х многочленов, т.е. функция вида  $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ ,

где  $P_m(x)$ ,  $P_n(x)$  – многочлены степени  $m$  и  $n$  соответственно.

Если  $m < n$ , то рациональная дробь называется *правильной*.

В противном случае (т.е. если  $m \geq n$ ) дробь называется *неправильной*.

Неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (необходимо произвести деление с остатком числителя на знаменатель).

# 1. Интегрирование простейших рациональных дробей

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Простейшими рациональными дробями* I, II, III, IV типа называются соответственно правильные дроби вида  $\frac{A}{x+a}$ ,  $\frac{A}{(x+a)^m}$ ,  $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ ,  $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^m}$ , где  $D = b^2 - 4c < 0$ ,  $m$  – натуральное число ( $m > 1$ ).

1) Интегрирование простейших дробей I типа:

$$\int \frac{A}{x+a} dx$$

2) Интегрирование простейших дробей II типа:

$$\int \frac{A}{(x+a)^m} dx$$

3) Интегрирование простейших дробей III типа:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + c} dx$$
$$D = b^2 - 4c < 0$$

4) Интегрирование простейших дробей IV типа:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^m} dx$$
$$D = b^2 - 4c < 0$$

*m – натуральное число ( $m > 1$ )*



## 2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Пусть  $\frac{P_r(x)}{P_n(x)}$  – правильная рациональная дробь.

Запишем  $P_n(x)$  в виде произведения линейных и квадратичных множителей:

$$P_n(x) = \alpha(x - a_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x - a_i)^{k_i} \cdot (x^2 + b_1x + c_1)^{t_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + b_sx + c_s)^{t_s}, \quad (2)$$

где  $D_j = b_j^2 - 4c_j < 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, s$

## ТЕОРЕМА 1.

Любая правильная рациональная дробь единственным образом представима в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей.

При этом между слагаемыми этой суммы и множителями в разложении (2) имеет место следующее соответствие:

1) каждому множителю вида  $(x - a)^k$  соответствует сумма из  $k$  простейших дробей вида

$$\frac{A_1}{x - a} + \frac{A_2}{(x - a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x - a)^k}$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_k$  – некоторые числа;

2) каждому множителю вида  $(x^2 + bx + c)^t$  соответствует сумма из  $t$  простейших дробей вида

$$\frac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \dots + \frac{B_tx + C_t}{(x^2 + bx + c)^t}$$

где  $B_1, B_2, \dots, B_t, C_1, C_2, \dots, C_t$  – некоторые числа.

## ПРИМЕРЫ.

$$1) \frac{x^3 + 2x - 1}{(x - 2) \cdot (x + 1)^3} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 1} + \frac{A_3}{(x + 1)^2} + \frac{A_4}{(x + 1)^3};$$

$$2) \frac{x + 1}{x^2(x^2 - 2x + 1)} = \frac{x + 1}{x^2(x - 1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x - 1} + \frac{A_4}{(x - 1)^2};$$

$$3) \frac{x + 1}{x^2(x^2 + 2x + 2)} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2};$$

$$4) \frac{x^4 + 1}{(x + 2)(x^2 + x + 3)^2} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + x + 3} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + x + 3)^2}.$$

Разложение конкретной правильной рациональной дроби в сумму простейших обычно производят:

- 1) *методом неопределённых коэффициентов*,
- 2) *методом частных значений*.

### *Замечание.*

Разлагать правильную рациональную дробь в сумму простейших **не следует**, если есть более простой способ найти интеграл.

Например, в интеграле  $\int \frac{x^2 dx}{x^3 - 4}$

лучше внести под знак дифференциала знаменатель.

В интеграле  $\int \frac{x dx}{x^4 + x^2 + 1}$

лучше предварительно сделать замену переменной  $x^2 = t$ .

# План интегрирования рациональной дроби

1. Выделить целую часть (сделать дробь правильной)
2. Разложить знаменатель на множители.
3. Записать дробь в виде суммы простейших дробей.
4. Определить коэффициенты.
5. Проинтегрировать.

## §4. Интегрирование тригонометрических выражений

1.  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  (над синусом и косинусом проведены только рациональные операции – сложение, вычитание, умножение и деление)

*Универсальная тригонометрическая подстановка:*

$$tg(x/2) = t.$$

Выразим  $x$  и получим  $x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Интеграл принимает вид:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(t) dt$$

*Сводится к вычислению интеграла от рациональной функции.*

В ряде случаев существуют и более простые методы.

$$2. \int R(\sin x, \cos x) dx$$

а) подынтегральная функция нечетна относительно синуса

$$\int R(-\sin x, \cos x) dx = -\int R(\sin x, \cos x) dx \quad \text{Рекомендуемая подстановка:}$$
$$\cos x = t$$

б) подынтегральная функция нечетна относительно косинуса

$$\int R(\sin x, -\cos x) dx = -\int R(\sin x, \cos x) dx \quad \text{Рекомендуемая подстановка:}$$
$$\sin x = t.$$

в) подынтегральная функция четная относительно синуса и косинуса

$$\int R(-\sin x, -\cos x) dx = \int R(\sin x, \cos x) dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

3. Интегралы вида  $\int R(\operatorname{tg}x, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$   
 $\int R(\operatorname{ctg}x, \cos^2 x, \sin^2 x)dx$

Рекомендуемая подстановка:

$$\operatorname{tg}x = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\operatorname{ctg}x = t \Rightarrow dx = -\frac{dt}{1+t^2} \quad \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

4.  $\int \sin kx \cos mx dx, \int \cos kx \cos mx dx, \int \sin kx \sin mx dx$

Следует использовать формулы:

$$\sin kx \cdot \cos lx = \frac{1}{2} [\sin(k-l)x + \sin(k+l)x]$$

$$\sin kx \cdot \sin lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x - \cos(k+l)x]$$

$$\cos kx \cdot \cos lx = \frac{1}{2} [\cos(k-l)x + \cos(k+l)x]$$



5. Интегралы вида  $\int \sin^m x \cos^n x dx$

а)  $m$  – нечётное  $\Rightarrow t = \cos x$

отделяем  $\sin x$ :  $\sin x dx = -dt$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

б)  $n$  – нечётное  $\Rightarrow t = \sin x$

отделяем  $\cos x$ :  $\cos x dx = dt$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

в)  $m$  и  $n$  – чётные  $\Rightarrow$  понижаем степень

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

## §5. Интегрирование иррациональных выражений

$$1. \int R(x, \sqrt{x^2 + px + q}) dx$$

$$x^2 + bx + c = (x + b/2)^2 + q^2$$

Замена:  $t = x + b/2$

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$$

Рекомендуемая подстановка:

$$x = a \cdot \sin t \quad dx = a \cdot \cos t dt$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos t$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$$

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

$$x = \frac{a}{\cos t} \quad dx = a \frac{\sin t dt}{\cos^2 t}$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \frac{\sin t}{\cos t}$$

$$3. \int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots) dx$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$  – дробные рациональные числа,

$s$  – наименьшее общее кратное знаменателей чисел  $\alpha, \beta, \gamma \dots$

$$x = t^s$$

$$4. \int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\gamma, \dots) dx$$

$\alpha, \beta, \gamma \dots$  – дробные рациональные числа,

$s$  – наименьшее общее кратное знаменателей чисел  $\alpha, \beta, \gamma \dots$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$$

## 5. Дифференциальный бином

Выражение вида  $x^m (a + bx^n)^p$ ,

где  $(m, n, p, a, b) - const$ , называется **дифференциальным биномом**.

**Теорема.** (Чебышева)

Интегралы  $\int x^m (a + bx^n)^p dx$  ( $m, n, p \in \mathbb{Q}$ ) выражаются в конечном виде через элементарные функции, если оказывается целым одно из чисел:

1)  $p$

Подстановка  $x = t^s$   
( $s$  – наименьшее общее кратное знаменателей  $m$  и  $n$ )

2)  $\frac{m+1}{n}$

Подстановка  $a + bx^n = t^s$ , где  $s$  – знаменатель  $p$

3)  $\frac{m+1}{n} + p$

Подстановка  $\frac{a + bx^n}{x^n} = t^s$ , где  $s$  – знаменатель  $p$