

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик,
Е.Г. Пахомова**

**ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия
Редакционно-издательским советом
Томского политехнического университета*

Издательство
Томского политехнического университета
2012

УДК 512.05(075.8)

ББК 22.144я73

Л436

Шерстнева А.И.

Л436 Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие/
А.И. Шерстнёва, О.В. Янущик, Е.Г. Пахомова; Национальный
исследовательский Томский политехнический университет. –
Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012.
– 144 с.

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов первого курса высших учебных заведений, изучающих в том или ином объёме высшую математику.

В пособии изложен материал по разделам «Линейная алгебра» (матрицы, определители, системы линейных уравнений, вещественные линейные пространства, линейные операторы), «Векторная алгебра» и «Аналитическая геометрия». Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением примеров и типовых задач.

УДК 512.05(075.8)

ББК 22.144я73

Рецензенты

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Н.Ю. Галанова

Кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей математики ТГУ
Е.А. Тимошенко

© ГОУ ВПО «Национальный исследовательский
Томский политехнический университет», 2012

© Шерстнёва А.И., Янущик О.В., Пахомова Е.Г.,
2012

© Оформление. Издательство Томского
политехнического университета, 2012

Оглавление

Глава 1. Матрицы. Определители	6
1.1. Понятие матрицы	6
1.2. Некоторые виды матриц	6
1.3. Линейные операции над матрицами	8
1.4. Умножение матриц	9
1.5. Транспонирование матриц	11
1.6. Понятие определителя	11
1.7. Свойства определителей	13
1.8. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения	15
1.9. Теорема Лапласа и ее следствие	16
1.10. Понятие обратной матрицы	17
1.11. Нахождение обратной матрицы	18
1.12. Понятие ранга матрицы	21
1.13. Метод элементарных преобразований	21
1.14. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы	23
1.15. Теорема о базисном миноре	24
Глава 2. Системы линейных уравнений	27
2.1. Основные понятия	27
2.2. Решение систем линейных уравнений матричным методом	29
2.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера	30
2.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса	31
2.5. Системы линейных однородных уравнений	34
2.6. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений	35
2.7. Связь между решениями неоднородной системы уравнений и соответствующей ей однородной	37
Глава 3. Векторная алгебра	39
3.1. Основные понятия векторной алгебры	39
3.2. Линейные операции над векторами	40
3.3. Линейная зависимость и независимость векторов	42
3.4. Базис системы векторов	43
3.5. Декартова прямоугольная система координат	45
3.6. Проекция вектора на ось	47

3.7.	Нахождение длины вектора. Направляющие косинусы вектора	49
3.8.	Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме	50
3.9.	Задача о делении отрезка в заданном отношении	51
3.10.	Скалярное произведение векторов	52
3.11.	Векторное произведение векторов	54
3.12.	Смешанное произведение векторов	57
Глава 4.	Линейные пространства	60
4.1.	Понятие линейного пространства	60
4.2.	Линейная зависимость и независимость векторов	62
4.3.	Базис линейного пространства.	65
4.4.	Связь между координатами вектора в различных базисах	69
4.5.	Подпространства линейного пространства	71
Глава 5.	Линейные операторы	73
5.1.	Понятие линейного оператора	73
5.2.	Матрица линейного оператора	74
5.3.	Связь между координатами вектора и координатами его образа	76
5.4.	Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису	77
5.5.	Собственные векторы и собственные значения линейного оператора	80
5.6.	Характеристический многочлен линейного оператора	82
5.7.	Диагонализируемость линейного оператора	85
Глава 6.	Прямая на плоскости	88
6.1.	Линия на плоскости	88
6.2.	Различные формы записи уравнения прямой	88
6.3.	Взаимное расположение прямых на плоскости	93
6.4.	Расстояние от точки до прямой	96
Глава 7.	Плоскость.	97
7.1.	Поверхность в пространстве	97
7.2.	Различные формы записи уравнения плоскости	97
7.3.	Взаимное расположение плоскостей	100
7.4.	Расстояние от точки до плоскости.	101
7.5.	Исследование общего уравнения плоскости.	102

Глава 8. Прямая в пространстве	106
8.1. Линия в пространстве	106
8.2. Различные формы записи уравнений прямой	106
8.3. Переход от общих уравнений прямой к каноническим	108
8.4. Взаимное расположение прямых	109
8.5. Расстояние от точки до прямой	112
8.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми	112
8.7. Взаимное расположение прямой и плоскости	114
Глава 9. Кривые второго порядка	116
9.1. Классификация кривых второго порядка	116
9.2. Эллипс и окружность	117
9.3. Гипербола	121
9.4. Парабола	126
9.5. Общее уравнение кривой второго порядка	129
Глава 10. Поверхности второго порядка.	131
10.1. Классификация поверхностей второго порядка.	131
10.2. Эллипсоид	132
10.3. Гиперболоиды	134
10.4. Конус	138
10.5. Параболоиды	139
10.6. Цилиндры	143
Рекомендуемая литература	144

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Понятие матрицы

Определение. *Матрицей размера $m \times n$* называется таблица, образованная из элементов некоторого множества и имеющая m строк и n столбцов. Если $m \neq n$, то матрицу называют *прямоугольной*, а если $m = n$, то *квадратной порядка n* .

Элементы, из которых составлена матрица, называют *элементами* матрицы. Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Пример.

a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца,

a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Матрицы обычно обозначают большими латинскими буквами и при записи заключают в круглые скобки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используется также сокращенная запись: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Две матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ считаются *равными*, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в \mathbf{A} и \mathbf{B} на одинаковых местах, равны между собой, то есть

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Наиболее часто рассматриваются матрицы, элементами которых являются числа. Такие матрицы называются *числовыми*.

1.2. Некоторые виды матриц

1. Матрицу размера $m \times 1$ называют *столбцом длины m* .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу размера $1 \times n$ называют *строкой длины n* .

$$\mathbf{A} = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}).$$

3. *Нулевой* матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Будем обозначать её буквой \mathbf{O} .

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Условную линию в квадратной матрице \mathbf{A} порядка n , на которой расположены элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ называют *главной диагональю* этой матрицы.

Условную линию в квадратной матрице \mathbf{A} порядка n , на которой расположены элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$, называют *побочной диагональю* этой матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется *единичной*.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу принято обозначать буквой \mathbf{E} (или \mathbf{E}_n , если требуется указать порядок матрицы).

5. Квадратные матрицы, у которых все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, называются *треугольными*.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица \mathbf{A} называется *верхней треугольной*, а \mathbf{B} – *нижней треугольной*.

6. Прямоугольную матрицу называют **трапецевидной**, если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

7. Прямоугольная матрица называется **ступенчатой**, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{ступенчатая матрица,}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \text{не является ступенчатой.}$$

1.3. Линейные операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся умножение матрицы на число и сложение матриц.

Определение. *Произведением* матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ на число α называется такая матрица $\mathbf{B} = (b_{ij})$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы \mathbf{A} на число α , то есть

$$b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}.$$

Произведение матрицы \mathbf{A} на число α обозначают $\alpha \mathbf{A}$.

Пример.

$$\text{Если } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \text{ то } 2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}, (-3)\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем произведения матрицы \mathbf{A} на число является произведение $(-1)\mathbf{A}$. Такую матрицу называют **противоположной матрице** \mathbf{A} и обозначают $-\mathbf{A}$.

Определение. *Суммой* двух матриц $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ одинакового размера, называется такая матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , то есть

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Сумму матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} обозначают $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

Пример.

Если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$, то $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

Частным случаем суммы двух матриц является сумма $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$. Такую матрицу называют *разностью* матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , и обозначают $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Введенные таким образом линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
3. $\mathbf{A} + \mathbf{O} = \mathbf{A}$;
4. $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{O}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{A}) = (\alpha\beta)\mathbf{A}$;
6. $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$;
7. $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$;
8. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$.

1.4. Умножение матриц

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{li})$ – строка и $\mathbf{B} = (b_{il})$ – столбец одинаковой длины n . *Произведением строки \mathbf{A} на столбец \mathbf{B}* называется число c (т.е. матрица размера 1×1), равное сумме произведений их соответствующих элементов, то есть

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1}.$$

Пример.

Если $\mathbf{A} = (1 \ 2 \ -3)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, то произведением \mathbf{A} на \mathbf{B} будет число $c = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = -11$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ – матрица размера $n \times k$ (то есть количество столбцов в матрице \mathbf{A} совпадает с количеством строк матрицы \mathbf{B}). **Произведением** матрицы \mathbf{A} на матрицу \mathbf{B} называется матрица \mathbf{C} размера $m \times k$ такая, что каждый ее элемент c_{ij} является произведением строки матрицы \mathbf{A} с номером i на столбец матрицы \mathbf{B} с номером j , то есть

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Произведение матрицы \mathbf{A} на \mathbf{B} обозначают $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ или \mathbf{AB} .

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. Тогда \mathbf{A} можно умножить на \mathbf{B} . В результате получим матрицу

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 & 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) & 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -3 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда \mathbf{A} можно умножить на \mathbf{B} и \mathbf{B} можно умножить на \mathbf{A} . В результате получим матрицы

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6+0 & 7-8+0 \\ 3-3-5 & 21-4+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}. \\ \mathbf{BA} &= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+21 & -2-7 & 0+35 \\ 3+12 & -6-4 & 0+20 \\ -1+0 & 2+0 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Последний пример показывает, что если произведения \mathbf{AB} и \mathbf{BA} существуют, то в общем случае $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Но для некоторых матриц равенство $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ возможно. Если $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, то матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} называют *перестановочными* или *коммутативными*.

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами (при условии, что все записанные произведения имеют смысл):

1. $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$;
3. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$;
5. $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$.

1.5. Транспонирование матриц

Определение. Пусть \mathbf{A} – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, полученная из \mathbf{A} заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной к \mathbf{A}* и обозначается \mathbf{A}^T . Операция нахождения матрицы \mathbf{A}^T называется *транспонированием* матрицы \mathbf{A} .

Пример.

Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
3. $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$;
4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

1.6. Понятие определителя

Приведём некоторые определения, которые необходимы для того, чтобы ввести понятие определителя.

Пусть n – натуральное число. *Факториалом* числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, то есть

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Факториал числа 0 полагают равным 1.

Расположение n чисел $1, 2, 3, \dots, n$ в любом порядке называется *перестановкой* этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка чисел $1, 2, 3, \dots, n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_k, \dots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют *инверсию* в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, то есть если $\alpha_i > \alpha_k$. Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется *числом инверсий* в перестановке.

Пример.

В перестановке 1, 4, 5, 3, 2 инверсию образуют следующие пары чисел: 4 и 3, 4 и 2, 5 и 3, 5 и 2, 3 и 2. Число инверсий – 5.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n .

Определение. *Определителем* матрицы \mathbf{A} (*определителем порядка n*) называется сумма $n!$ членов, составленных следующим образом. Членами определителя служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. При этом произведение берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число, а со знаком «минус» – в противном случае.

Определитель матрицы \mathbf{A} обозначают:

$$|\mathbf{A}|, \quad \det \mathbf{A}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называют соответственно элементами, строками, столбцами определителя матрицы.

Согласно определению получаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

По определению можно получить и формулу для нахождения определителя третьего порядка:

$$2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы пользуются так называемым **правилом треугольников**.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух

равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \cdot (-3) + 3 \cdot 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 1 - \\ - 5 \cdot (-1) \cdot 4 - (-2) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 \cdot (-3) = \\ = -6 + 36 + 5 - (-20) - (-6) - (-9) = 70.$$

Определители более высоких порядков вычислять по определению довольно затруднительно, так как они являются суммами достаточно большого числа слагаемых ($4! = 24$, $5! = 120$ и т.д.). Способы вычисления таких определителей будут рассмотрены далее.

1.7. Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

Из этого свойства следует, что строки и столбцы в определителе равноправны, то есть любое утверждение, верное для строк определителя, будет верно и для его столбцов.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. *Определитель, у которого каждый элемент некоторой строки (столбца) является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанной строке (столбце) стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые; остальные строки (столбцы) у всех определителей одинаковые.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1 & 2-3 & 1+4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Определение. Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлена в виде суммы других k строк, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, то говорят, что данная строка (столбец) является *линейной комбинацией* указанных строк (столбцов).

5. *Определитель равен нулю если:*

- а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;*
- б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (два одинаковых столбца);*
- в) он имеет хотя бы две пропорциональные (то есть отличающиеся множителем) строки (столбца);*
- г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0, \text{ так как третий столбец определителя является линейной комбинацией второго и первого с коэффициентами } 2 \text{ и } -1:$$

ной комбинацией второго и первого с коэффициентами 2 и -1 :

$$2 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-4 \\ 16-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

6. *Определитель не изменится, если к каждому элементу одной строки (столбца) прибавить соответствующий элемент другой строки (столбца), умноженный на некоторое число.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{\times (-2) \\ +}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. Если \mathbf{A} и \mathbf{B} – квадратные матрицы порядка n , то

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|.$$

1.8. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$ и пусть k – некоторое число, такое, что $1 \leq k$, $k \leq m$, $k \leq n$.

Определение. Выберем в матрице \mathbf{A} произвольно k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель M_k . Этот определитель называют *минором k -го порядка* матрицы \mathbf{A} (её определителя).

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Выбирая первую строку и четвертый столбец, получаем минор первого порядка матрицы \mathbf{A}

$$M_1 = |7|.$$

Выбирая вторую, третью строки и первый, второй столбцы, получаем минор второго порядка матрицы \mathbf{A}

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выбирая первую, вторую, третью строки и первый, третий, четвертый столбцы, получаем минор третьего порядка матрицы \mathbf{A}

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кроме полученных миноров, у матрицы \mathbf{A} есть и другие миноры первого, второго и третьего порядка. Их можно найти, если выбирать строки и столбцы с новыми номерами.

Для квадратной матрицы, кроме понятия минора, вводится понятие дополнительного минора и алгебраического дополнения.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n . Выберем в \mathbf{A} минор k -го порядка M_k . *Дополнительным минором* к минору M_k называется определитель матрицы, оставшейся после вы-

чёркивания тех строк и столбцов матрицы \mathbf{A} , которые входят в минор M_k . **Алгебраическим дополнением** A_k минора M_k называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в минор M_k .

Пример.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда алгебраическим дополнением к нему будет

$$A_2 = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Дополнительный минор элемента a_{ij} (будем обозначать его M_{ij}) – это определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j . Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (будем обозначать его A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.9. Теорема Лапласа и ее следствие

Теорема 1.1 (Лапласа). Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов), где $1 \leq k \leq n-1$. Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k -го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Следствие 1.2 (теоремы Лапласа). Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}, \\ |\mathbf{A}| &= a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}. \end{aligned}$$

Полученные выражения называют **разложением определителя по строке** или **столбцу** соответственно. Они позволяют свести вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Пример.
Вычислим

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложив по первому столбцу, получаем

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{41} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &+ (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 17 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-57) + (-1) \cdot 1 \cdot (-22) + 2 \cdot 1 \cdot (-42) = -102. \end{aligned}$$

Замечание. Используя свойства определителей, можно преобразовать определитель порядка n так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме одного, равнялись нулю. Тогда раскладывая определитель по этой строке или столбцу, получаем всего лишь один определитель порядка $n-1$, то есть значительно уменьшаем количество вычислений.

1.10. Понятие обратной матрицы

Определение. *Обратной* матрице \mathbf{A} называется матрица, обозначаемая \mathbf{A}^{-1} , такая, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Используя определение обратной матрицы, можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.3. *Если матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу, то \mathbf{A} и \mathbf{A}^{-1} – квадратные матрицы одинакового порядка.*

Доказательство.

Чтобы существовали произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ необходимо, чтобы матрицы \mathbf{A} и \mathbf{A}^{-1} имели соответственно размеры $n \times t$ и $t \times n$.

Тогда матрица $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ будет иметь размер $n \times n$, а матрица $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ – размер $t \times t$. Но для равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ необходимо, чтобы размеры матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ совпадали, то есть $n = t$.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если обратная матрица существует, то она единственная.*

Доказательство.

Пусть существует две матрицы \mathbf{B} и \mathbf{C} , такие, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Тогда существует и произведение $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, причем согласно свойствам операции умножения матриц,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}.$$

Получаем, что $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу, то её определитель отличен от нуля.*

Доказательство.

В лемме 1.3 утверждается, что \mathbf{A} и \mathbf{A}^{-1} – квадратные матрицы одинакового порядка. Тогда согласно свойству 7 определителей

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}|.$$

Но $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{E}|$, а $|\mathbf{E}| = 1$, следовательно, $|\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = 1$, откуда получаем, что $|\mathbf{A}| \neq 0$ и $|\mathbf{A}^{-1}| \neq 0$.

Лемма доказана.

1.11. Нахождение обратной матрицы

Оказывается, что утверждение леммы 1.5 верно и в обратную сторону. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6 (об обратной матрице). *Пусть \mathbf{A} – квадратная матрица порядка n . Матрица \mathbf{A} имеет обратную тогда и только тогда, когда её определитель $|\mathbf{A}|$ отличен от нуля. Причем*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T,$$

где \mathbf{S} – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*.

Матрицу \mathbf{S}^T называют *союзной* к матрице \mathbf{A} .

Доказательство.

1) Пусть матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу. Тогда согласно лемме 1.5, $|\mathbf{A}| \neq 0$.

2) Пусть $|\mathbf{A}| \neq 0$. Надо доказать, что матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу. Для этого покажем, что матрица $\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$ является обратной \mathbf{A} ,

то есть что $\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) = \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

а) Докажем равенство $\mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T\right) = \mathbf{E}$, то есть $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы матрицы \mathbf{D} , стоящие на главной диагонали:

$$d_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n},$$

$$d_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n},$$

...

$$d_{nn} = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn}.$$

Но согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа, полученные выражения являются разложениями $|\mathbf{A}|$ по строкам, то есть

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n} = |\mathbf{A}|,$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \dots + a_{2n}A_{2n} = |\mathbf{A}|,$$

...

$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \dots + a_{nn}A_{nn} = |\mathbf{A}|,$$

откуда $d_{11} = d_{22} = \dots = d_{nn} = |\mathbf{A}|$.

Найдем остальные элементы матрицы \mathbf{D} . Пусть $i \neq j$, тогда

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

Заменим в матрице \mathbf{A} элементы строки с номером j на соответствующие элементы строки с номером i . Построенную таким образом новую матрицу обозначим \mathbf{A}' .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице \mathbf{A}' две одинаковые строки, $|\mathbf{A}'| = 0$. Запишем теперь разложение $|\mathbf{A}'|$ по строке с номером j (согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа):

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A'_{j1} + a_{i2}A'_{j2} + \dots + a_{in}A'_{jn}.$$

Но в матрицах \mathbf{A} и \mathbf{A}' все строки, кроме строк с номером j , одинаковые, следовательно,

$$A_{j1} = A'_{j1}, \quad A_{j2} = A'_{j2}, \quad \dots, \quad A_{jn} = A'_{jn},$$

то есть

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn}.$$

Получаем, что при $i \neq j$

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \dots + a_{in}A_{jn} = |\mathbf{A}'| = 0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T &= \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E} \\ \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T &= |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T \right) = \mathbf{E}. \end{aligned}$$

б) Аналогичным образом доказывается, что $\left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T \right) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Итак, согласно доказанным пунктам а) и б), матрица $\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$ является обратной \mathbf{A} .

Теорема доказана.

1.12. Понятие ранга матрицы

Пусть $A = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$.

Определение. *Рангом матрицы* называют максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля. *Базисным минором* матрицы называют её отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Ранг матрицы A обычно обозначают $r(A)$.

Ранг матрицы легко найти, если она – треугольная, трапециевидная или ступенчатая. Рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

1. Треугольные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \text{ ранг} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ – базисный минор.}$$

2. Трапециевидные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \text{ ранг} = 2, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \text{ – базисные миноры.}$$

3. Ступенчатые матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \text{ ранг} = 3, \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} \text{ – базисные миноры.}$$

Итак, *ранг треугольных, трапециевидных и ступенчатых матриц равен количеству ненулевых строк в них.*

Нахождение ранга матрицы произвольного вида по определению обычно бывает весьма затруднительно, так как требует вычисления большого количества определителей различного порядка. Существенно облегчает решение этой задачи метод элементарных преобразований.

1.13. Метод элементарных преобразований

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующего вида:

1) умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля;

- 2) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число;
- 3) перестановка двух строк (столбцов).

Определение. Две матрица \mathbf{A} и \mathbf{B} называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Если матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} эквивалентны, то пишут: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7 (об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований). *Ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований (эквивалентные матрицы имеют равные ранги).*

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что элементарные преобразования матрицы сохраняют ее ненулевые миноры (они могут лишь изменить их знаки).

Учитывая теорему 1.7 и то, что ранг матрицы ступенчатого вида легко найти, ранг произвольной матрицы можно найти следующим образом:

- 1) с помощью элементарных преобразований строк получить для матрицы \mathbf{A} эквивалентную матрицу \mathbf{B} , имеющую ступенчатый вид;
- 2) определить ранг матрицы \mathbf{B} и, следовательно, матрицы \mathbf{A} .

Такой способ нахождения ранга матрицы называется *методом элементарных преобразований*.

Замечание. При нахождении ранга матриц элементарные преобразования мы будем производить только над строками матрицы. Это условие будет необходимо в дальнейшем при решении систем линейных уравнений.

Пример.

Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку матрицы на -3 и прибавим ко второй; затем умножим первую строку на -1 и прибавим к третьей. После этого прибавим к третьей строке вторую. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Матрица \mathbf{B} имеет ступенчатый вид, $r(\mathbf{B}) = 2$ (базисным минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$). Следовательно, ранг матрицы \mathbf{A} также равен двум, $r(\mathbf{A}) = 2$.

1.14. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы

В пункте 1.7 было введено понятие линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Пусть S_1, S_2, \dots, S_k – строки (столбцы) матрицы \mathbf{A} , $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k$$

называется линейной комбинацией строк S_1, S_2, \dots, S_k .

Будем обозначать нулевую строку (столбец) o .

Определение. Строки (столбцы) S_1, S_2, \dots, S_k называют *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = o$, то есть нулевой строке (столбцу).

Если же равенство $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то строки (столбцы) называют *линейно независимыми*.

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{– строка } S_1 \\ \text{– строка } S_2 \\ \text{– строка } S_3 \\ \text{– строка } S_4 \end{array}$$

$2S_1 + S_2 - S_4 = (0, 0, 0, 0) = o$. Следовательно, строки S_1, S_2, S_4 – линейно зависимые.

Лемма 1.8 (о линейной зависимости). Строки (столбцы) S_1, S_2, \dots, S_k линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.

Доказательство.

1) Пусть S_1, S_2, \dots, S_k – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\alpha_1 S_1 &= -\alpha_2 S_2 - \dots - \alpha_k S_k \\ \Rightarrow S_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} S_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} S_k,\end{aligned}$$

то есть S_1 является линейной комбинацией S_2, \dots, S_k .

2) Пусть, например, S_1 является линейной комбинацией S_2, \dots, S_k . Тогда $S_1 = \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k$ или $-S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$. Коэффициент при S_1 равен -1 , то есть отличен от нуля. Следовательно, S_1, S_2, \dots, S_k – линейно зависимы.

Лемма доказана.

1.15. Теорема о базисном миноре

Теорема 1.9 (о базисном миноре). 1) *Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.*

2) *Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).*

Доказательство.

Докажем утверждения теоремы для столбцов матрицы. Для строк доказательство проводится аналогично.

1) Допустим, базисные столбцы матрицы – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторый базисный столбец матрицы является линейной комбинацией остальных её базисных столбцов. Следовательно, и соответствующий столбец базисного минора является линейной комбинацией остальных его столбцов. Получаем, что согласно свойствам определителя, базисный минор равен нулю, а это противоречит определению базисного минора. Таким образом, базисные столбцы – линейно независимы.

2) Пусть r – ранг матрицы A , M – её базисный минор. Для простоты обозначений будем считать, что

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через C_1, C_2, \dots, C_n столбцы матрицы A . Покажем, что любой столбец C_k , где $1 \leq k \leq n$, является линейной комбинацией базисных столбцов C_1, C_2, \dots, C_r .

а) Пусть $k \leq r$. Так как

$$C_1 = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \dots + 0 \cdot C_r,$$

$$C_2 = 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + \dots + 0 \cdot C_r,$$

...

$$C_r = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \dots + 1 \cdot C_r,$$

столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов C_1, C_2, \dots, C_r .

б) Пусть $k > r$, рассмотрим определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}, \text{ где } 1 \leq i \leq n.$$

Если $i \leq r$, то в определителе Δ_i две одинаковые строки, поэтому согласно свойствам определителя, $\Delta_i = 0$.

Если $i > r$, то Δ_i является минором матрицы A , порядок которого больше r – ранга матрицы A . Следовательно, $\Delta_i = 0$.

Таким образом, $\Delta_i = 0$ для всех i , где $1 \leq i \leq n$.

Определители Δ_i имеют одинаковые строки, кроме последней строки. Следовательно, алгебраические дополнения к соответствующим элементам их последних строк также одинаковые. Тогда разложив определители Δ_i по последней строке, получаем

$$a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + \dots + a_{ir} \cdot \alpha_r + a_{ik} \cdot M = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – алгебраические дополнения элементов $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$ соответственно. Итак, для всех i , где $1 \leq i \leq n$, выполняется

$$a_{ik} = -\frac{\alpha_1}{M} a_{i1} - \frac{\alpha_2}{M} a_{i2} - \dots - \frac{\alpha_r}{M} a_{ir}$$

$$\Rightarrow C_k = -\frac{\alpha_1}{M} C_1 - \frac{\alpha_2}{M} C_2 - \dots - \frac{\alpha_r}{M} C_r.$$

то есть столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов C_1, C_2, \dots, C_r .

Теорема доказана.

Теорема 1.10 (критерий равенства нулю определителя). *Определитель матрицы \mathbf{A} равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.*

Доказательство.

1) Пусть $|\mathbf{A}| = 0$. Покажем, что его строки (столбцы) линейно зависимы.

Обозначим через r ранг матрицы \mathbf{A} . Так как $|\mathbf{A}| = 0$, $r < n$.

Пусть S_1, S_2, \dots, S_n – строки (столбцы) матрицы \mathbf{A} . Будем считать, что базисными строками (столбцами) являются S_1, S_2, \dots, S_r . Тогда согласно теореме 1.9 о базисном миноре,

$$\begin{aligned} S_{r+1} &= \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_r S_r \Rightarrow \\ \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_r S_r - S_{r+1} + 0 \cdot S_{r+2} + \dots + 0 \cdot S_n &= o. \end{aligned}$$

Коэффициент при S_{r+1} равен -1 , то есть отличен от нуля. Следовательно, строки (столбцы) S_1, S_2, \dots, S_n – линейно зависимы.

2) Пусть строки (столбцы) матрицы \mathbf{A} – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторая строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), следовательно, $|\mathbf{A}| = 0$.

Теорема доказана.

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Линейным уравнением с n неизвестными x_1, x_2, \dots, x_n называется уравнение, которое имеет следующий вид

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где a_1, a_2, \dots, a_n – некоторые числа, называемые *коэффициентами* этого уравнения, а b – число, называемое *свободным членом*.

Если $b = 0$, то уравнение называется *однородным*. Если $b \neq 0$, то уравнение называется *неоднородным*.

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Обозначим через \mathbf{A} и \mathbf{A}^* следующие матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Матрицу \mathbf{A} называют *матрицей* или *основной матрицей* системы (2.1), а матрицу \mathbf{A}^* – *расширенной матрицей* этой системы.

Пусть \mathbf{X} – матрица-столбец неизвестных, \mathbf{V} – матрица-столбец свободных членов:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (2.1) можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{V} \quad (2.2).$$

Такую запись называют *матричной формой* записи системы (2.1).

Упорядоченный набор чисел c_1, c_2, \dots, c_n называется *решением системы* (2.1), если каждое уравнение системы обращается в верное равенство после подстановки вместо x_1, x_2, \dots, x_n чисел c_1, c_2, \dots, c_n соответственно.

Решение c_1, c_2, \dots, c_n системы (2.1) также можно записать в виде матрицы-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица удовлетворяет уравнению (2.2).

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то ее называют *совместной*. Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется *несовместной*.

Решить систему – это значит выяснить, совместна она или несовместна, и если совместна, то найти все её решения.

Исчерпывающий ответ на вопрос о существовании решений системы (2.1) даёт теорема Кронекера–Капелли.

Теорема 2.1 (Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, то есть

$$r(A) = r(A^*).$$

Оказывается, что случай, когда число решений системы линейных уравнений (2.1) конечно и больше единицы, невозможен.

Теорема 2.2. Если система линейных уравнений совместна, то она имеет единственное решение или бесконечное множество решений.

Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*. Система, имеющая бесконечное множество решений, называется *неопределенной*. В последнем случае каждое её решение называют *частным решением* системы, а совокупность всех частных решений – *общим решением* системы.

С помощью следующей теоремы выясняется, имеет ли система линейных уравнений (2.1) единственное решение.

Теорема 2.3 (критерий единственности решения). Система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, то есть

$$r(A) = r(A^*) = n.$$

2.2. Решение систем линейных уравнений матричным методом

Рассмотрим систему линейных уравнений, у которой число уравнений совпадает с числом неизвестных, то есть $m = n$. Тогда основная матрица \mathbf{A} системы квадратная. Если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то системы такого вида называют *невырожденными*.

Заметим, что если $|\mathbf{A}| \neq 0$, то ранг матрицы \mathbf{A} равен её порядку, то есть $r(\mathbf{A}) = n$. Но тогда и $r(\mathbf{A}^*) = n$, следовательно, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$, откуда согласно теореме 2.3, решение системы единственно.

Итак, невырожденная система линейных уравнений имеет единственное решение.

Покажем, как можно найти решение невырожденной системы линейных уравнений. Так как $|\mathbf{A}| \neq 0$, то согласно теореме 1.6 об обратной матрице, матрица \mathbf{A} имеет обратную матрицу \mathbf{A}^{-1} .

Запишем систему в матричной форме:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}.$$

Умножим обе части этого равенства на матрицу \mathbf{A}^{-1} слева. Согласно свойствам операции умножения матриц и определению обратной матрицы, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \\ (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \Rightarrow \\ \mathbf{X} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Нахождение решения по формуле (2.3) называют *матричным методом решения* системы.

Пример.

$$\text{Решим систему } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$$

Так как $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, можно применить матричный метод:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, решением является $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

2.3. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Также как и матричный метод, этот метод применяется для решения невырожденных систем линейных уравнений, то есть таких систем, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m = n$) и определитель матрицы системы отличен от нуля ($|\mathbf{A}| \neq 0$).

Теорема 2.4 (Крамера). *Решение невырожденной системы линейных уравнений может быть найдено по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (2.4)$$

где $\Delta = |\mathbf{A}|$, а Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ заменой столбца с номером i на столбец свободных членов.

Формулы (2.4) называют **формулами Крамера**.

Доказательство.

Решая систему матричным методом, согласно формуле (2.3), имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B},$$

а согласно теореме 1.6 об обратной матрице,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T,$$

где \mathbf{S} – матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов матрицы \mathbf{A} . Тогда

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{\Delta} \cdot \mathbf{S}^T \cdot \mathbf{B} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1i} & A_{2i} & \dots & A_{ni} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n \\ \dots \\ A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n \\ \dots \\ A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$x_i = \frac{1}{\Delta} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}), \text{ где } 1 \leq i \leq n.$$

Рассмотрим теперь определитель Δ_i , получаемый из определителя Δ матрицы \mathbf{A} заменой столбца с номером i на столбец свободных членов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

У определителей Δ и Δ_i все столбцы, кроме столбцов с номером i , одинаковые, следовательно, алгебраические дополнения к соответствующим элементам этих столбцов также одинаковые. Тогда раскладывая определитель Δ_i по столбцу с номером i (согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа), получаем

$$\Delta_i = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni} \Rightarrow x_i = \frac{1}{\Delta} \cdot (b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \dots + b_n A_{ni}) = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Теорема доказана.

Пример.

Решим систему
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 = -1 \end{cases}$$

Так как $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, можно применить метод Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Следовательно, $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$.

2.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

В отличие от двух предыдущих методов, метод Гаусса является универсальным. Он позволяет для произвольной системы линейных уравнений выяснить, совместна ли она, и если да, то найти все её решения.

Введём сначала следующие понятия.

Определение. *Элементарными преобразованиями* системы линейных уравнений называются преобразования следующего вида:

- 1) умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;
- 2) прибавление к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;
- 3) перестановка двух уравнений.

Определение. Две системы называются *эквивалентными (равносильными)*, если их решения совпадают.

Очевидно, что элементарные преобразования системы приводят к эквивалентной системе.

Процесс решения методом Гаусса состоит из двух этапов, называемых прямым ходом и обратным ходом.

Прямой ход

1. Элементарными преобразованиями приводим систему к эквивалентной системе, имеющей расширенную матрицу ступенчатого вида.

2. Выясняем, будет ли система совместна, сравнивая ранги основной и расширенной матриц полученной системы.

3. Если система совместна, выбираем в основной матрице полученной системы базисный минор треугольного вида.

4. Переносим в правую часть системы слагаемые с неизвестными, коэффициенты которых не вошли в базисный минор. Эти неизвестные будем называть *независимыми (свободными)*, а остальные – *зависимыми*.

Обратный ход

5. Начиная с последнего уравнения (в обратном порядке) выражаем все зависимые переменные через свободные переменные. Система, в которой зависимые переменные выражены через свободные, является общим решением системы.

6. Придавая свободным переменным некоторые числовые значения, получаем бесконечно много частных решений исходной системы.

Замечание. Элементарные преобразования системы линейных уравнений в точности соответствуют элементарным преобразованиям над строками расширенной матрицы этой системы. Поэтому при решении системы методом Гаусса удобнее вместо преобразований системы производить преобразования над строками расширенной матрицы.

Пример.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} \leftarrow \\ \times(-1) \quad \times(-3) \\ \leftarrow \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right) \begin{array}{l} \times 3 \\ \leftarrow \\ \sim \end{array} \\
& \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
& \Rightarrow r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2.
\end{aligned}$$

Следовательно, согласно теоремам 2.1 и 2.3, система совместна и имеет бесконечное множество решений.

Найдем общее решение системы. Элементарными преобразованиями мы привели систему к виду

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$$

Выберем в матрице этой системы базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Следовательно, переменные x_1 и x_4 будут зависимыми, а x_2 и x_3 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные переменные. Имеем:

$$\begin{cases} -x_1 - x_4 = 2 - 2x_2 - x_3, \\ -x_4 = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$$

Из последнего уравнения имеем $x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$. Подставляя это выражение в первое уравнение, получаем, что

$$x_1 = -2 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 + 2x_2 + x_3 + 10 - 11x_2 - 5x_3.$$

Таким образом, общим решением является

$$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3. \end{cases}$$

Общее решение можно также записывать в виде матрицы столбца:

$$\begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

Придавая переменным x_1 и x_4 произвольные числовые значения, получаем частные решения этой системы. Например,

$$x_2 = 0, \quad x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 8, \quad x_4 = -10;$$

$$x_2 = 1, \quad x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 8 - 9 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -9, \quad x_4 = -10 + 11 \cdot 1 + 5 \cdot 2 = 11.$$

2.5. Системы линейных однородных уравнений

Рассмотрим систему m линейных однородных уравнений с n неизвестными, то есть систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Системы такого вида называют **однородными**. Если же хотя бы одно из уравнений системы является неоднородным, то такая система линейных уравнений называется **неоднородной**.

Система линейных однородных уравнений является частным случаем системы (2.1). Она всегда совместна, так как $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ является её решением. Заметим также, что ранг расширенной матрицы системы (2.5) равен рангу её основной матрицы, то есть $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*)$.

Решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ называется **нулевым** или **тривиальным**. Но кроме нулевого решения, система (2.5) может иметь и другие решения, называемые **нетривиальными**.

Теорема 2.5 (критерий существования нетривиальных решений). Система линейных однородных уравнений обладает нетривиальными решениями тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы меньше числа неизвестных, то есть $r(\mathbf{A}) < n$.

Доказательство.

1) Пусть существуют нетривиальные решения. Так как ранг не может превосходить размера матрицы, то $r(\mathbf{A}) \leq n$.

Допустим, что $r(\mathbf{A}) = n$, следовательно, $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$. Тогда согласно теореме 2.3, система (2.5) имеет единственное решение. А это противоречит тому, что существуют нетривиальные решения.

Таким образом, $r(\mathbf{A}) < n$.

2) Пусть $r(\mathbf{A}) < n$, то есть $r(\mathbf{A}) \neq n$. Тогда согласно теореме 2.3, система (2.5) имеет более одного решения, то есть существуют нетривиальные решения.

Теорема доказана.

Матричной формой записи системы (2.5) является

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O}. \quad (2.6)$$

В главе 1 (пункт 1.7) было введено понятие линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Пусть C_1, C_2, \dots, C_k – решения уравнения (2.5), $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k$$

называется линейной комбинацией решений C_1, C_2, \dots, C_k .

Теорема 2.6 (свойство решений системы линейных однородных уравнений). *Любая линейная комбинация конечного числа решений системы линейных однородных уравнений является решением этой системы.*

Доказательство.

Пусть C_1, C_2, \dots, C_k – решения системы (2.5). Рассмотрим линейную комбинацию этих решений

$$C = \alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k.$$

Тогда

$$\begin{aligned} A \cdot C &= A \cdot (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \dots + \alpha_k C_k) = \\ &= \alpha_1 A C_1 + \alpha_2 A C_2 + \dots + \alpha_k A C_k. \end{aligned}$$

Но $A C_1 = A C_2 = \dots = A C_k = O$, так как C_1, C_2, \dots, C_k – решения системы (2.5), то есть удовлетворяют уравнению (2.6). Следовательно,

$$A \cdot C = \alpha_1 O + \alpha_2 O + \dots + \alpha_k O = O.$$

Таким образом, C является решением системы (2.5).

Теорема доказана.

2.6. Фундаментальная система решений системы линейных однородных уравнений

Теорема 2.7 (существования фундаментальной системы решений). *Пусть r – ранг матрицы системы линейных однородных уравнений, n – количество уравнений этой системы. Если система имеет нетривиальные решения, то существует $n - r$ линейно независимых решений данной системы, таких, что любое другое её решение будет их линейной комбинацией.*

Эти решения называют **фундаментальной системой решений** системы линейных однородных уравнений.

В ходе доказательства теоремы 2.7 показывается, что фундаментальную систему решений можно найти следующим образом:

- 1) Находим общее решение системы.
- 2) Записываем любой отличный от нуля определитель порядка $n - r$.

3) Находим $n - r$ частных решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы каждой из строк данного определителя поочерёдно.

Пример.

Найти фундаментальную систему решений системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найдем общее решение системы методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & -2 & -5 & -4 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ \times(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $r(\mathbf{A}) = 2$, и система приводится к виду

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Выберем базисный минор. Пусть, например, это будет минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Следовательно, переменные x_1 и x_2 будут зависимыми, а переменные x_3, x_4, x_5 – свободными. Выразим зависимые переменные через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_2 = x_3 + 2x_4 + 2x_5 - x_4,$$

Таким образом, общим решением является

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4. \end{cases}$$

Для нахождения фундаментальной системы решений возьмем любой отличный от нуля определитель Δ порядка $n - r = 5 - 2 = 3$. Пусть, например,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Запишем частные решения системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы каждой из строк определителя Δ поочередно:

$$1) x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0;$$

$$2) x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1;$$

$$3) x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 0;$$

Таким образом, фундаментальной системой решений являются три решения

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.7. Связь между решениями неоднородной системы уравнений и соответствующей ей однородной

Пусть система $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ совместна и $r(\mathbf{A}) < n$. Установим связь между решениями системы $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ и соответствующей ей системы $\mathbf{AX} = \mathbf{O}$.

Теорема 2.8. *Сумма любого решения линейной неоднородной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы.*

Доказательство.

Пусть \mathbf{C}_H – решение неоднородной системы, а \mathbf{C}_O – решение соответствующей ей однородной. Тогда

$$\mathbf{AC}_H = \mathbf{B} \quad \text{и} \quad \mathbf{AC}_O = \mathbf{O},$$

откуда

$$\mathbf{A}(\mathbf{C}_H - \mathbf{C}_O) = \mathbf{AC}_H - \mathbf{AC}_O = \mathbf{B} - \mathbf{O} = \mathbf{B},$$

то есть $\mathbf{C}_H - \mathbf{C}_O$ является решением неоднородной системы.

Теорема доказана.

Теорема 2.9. *Разность двух произвольных решений линейной неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.*

Доказательство.

Пусть C_H^1 и C_H^2 – решения неоднородной системы. Тогда

$$AC_H^1 = B \text{ и } AC_H^2 = B,$$

откуда

$$A(C_H^1 - C_H^2) = AC_H^1 - AC_H^2 = B - B = O,$$

то есть $C_H^1 - C_H^2$ является решением соответствующей однородной системы.

Теорема доказана.

Следующее утверждение является следствием теорем 2.8 и 2.9.

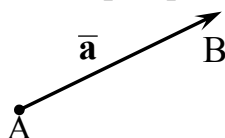
Теорема 2.10. *Общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.*

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА.

3.1. Основные понятия векторной алгебры

Определение. *Вектором* или *свободным вектором* называется направленный отрезок прямой, то есть отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец.

Если A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается \overline{AB} . Также векторы обозначают малыми латинскими буквами с чертой, например, \overline{a} , \overline{b} . Изображают вектор отрезком со стрелкой на конце:

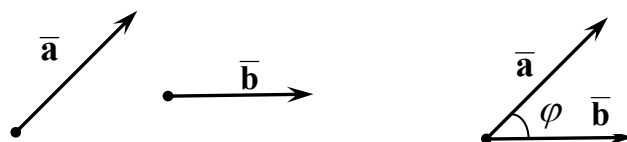


Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* или *модулем* вектора и обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\overline{a}|$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором или *ортом*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\overline{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.

Рассмотрим векторы \overline{a} и \overline{b} . Совместим параллельным переносом их начала. Под *углом* между векторами \overline{a} и \overline{b} будем понимать угол, величина которого не превышает 180° .



Два вектора \overline{a} и \overline{b} называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90° . Записывают: $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Два вектора \overline{a} и \overline{b} называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. Записывают: $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Угол между коллинеарными векторами может быть равен 0° или 180° . Если угол равен 0° , то векторы имеют одинаковое направление и называются *сонаправленными*. Если же угол равен 180° , то векторы имеют противоположное направление и называются *противоположно направленными*.

Три вектора, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Записывают: $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{b}}$. Все нулевые векторы считаются равными.

Замечание. Из определения равенства векторов следует, что вектор можно переносить параллельно самому себе, перемещая его начало в любую точку пространства.

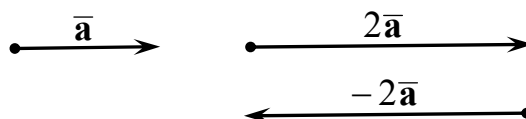
3.2. Линейные операции над векторами

Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения вектора на число.

Определение. *Произведением* вектора $\bar{\mathbf{a}} \neq \bar{\mathbf{0}}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого равна $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$. Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ или $\alpha = 0$, то их произведение полагают равным $\bar{\mathbf{0}}$.

Произведение вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число α обозначают $\alpha \bar{\mathbf{a}}$.

Пример.



Частным случаем произведения вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число является произведение $(-1)\bar{\mathbf{a}}$. Так как этот вектор имеет ту же длину, что и вектор $\bar{\mathbf{a}}$, а его направление противоположно направлению вектора $\bar{\mathbf{a}}$, то вектор $(-1)\bar{\mathbf{a}}$ называют *противоположным вектору $\bar{\mathbf{a}}$* и обозначают $-\bar{\mathbf{a}}$.

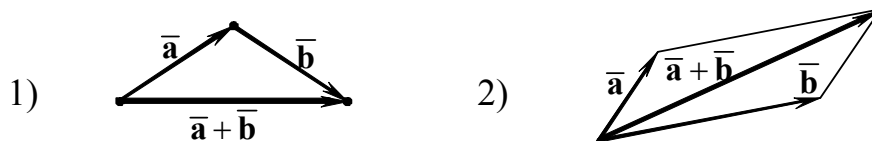
Легко заметить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.1 (критерий коллинеарности векторов). *Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, для некоторого числа $\alpha \neq 0$.*

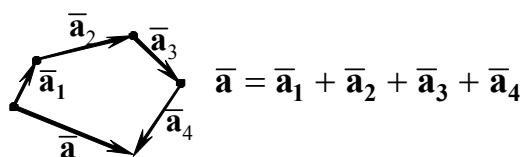
Определение. *Суммой* векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор, соединяющий начало вектора $\bar{\mathbf{a}}$ с концом вектора $\bar{\mathbf{b}}$, отложенного от конца вектора $\bar{\mathbf{b}}$.

Сумма векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ обозначается $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$.

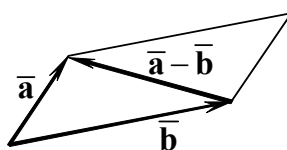
Для геометрического представления суммы векторов используют два правила: *правило треугольника* и *правило параллелограмма*.



Преимущество правила треугольника в том, что оно легко обобщается на сумму любого конечного числа векторов. Например, чтобы найти сумму четырех векторов надо построить эти векторы последовательно (беря в качестве начала следующего вектора конец предыдущего). Тогда их сумма – это вектор, соединяющий начало первого вектора и конец четвертого:



Частным случаем суммы двух векторов является сумма $\bar{a} + (-\bar{b})$. Ее называют *разностью* векторов \bar{a} и \bar{b} , и обозначают $\bar{a} - \bar{b}$. Геометрическим представлением разности векторов будет:



В главе 1 (пункт 1.7) было введено понятие линейной комбинации строк и столбцов матрицы, а главе 2 (пункт 2.5) – понятие линейной комбинации решений системы линейных уравнений. Аналогично вводится и понятие линейной комбинации векторов.

Определение. Пусть $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ – векторы, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда вектор $\bar{b} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k$ называют *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. При этом говорят, что вектор \bar{b} *линейно выражается* через векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ или *разложен по векторам* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$.

Легко заметить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.2 (критерий компланарности векторов). *Три ненулевых вектора \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие (например, $\bar{c} = \alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b}$).*

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1. $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$;
2. $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$;
3. $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$;
4. $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$;
5. $\alpha(\beta\bar{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{a}}$;
6. $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \beta\bar{\mathbf{a}}$;
7. $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}$;
8. $1\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$.

Замечание. Свойства линейных операций над векторами с точностью до обозначений совпадают со свойствами линейных операций над матрицами (глава 1, пункт 1.3).

3.3. Линейная зависимость и независимость векторов

В главе 1 (пункт 1.14) рассматривались понятия линейной зависимости и независимости строк и столбцов матрицы. Введём аналогичные понятия для векторов.

Определение. Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$ называют *линейно зависимыми*, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_k\bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{0}}$.

Если же равенство $\alpha_1\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2\bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_k\bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{0}}$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то векторы называют *линейно независимыми*.

Следующая лемма аналогична лемме 1.8 (глава 1, пункт 1.17).

Лемма 3.3 (о линейной зависимости). Векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

Доказательство.

1) Пусть векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$ — линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{\mathbf{a}}_k = \bar{\mathbf{0}}$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{a}}_1 = -\alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 - \dots - \alpha_k \cdot \bar{\mathbf{a}}_k$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{a}}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \bar{\mathbf{a}}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot \bar{\mathbf{a}}_k,$$

то есть вектор $\bar{\mathbf{a}}_1$ линейно выражается через векторы $\bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$.

2) Пусть один из векторов $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$ линейно выражается через остальные. Например,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}}_1 &= \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{a}}_3 + \dots + \alpha_k \bar{\mathbf{a}}_k \\ \Rightarrow -\bar{\mathbf{a}}_1 + \alpha_2 \bar{\mathbf{a}}_2 + \alpha_3 \bar{\mathbf{a}}_3 + \dots + \alpha_k \bar{\mathbf{a}}_k &= \bar{\mathbf{0}}. \end{aligned}$$

Коэффициент при $\bar{\mathbf{a}}_1$ равен -1 , то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы $\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{a}}_2, \dots, \bar{\mathbf{a}}_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

Лемма 3.4 (критерий линейной зависимости двух векторов).

Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Доказательство.

Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы \Leftrightarrow (согласно лемме 3.3) $\bar{\mathbf{a}}$ линейно выражается через $\bar{\mathbf{b}}$ \Leftrightarrow (согласно определению) $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$ для некоторого числа $\alpha \neq 0$ \Leftrightarrow (согласно лемме 3.1) векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Лемма доказана.

Лемма 3.5 (критерий линейной зависимости трёх векторов).

Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Доказательство.

Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ линейно зависимы \Leftrightarrow (согласно лемме 3.3) один из них линейно выражается через остальные \Leftrightarrow (согласно лемме 3.2) векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны.

Лемма доказана.

3.4. Базис системы векторов

Определение. *Базисом* некоторой системы векторов называется любая максимальная линейно независимая подсистема этой системы.

Иначе говоря, векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ некоторой системы векторов образуют её базис, если выполняются следующие два условия:

1) $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ – линейно независимы;

2) $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n, \bar{\mathbf{a}}$ – линейно зависимы для любого вектора $\bar{\mathbf{a}}$ данной системы векторов.

Базис данной системы векторов можно выбрать не единственным образом. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 3.6. Любые два базиса данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Легко увидеть, что является базисом векторов плоскости и базисом векторов пространства.

Теорема 3.7. 1) Базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости.

2) Базисом векторов пространства являются любые три некопланарных вектора.

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 3.8 (о базисе). Каждый вектор данной системы векторов линейно выражается через любой базис этой системы, причем единственным образом.

Доказательство.

Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – базис, \bar{a} – произвольный вектор. Тогда согласно определению, $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – линейно независимы, а $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}$ – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$, не все равные нулю одновременно и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n + \beta \cdot \bar{a} = \bar{0}.$$

Покажем, что $\beta \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n = \bar{0}$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю одновременно. А это означает, что векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – линейно зависимые. Но по условию они образуют базис и, следовательно, линейно независимы. Получили противоречие.

Таким образом, $\beta \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} -\beta \cdot \bar{a} &= \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n, \\ \Rightarrow \bar{a} &= -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot \bar{e}_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot \bar{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot \bar{e}_n, \end{aligned}$$

то есть \bar{a} линейно выражается через векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$.

Докажем, что вектор \bar{a} линейно выражается через базис единственным образом. Пусть

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n, \\ \bar{a} &= \beta_1 \cdot \bar{e}_1 + \beta_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \beta_n \cdot \bar{e}_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} - \bar{\mathbf{a}} &= (\alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n) - (\beta_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \beta_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + \beta_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n), \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{0}} &= (\alpha_1 - \beta_1) \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \bar{\mathbf{e}}_n.\end{aligned}$$

Так как векторы $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ – линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, ..., $\alpha_n - \beta_n = 0$. Откуда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, ..., $\alpha_n = \beta_n$.

Теорема доказана.

Пусть $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$ – базис, $\bar{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 3.8 о базисе вектор $\bar{\mathbf{a}}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$\bar{\mathbf{a}} = \alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{\mathbf{e}}_n,$$

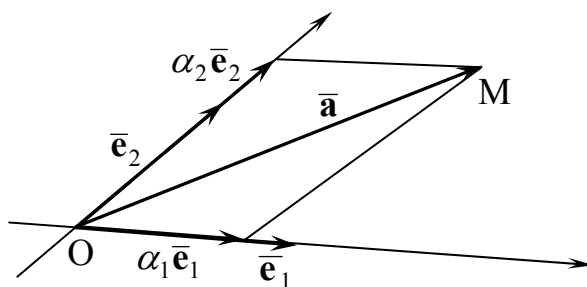
при этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются **координатами** вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в базисе $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n$.

3.5. Декартова прямоугольная система координат

Зафиксируем произвольную точку O и выберем некоторый базис векторов пространства (плоскости). Совокупность этой точки и этого базиса называется **декартовой системой координат** в пространстве (на плоскости). При этом точку O называют **началом координат**, прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, – **осями координат**, а плоскости, проходящие через две оси координат, – **координатными плоскостями**.

Пример.

Рассмотрим декартову систему координат на плоскости, то есть выберем некоторую точку O и некоторый базис (согласно теореме 3.7 это будут любые два неколлинеарных вектора).



Тогда вектор $\bar{\mathbf{a}} = \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \bar{\mathbf{e}}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{\mathbf{e}}_2$, α_1 и α_2 – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в этом базисе. Также говорят, что α_1 и α_2 – координаты точки M .

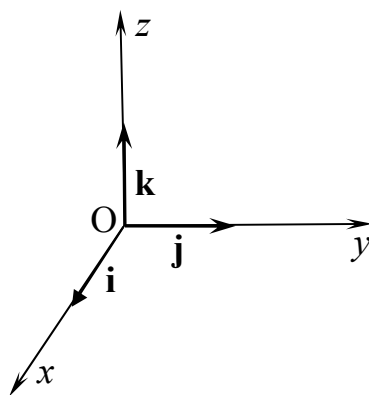
Координатами точки в декартовой системе координат называют координаты вектора, имеющего конец в этой точке, а начало – в начале координат.

Хотя декартову систему координат можно выбрать произвольным образом, на практике предпочитают работать с декартовой прямоугольной системой координат.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют декартову систему координат, базисом в которой являются единичные, попарно ортогональные векторы.

Говорят, что три некопланарных вектора \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} образуют **правую тройку**, если с конца третьего вектора \bar{c} кратчайший поворот от первого вектора \bar{a} ко второму вектору \bar{b} виден совершающимся против часовой стрелки, и **левую тройку**, если по часовой.

Чаще всего рассматривают **правую** декартову прямоугольную систему координат, то есть такую, в которой векторы базиса образуют правую тройку, их обозначают \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} . Оси координат в этой системе координат называют соответственно осью Ox (абсцисс), осью Oy (ординат) и осью Oz (аппликат).



Если a_x, a_y, a_z – координаты вектора \bar{a} в базисе \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , то есть $\bar{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$, то используется также запись $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$.

Иногда в качестве базиса берут левую тройку векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , $-\mathbf{k}$. Тогда такую декартову прямоугольную систему координат называют **левой**.

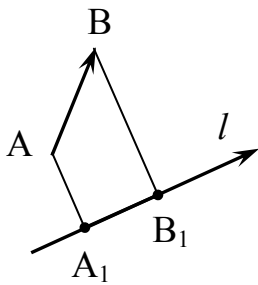
Декартова прямоугольная система координат на плоскости вводится аналогично.

3.6. Проекция вектора на ось

Проекцией точки M на прямую (плоскость) называется основание M_1 перпендикуляра, опущенного из точки M на эту прямую (плоскость).

Пусть в пространстве задана ось l , то есть направленная прямая, \overline{AB} – произвольный вектор.

Обозначим через A_1 и B_1 – проекции на ось l точек A и B соответственно. **Проекцией вектора** \overline{AB} на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора \overline{AB} равна нулю.



Обозначают $\text{пр}_l \overline{AB}$.

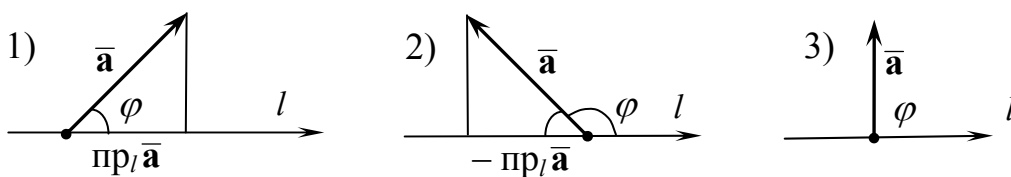
Верны следующие свойства проекций.

1. Проекция вектора \overline{a} на ось l равна произведению длины вектора \overline{a} на косинус угла φ между вектором и осью:

$$\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos \varphi.$$

Доказательство.

Рассмотрим отдельно три случая.



1) Если $\varphi < 90^\circ$, то проекция вектора \overline{a} на ось l положительна. Тогда

$$\cos \varphi = \frac{\text{пр}_l \overline{a}}{|\overline{a}|} \Rightarrow \text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos \varphi.$$

2) Если $\varphi > 90^\circ$, то проекция вектора \overline{a} на ось l отрицательна. Тогда

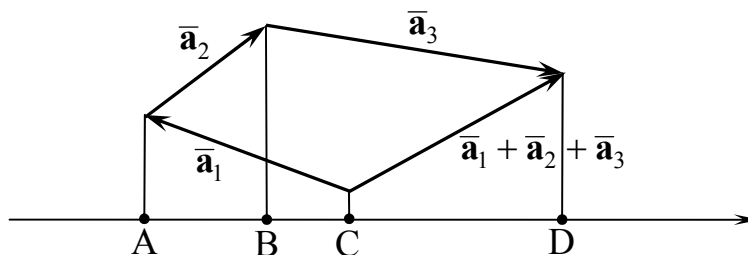
$$\cos(180^\circ - \varphi) = \frac{-\text{пр}_l \overline{a}}{|\overline{a}|} \Rightarrow -\cos \varphi = \frac{-\text{пр}_l \overline{a}}{|\overline{a}|} \Rightarrow \text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cdot \cos \varphi.$$

3) Если $\varphi = 90^\circ$, то $\cos \varphi = 0$, $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = 0$, откуда $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi$.

Утверждение доказано.

2. Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.

Пусть, например, $\bar{\mathbf{a}}_4 = \bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_3$.



Тогда

$$\begin{aligned} \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_4 &= \text{пр}_l (\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2 + \bar{\mathbf{a}}_3) = |\overline{CD}| = |\overline{AB}| + |\overline{BD}| - |\overline{AC}| = \\ &= \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_2 + \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_3 - (-\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_1) = \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_1 + \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_2 + \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}_3. \end{aligned}$$

3. При умножении вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число:

$$\text{пр}_l (\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}.$$

Доказательство.

Рассмотрим отдельно три случая.

1) Если $\lambda > 0$, то векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}$ одинаково направлены. Тогда согласно свойству 1,

$$\text{пр}_l (\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = |\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}.$$

2) Если $\lambda < 0$, то векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}$ противоположно направлены. Тогда согласно свойству 1,

$$\begin{aligned} \text{пр}_l (\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) &= |\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = -\lambda \cdot |\bar{\mathbf{a}}| \cdot (-\cos \varphi) = \\ &= \lambda \cdot |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}. \end{aligned}$$

3) Если $\lambda = 0$, то $\lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = 0$ и $\text{пр}_l (\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = 0$. Получаем, что $\text{пр}_l (\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}$

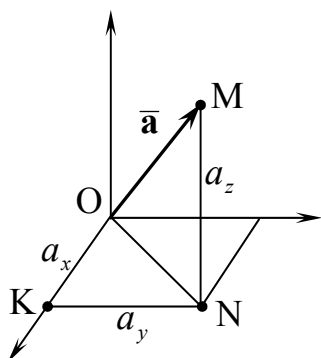
Утверждение доказано.

Замечание. Если $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, то координата a_x – это проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Ox , координата a_y – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oy и координата a_z – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oz .

3.7. Нахождение длины вектора. Направляющие косинусы вектора

Покажем, как находится длина вектора \bar{a} , если известны его координаты a_x, a_y, a_z .

Пусть начало вектора \bar{a} находится в начале координат. Обозначим через М конец вектора \bar{a} , через N – проекцию точки М на координатную плоскость Oxy , через К – проекцию точки N на координатную ось Ox .



По теореме Пифагора

$$|\overline{OM}| = \sqrt{|\overline{ON}|^2 + |\overline{NM}|^2}, \quad |\overline{ON}| = \sqrt{|\overline{OK}|^2 + |\overline{KN}|^2}.$$

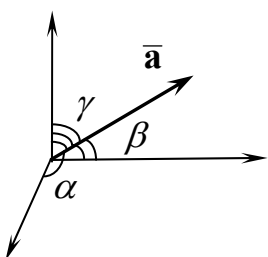
Тогда

$$|\overline{OM}| = \sqrt{|\overline{OK}|^2 + |\overline{KN}|^2 + |\overline{NM}|^2},$$

$$\text{но } |\overline{OM}| = |\bar{a}|, \quad |\overline{OK}| = |a_x|, \quad |\overline{KN}| = |a_y|, \quad |\overline{NM}| = |a_z|.$$

$$\text{Таким образом, } |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Пусть углы, которые образует вектор $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ с осями Ox , Oy и Oz соответственно, равны α , β и γ .



Рассмотрим вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$.

Согласно свойству 1 проекций,

$$a_x = \text{пр}_{Ox} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \alpha,$$

$$a_y = \text{пр}_{Oy} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \beta,$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \gamma,$$

$$\text{откуда } \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\} = \left\{ \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \frac{a_z}{|\bar{a}|} \right\} = \frac{a_x}{|\bar{a}|} \mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{a}|} \mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{a}|} \mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{a}|} \bar{a},$$

Таким образом, вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ – единичный и направлен также как и вектор \bar{a} . Поэтому вектор $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ называют **ортом вектора \bar{a}** , а $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ называют **направляющими косинусами** вектора \bar{a} .

$$\text{Заметим, что } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_x^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_y^2}{|\bar{a}|^2} + \frac{a_z^2}{|\bar{a}|^2} = \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|^2} = 1.$$

Полученное соотношение $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ называют **свойством направляющих косинусов**.

3.8. Линейные операции над векторами, заданными в координатной форме

Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Найдём координаты векторов $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}$ и $\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}}$. Согласно свойствам линейных операций над векторами (пункт 3.2),

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}, \\ \alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} &= \alpha \cdot (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = (\alpha \cdot a_x) \mathbf{i} + (\alpha \cdot a_y) \mathbf{j} + (\alpha \cdot a_z) \mathbf{k} = \\ &= \{\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z\}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.9. Если $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$, то

- 1) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \{a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z\}$,
- 2) $\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} = \{\alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z\}$.

С помощью этой теоремы, можно доказать следующие две леммы.

Лемма 3.10 (критерий коллинеарности векторов в координатной форме). Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Доказательство.

Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны \Leftrightarrow (согласно лемме 3.1) $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$ для некоторого числа $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow$ (согласно теореме 3.9) $a_x = \alpha \cdot b_x$, $a_y = \alpha \cdot b_y$, $a_z = \alpha \cdot b_z \Leftrightarrow$ координаты векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ пропорциональны.

Лемма доказана.

Пример.

Выясним, будут ли векторы $\bar{\mathbf{a}} = \{2, 4, 0\}$ и $\bar{\mathbf{b}} = \{1, 2, 0\}$ коллинеарны. Составляем соотношения $2 = \alpha \cdot 1$, $4 = \alpha \cdot 2$, $0 = \alpha \cdot 0$, откуда $\alpha = 2$. Получили, что $\bar{\mathbf{a}} = 2\bar{\mathbf{b}}$, то есть векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

Замечание. Если все координаты вектора $\bar{\mathbf{b}}$ отличны от нуля, из соотношений $a_x = \alpha \cdot b_x$, $a_y = \alpha \cdot b_y$, $a_z = \alpha \cdot b_z$ получаем, что $\alpha = \frac{a_x}{b_x}$,

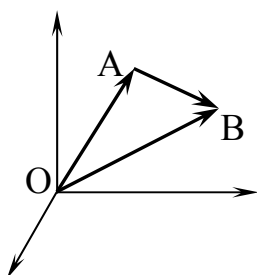
$\alpha = \frac{a_y}{b_y}$ и $\alpha = \frac{a_z}{b_z}$. Таким образом, условие коллинеарности векторов

можно записать в виде пропорции:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Лемма 3.11. Если точка A имеет координаты x_1, y_1, z_1 , точка B – координаты x_2, y_2, z_2 , то вектор \overline{AB} имеет координаты $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$.

Доказательство.



Так как согласно определению, координаты точки A – это координаты вектора \overline{OA} , а координаты точки B – это координаты вектора \overline{OB} , то $\overline{OB} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\overline{OA} = \{x_1, y_1, z_1\}$.

Но $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, тогда согласно теореме 3.9, получаем что $\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

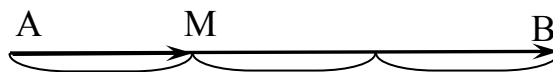
Лемма доказана.

3.9. Задача о делении отрезка в заданном отношении

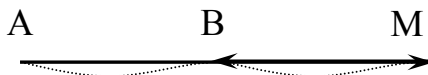
Разделим отрезок AB в отношении λ , то есть на прямой, проходящей через точки A и B , найдём такую точку M , что $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

Примеры.

1. $\lambda = \frac{1}{2}$, $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{MB}$.



2. $\lambda = -2$, $\overline{AM} = -2 \overline{MB}$.



3. $\lambda = -1$, то есть $\overline{AM} = -\overline{MB}$, – невозможно.

Заметим, что при $\lambda > 0$ векторы \overline{AM} и \overline{MB} одинаково направлены, следовательно, точка M лежит внутри отрезка AB ; при $\lambda < 0$ векторы \overline{AM} и \overline{MB} противоположно направлены, следовательно, точка M лежит вне отрезка AB .

Пусть точка А имеет координаты x_1, y_1, z_1 , точка В – координаты x_2, y_2, z_2 . Найдём координаты точки М.

Обозначим координаты точки М через x, y, z .

Тогда согласно лемме 3.11, $\overline{AM} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, $\overline{MB} = \{x_2 - x, y_2 - y, z_2 - z\}$.

Но $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, тогда из теоремы 3.9 следует, что $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$. Откуда получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

3.10. Скалярное произведение векторов

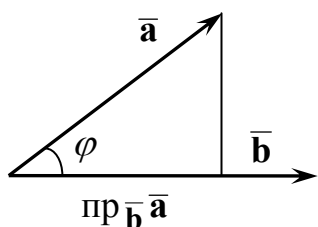
Определение. Скалярным произведением (\bar{a}, \bar{b}) двух ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними:

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi.$$

Если один из двух векторов является нулевым, то их скалярное произведение считается равным нулю.

Скалярное произведение также обозначают $\bar{a} \cdot \bar{b}$ или $\bar{a} \bar{b}$.

Покажем, как вычисляется скалярное произведение векторов, если известна проекция одного из сомножителей на второй.



Рассмотрим проекцию вектора \bar{a} на вектор \bar{b} . По свойству 1 проекций, $\text{пр}_{\bar{b}} \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos \varphi$, тогда $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b}$.

Рассмотрим теперь проекцию вектора \bar{b} на вектор \bar{a} . Тогда $\text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \cos \varphi$, следовательно, $(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \varphi = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$.

Таким образом,

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}. \quad (3.1)$$

Скалярное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$;
2. $(\lambda \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \lambda \bar{b}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b})$;
3. $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$;
4. $(\bar{a}, \bar{a}) = |\bar{a}|^2$.

Лемма 3.12 (критерий ортогональности векторов). *Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.*

Доказательство.

1) Пусть ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ ортогональны, то есть угол φ между ними равен 90° . Тогда $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos 90^\circ = 0$.

2) Пусть $|\bar{\mathbf{a}}| \neq 0$, $|\bar{\mathbf{b}}| \neq 0$ и $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = 0$. Тогда $|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi = 0$, откуда $\cos \varphi = 0$, следовательно, $\varphi = 90^\circ$.

Лемма доказана.

Найдем, как вычисляется скалярное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда используя свойства скалярного произведения векторов, получаем

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x (\mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i}, \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i}, \mathbf{k}) + \\ &+ a_y b_x (\mathbf{j}, \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j}, \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j}, \mathbf{k}) + \\ &+ a_z b_x (\mathbf{k}, \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k}, \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k}, \mathbf{k}). \end{aligned}$$

Векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} попарно ортогональны, следовательно, согласно лемме 3.12, $(\mathbf{i}, \mathbf{j}) = (\mathbf{i}, \mathbf{k}) = (\mathbf{j}, \mathbf{i}) = (\mathbf{j}, \mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \mathbf{i}) = (\mathbf{k}, \mathbf{j}) = 0$. Тогда

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x (\mathbf{i}, \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j}, \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k}, \mathbf{k}).$$

По свойству 4 скалярного произведения, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = |\mathbf{i}|^2$, $(\mathbf{j}, \mathbf{j}) = |\mathbf{j}|^2$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^2$. Но векторы \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные, следовательно, $(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1$, $(\mathbf{j}, \mathbf{j}) = 1$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = 1$, откуда

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Лемма 3.13. *Скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат:*

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

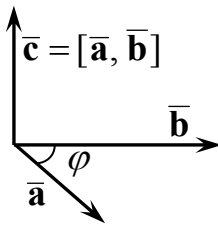
Найдем угол между векторами $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Так как $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi$, то

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|}.$$

3.11 Векторное произведение векторов

Определение. *Векторным произведением* двух ненулевых и неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, для которого выполняются следующие условия:

- 1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 2) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 3) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – правая (ориентирована одинаково с базисной тройкой \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}).



Если векторы коллинеарны или хотя бы один из двух векторов является нулевым, то их векторное произведение считается равным нулевому вектору.

Векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ обозначается $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$.

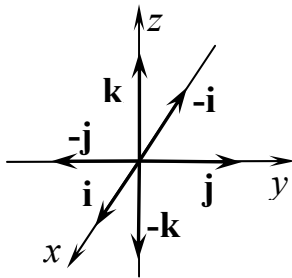
На практике для нахождения направления векторного произведения пользуются также правилом правой руки или правилом винта.

Правило правой руки. Если не согнутые пальцы правой руки расположить так, что вектор $\bar{\mathbf{a}}$ будет направлен вдоль большого пальца, а вектор $\bar{\mathbf{b}}$ – вдоль указательного, то векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ будет направлено вдоль среднего пальца этой руки.

Правило винта. Направление векторного произведения $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ совпадает с направлением вкручивающегося винта, если его шляпка находится в плоскости векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и вращается в сторону кратчайшего поворота от вектора $\bar{\mathbf{a}}$ к вектору $\bar{\mathbf{b}}$.

Пример.

Найдем векторное произведение всех возможных пар, составленных из базисных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} .



Найдём векторное произведение $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$.

- 1) $|\mathbf{j}, \mathbf{i}| = |\mathbf{j}| \cdot |\mathbf{i}| \cdot \sin \varphi = 1 \cdot 1 \cdot \sin 90^\circ = 1$.
- 2) Вектор $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ ортогонален векторам \mathbf{i} и \mathbf{j} , то есть направлен вдоль оси Oz или противоположно ей.
- 3) Применяя правило правой руки или правило винта, получаем, что направление $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ противоположно оси Oz .

Итак, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}]$ – единичный вектор, направленный противоположно оси Oz , следовательно, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$.

Найдём векторное произведение $[\mathbf{i}, \mathbf{i}]$. Согласно определению, векторное произведение коллинеарных векторов равно нулевому вектору, следовательно, $[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = \bar{\mathbf{0}}$.

Векторные произведения остальных пар базисных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} находятся аналогично. Запишем результаты этих вычислений в виде следующей *таблицы умножения базисных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k}* :

	\mathbf{i}	\mathbf{j}	\mathbf{k}
\mathbf{i}	$\bar{\mathbf{0}}$	\mathbf{k}	$-\mathbf{j}$
\mathbf{j}	$-\mathbf{k}$	$\bar{\mathbf{0}}$	\mathbf{i}
\mathbf{k}	\mathbf{j}	$-\mathbf{i}$	$\bar{\mathbf{0}}$

Векторное произведение векторов обладает следующими свойствами:

1. $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}]$;
2. $[\alpha\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \alpha\bar{\mathbf{b}}] = \alpha[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$;
3. $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$;
4. $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = \bar{\mathbf{0}}$.

Лемма 3.14. *Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.*

Доказательство.

1) Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – ненулевые векторы, $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{0}}$.

Допустим, что $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ не коллинеарны. Тогда согласно определению векторного произведения, $|[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi = 0$. Так как $|\bar{\mathbf{a}}| \neq 0$ и $|\bar{\mathbf{b}}| \neq 0$, то $\sin \varphi = 0$, откуда $\varphi = 0^\circ$ или $\varphi = 180^\circ$, то есть векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны. Пришли к противоречию.

Следовательно, $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны.

2) Пусть векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны. Тогда согласно определению, $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{0}}$.

Лемма доказана.

Найдём, как вычисляется векторное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Тогда используя свойства скалярного произведения векторов, получаем

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] &= [a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}] = \\ &= a_x b_x [\mathbf{i}, \mathbf{i}] + a_x b_y [\mathbf{i}, \mathbf{j}] + a_x b_z [\mathbf{i}, \mathbf{k}] + \\ &+ a_y b_x [\mathbf{j}, \mathbf{i}] + a_y b_y [\mathbf{j}, \mathbf{j}] + a_y b_z [\mathbf{j}, \mathbf{k}] + \\ &+ a_z b_x [\mathbf{k}, \mathbf{i}] + a_z b_y [\mathbf{k}, \mathbf{j}] + a_z b_z [\mathbf{k}, \mathbf{k}]. \end{aligned}$$

Согласно таблице умножения базисных векторов \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} , имеем $[\mathbf{i}, \mathbf{i}] = \bar{\mathbf{0}}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k}$, $[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{j}] = \bar{\mathbf{0}}$, $[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$, $[\mathbf{k}, \mathbf{k}] = \bar{\mathbf{0}}$. Таким образом, получаем, что

$$\begin{aligned} [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k} = \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Это выражение можно представить в схематичной записи

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (3.3)$$

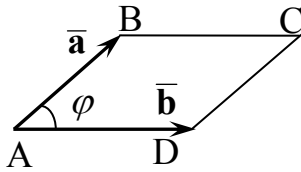
Замечание. Полученное выражение вычисляют, раскладывая определитель по первой строке (согласно следствию 1.2 из теоремы Лапласа, пункт 1.9, глава 1).

Следующие две леммы объясняют геометрический смысл векторного произведения векторов.

Лемма 3.15. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные векторы. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна модулю векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$:

$$S = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|.$$

Доказательство.



Пусть ABCD – параллелограмм, $\overline{AB} = \bar{\mathbf{a}}$, $\overline{AD} = \bar{\mathbf{b}}$, φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Тогда его площадь равна

$$S = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin \varphi = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.16. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные векторы. Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине модуля векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|.$$

3.12. Смешанное произведение векторов

Определение. Смешанным произведением $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ трёх векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ умножается скалярно на $\bar{\mathbf{c}}$:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}).$$

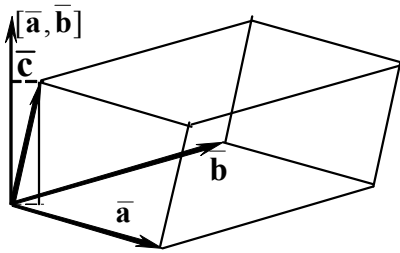
Геометрический смысл смешанного произведения объясняется следующей леммой.

Лемма 3.17. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некопланарные векторы. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Доказательство.

Объём параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту, опущенную на это основание: $V = S \cdot h$.



Основание параллелепипеда – параллелограмм, построенный на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Тогда согласно лемме 6.2, его площадь $S = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.

Высота параллелепипеда h равна модулю проекции вектора $\bar{\mathbf{c}}$ на векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$: $h = |\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}|$.

$$\text{Получаем, что } V = S \cdot h = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot |\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}|.$$

Вычислим $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})$, применяя формулу (3.1) из пункта 3.10:

$$([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot \text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}.$$

Таким образом,

$$V = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot |\text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}| = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot \text{пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}} = |([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})| = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.18. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некопланарные векторы. Тогда объём пирамиды, построенной на этих векторах, равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Свойства смешанного произведения векторов:

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = -(\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}})$;
2. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$;
3. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$.

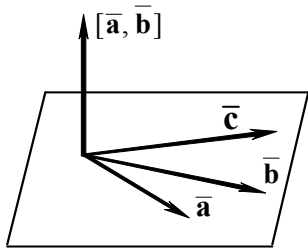
Лемма 3.19 (критерий компланарности векторов через смешанное произведение). Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.

Доказательство.

1) Пусть ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – компланарны. Рассмотрим два случая: а) векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – коллинеарны; б) векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – не коллинеарны.

а) Если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – коллинеарны, то согласно определению векторного произведения, $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{0}}$, следовательно,

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{0}}, \bar{\mathbf{c}}) = 0.$$



б) Если векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – не коллинеарны, то согласно определению, вектор $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Следовательно, вектор $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ ортогонален и вектору $\bar{\mathbf{c}}$. Тогда согласно лемме 3.12,

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = 0.$$

2) Пусть $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = 0$. Так как $\bar{\mathbf{c}}$ – ненулевой вектор, равенство $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = 0$ возможно только в двух случаях: а) $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{0}}$ и б) векторы $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – ортогональны.

а) Если $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \bar{\mathbf{0}}$, то согласно лемме 3.14, векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – коллинеарны, откуда следует, что $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – компланарны.

б) Пусть вектор $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ ортогонален вектору $\bar{\mathbf{c}}$. Но вектор $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ также ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$, откуда следует, что векторы $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ лежат в параллельных плоскостях, то есть компланарны.

Лемма доказана.

Найдем, как вычисляется смешанное произведение векторов, если известны их координаты.

Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{\mathbf{c}} = \{c_x, c_y, c_z\}$. Тогда согласно формуле (3.2) из пункта 3.11,

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Так как известны координаты векторов $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ и $\bar{\mathbf{c}}$, их скалярное произведение вычислим, применив лемму 3.13:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Полученное выражение можно представить как разложение по третьей строке следующего определителя (согласно следствию 1.2 из теоремы Лапласа, пункт 1.9, глава 1):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Таким образом, получаем, что

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (3.4)$$

ГЛАВА 4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

4.1. Понятие линейного пространства

На практике часто встречаются множества, элементы которых можно складывать и умножать на действительные числа. Например, в главе 1 было рассмотрено множество матриц одинакового размера, а в главе 3 – множество векторов пространства и плоскости. Оказалось, что эти множества, несмотря на то, что состоят из элементов разной природы, обладают одними и теми же свойствами, для них верны одни и те же утверждения. Линейное пространство – это понятие, обобщающее понятия всех таких множеств. При изучении линейных пространств, изучаются все эти множества сразу.

Пусть L – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа. Обозначим через \mathbb{R} – множество действительных чисел.

Определение. Множество L называется *линейным пространством над \mathbb{R}* или *вещественным линейным пространством*, если выполняются следующие условия:

- 1) $a + b = b + a$ для любых $a, b \in L$;
- 2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ для любых $a, b, c \in L$;
- 3) во множестве L существует элемент o , называемый *нулевым элементом*, такой, что $a + o = a$ для любого $a \in L$;
- 4) для каждого элемента $a \in L$ существует элемент $-a \in L$, называемый *противоположным* элементу a , такой, что $a + (-a) = o$;
- 5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $a \in L$;
- 6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и любого $a \in L$;
- 7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и любых $a, b \in L$;
- 8) $1a = a$ для любого $a \in L$.

Рассмотрим, какие из известных множеств являются вещественными линейными пространствами.

Пример 1. Пусть $M(m \times n, \mathbb{R})$ – множество матриц размера $m \times n$ с элементами из \mathbb{R} . Для этого множества все условия из определения линейного пространства выполняются (согласно свойствам линейных опе-

раций над матрицами, пункт 1.3, глава 1). Следовательно, множество $M(m \times n, \mathbb{R})$ является вещественным линейным пространством.

Пример 2. Пусть $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) – множество свободных векторов пространства (плоскости). Для этого множества также выполняются все условия из определения линейного пространства (согласно свойствам линейных операций над векторами, пункт 3.2, глава 3). Следовательно, множество $V^{(3)}$ ($V^{(2)}$) является вещественным линейным пространством.

Пример 3. Пусть \mathbb{R}^n – множество последовательностей n действительных чисел. Введем операцию сложения элементов множества \mathbb{R}^n и умножения их на число. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Полагаем

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n),$$
$$\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \dots, \alpha \cdot a_n).$$

Можно проверить, что все условия из определения линейного пространства в этом случае выполняются (нулевым элементом будет $o = (0, 0, \dots, 0)$, противоположным к $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ – элемент $-a = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n)$). Следовательно, множество \mathbb{R}^n является вещественным линейным пространством. Его называют *арифметическим линейным пространством*, а его элементы – *n -мерными векторами*.

Пример 4. Пусть $\mathbb{R}[x]$ – множество многочленов с коэффициентами из \mathbb{R} . Можно показать, что все условия из определения линейного пространства для множества $\mathbb{R}[x]$ выполняются. Следовательно, это множество является вещественным линейным пространством.

Пример 5. Пусть $C[a, b]$ – множество функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$. Для этого множества также можно проверить, что все условия из определения линейного пространства выполняются. Следовательно, оно является вещественным линейным пространством.

Для действий над элементами линейных пространств верны правила, аналогичные правилам выполнения арифметических действий над обычными числами. Используя условия из определения линейного пространства, легко доказать следующие утверждения.

Лемма 4.1. Пусть L – вещественное линейное пространство. Тогда для любых элементов $a, b \in L$ и любых действительных чисел α, β справедливы следующие утверждения:

- 1) $0 \cdot a = o$;
- 2) $\alpha \cdot o = o$;
- 3) $(-\alpha) \cdot a = -\alpha a$;
- 4) $\alpha \cdot (-a) = -\alpha a$;
- 5) $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha a$;
- 6) $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b$;
- 7) $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a$.

Доказательство.

Приведём доказательство только первого из этих равенств. Покажем, что $0 \cdot a = o$.

Рассмотрим элемент $\beta \cdot a$. Используя условие 6, получаем

$$\beta \cdot a = (\beta + 0) \cdot a = \beta \cdot a + 0 \cdot a.$$

Прибавим к левой и правой части этого равенства элемент, противоположный к $\beta \cdot a$, т.е. $-(\beta \cdot a)$. Тогда

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = -(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a + 0 \cdot a)$$

Но по условию 4

$$-(\beta \cdot a) + \beta \cdot a = o,$$

а согласно условиям 2 и 3

$$-(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a + 0 \cdot a) = (-(\beta \cdot a) + (\beta \cdot a)) + 0 \cdot a = o + 0 \cdot a = 0 \cdot a.$$

Следовательно, $0 \cdot a = o$.

Замечания. 1. В дальнейшем будем использовать термин *линейное пространство*, подразумевая, что оно является вещественным.

2. Элементы линейных пространств принято называть *векторами*.

4.2. Линейная зависимость и независимость векторов

В предыдущих главах уже встречалось понятие линейной комбинации элементов некоторых множеств. Введём теперь это понятие в общем виде.

Определение. Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на действительные числа. Тогда выражение $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k$, где $m_1, m_2, \dots, m_k \in M$, а $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые действительные числа, называют *линейной комбинацией* элементов m_1, m_2, \dots, m_k с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$.

Если $m \in M$ и m является линейной комбинацией элементов m_1, m_2, \dots, m_k , то есть

$$m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k,$$

то говорят, что m **линейно выражается** через элементы m_1, m_2, \dots, m_k или **разложен** по элементам m_1, m_2, \dots, m_k .

Пусть L – линейное пространство, $a_1, a_2, \dots, a_k \in L$.

Определение. Говорят, что векторы a_1, a_2, \dots, a_k – **линейно зависимы**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k$ равна нулевому элементу o линейного пространства L .

Если же равенство $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то векторы a_1, a_2, \dots, a_k называют **линейно независимыми**.

Эти понятия также рассматривались в предыдущих главах. В главе 1 (пункт 1.14) вводилось понятие линейной зависимости и независимости строк и столбцов матриц, а в главе 3 (пункт 3.3) – свободных векторов. А следующая лемма аналогична лемме 1.8 (глава 1, пункт 1.14) и лемме 3.3 (глава 3, пункт 3.3).

Лемма 4.2. *Векторы a_1, a_2, \dots, a_k линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.*

Доказательство.

1) Пусть векторы a_1, a_2, \dots, a_k – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot a_1 &= -\alpha_2 \cdot a_2 - \dots - \alpha_k \cdot a_k \\ \Rightarrow a_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot a_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} \cdot a_k, \end{aligned}$$

то есть вектор a_1 линейно выражается через векторы a_2, \dots, a_k .

2) Пусть один из векторов a_1, a_2, \dots, a_k линейно выражается через остальные. Например,

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_k a_k \\ \Rightarrow -a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \dots + \alpha_k a_k &= o. \end{aligned}$$

Коэффициент при a_1 равен -1 , то есть отличен от нуля. Следовательно, векторы a_1, a_2, \dots, a_k – линейно зависимы.

Лемма доказана.

Замечание. В некоторой литературе формулировку леммы 2.1 берут в качестве определения линейно зависимых векторов.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Рассмотрим матрицы

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ – линейно независимы, так как

$$\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \mathbf{E}_3 + \alpha_4 \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix},$$

и, следовательно, если $\alpha_1 \mathbf{E}_1 + \alpha_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_3 \mathbf{E}_3 + \alpha_4 \mathbf{E}_4 = \mathbf{O}$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ откуда}$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \alpha_4 = 0.$$

Пример 2. Рассмотрим многочлены $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = (1+x)^2$. Так как

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2,$$

то $g_4(x)$ является линейной комбинацией $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$:

$$g_4(x) = g_1(x) + 2g_2(x) + g_3(x).$$

Согласно лемме 2.1 многочлены $g_1(x)$, $g_2(x)$, $g_3(x)$, $g_4(x)$ – линейно зависимы.

Пример 3. Рассмотрим последовательности $a_1 = (2, -3, 1)$, $a_2 = (3, -1, 5)$, $a_3 = (1, -4, 3)$. Пусть $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = o$. Тогда

$$\begin{aligned} & \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \\ & = (2\alpha_1, -3\alpha_1, \alpha_1) + (3\alpha_2, -\alpha_2, 5\alpha_2) + (\alpha_3, -4\alpha_3, 3\alpha_3) = \\ & = (2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3, -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3, \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3) = (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_1 - \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 5\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 будут линейно независимыми, если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ – единственное решение полученной системы, то есть если $r(\mathbf{A}) = n$, где \mathbf{A} – основная матрица системы, n – число неизвестных.

В данном случае $|\mathbf{A}| = 35 \neq 0$, то есть система имеет единственное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, следовательно, a_1, a_2, a_3 – линейно независимы.

4.3. Базис линейного пространства

Для свободных векторов понятие базиса детально изучалось в главе 3. Утверждения этого параграфа аналогичны утверждениям, доказанным в пункте 3.4.

Определение. Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется *базисом* этого линейного пространства.

Иначе говоря, векторы e_1, e_2, \dots, e_n линейного пространства образуют его базис, если выполняются следующие два условия:

- 1) e_1, e_2, \dots, e_n – линейно независимы;
- 2) e_1, e_2, \dots, e_n, a – линейно зависимы для любого вектора a этого линейного пространства.

Очевидно, что базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если e_1, e_2, \dots, e_n – базис, то для любого $\alpha \neq 0$ векторы $\alpha \cdot e_1, \alpha \cdot e_2, \dots, \alpha \cdot e_n$ также образуют базис.

Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. *Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.*

Если в линейном пространстве L существует базис из n векторов, то пространство называют *конечномерным*, а n называют *размерностью линейного пространства* (обозначают: $\dim L = n$).

Если в линейном пространстве L для любого натурального n можно найти линейно независимую систему, состоящую из n векторов, то пространство называют *бесконечномерным* (обозначают: $\dim L = \infty$).

Найдём базисы некоторых линейных пространств.

Пример 1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости имеет размерность $\dim V^{(2)} = 2$. Известно, что базисом векторов плоскости являются любые два неколлинеарных вектора этой плоскости (теорема 3.7, пункт 3.4, глава 3).

Пример 2. Линейное пространство $V^{(3)}$ свободных векторов пространства имеет размерность $\dim V^{(3)} = 3$. В этом линейном пространстве базисом являются любые три некопланарных вектора (теорема 3.7, пункт 3.4, глава 3).

Пример 3. Арифметическое линейное пространство \mathbb{R}^n также является конечномерным. Его размерность $\dim \mathbb{R}^n = n$. Базисом являются, например, векторы

$$e_1 = (1; 0; \dots, 0), \quad e_2 = (0; 1; \dots, 0), \quad \dots, \quad e_n = (0; 0; \dots, 1).$$

Будем называть этот базис *стандартным базисом* линейного пространства \mathbb{R}^n .

Легко проверить, что 1) эти векторы линейно независимы; 2) любой вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$.

Пример 4. Линейное пространство $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ матриц второго порядка с элементами из \mathbb{R} имеет размерность $\dim M(2 \times 2, \mathbb{R}) = 4$. Его базисом являются, например, матрицы

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Действительно, 1) E_1, E_2, E_3, E_4 – линейно независимы (показали ранее); 2) E_1, E_2, E_3, E_4, A – линейно зависимы для любой матрицы $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$, так как

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} E_1 + a_{12} E_2 + a_{21} E_3 + a_{22} E_4.$$

Базис E_1, E_2, E_3, E_4 в дальнейшем будем называть *стандартным базисом* линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$.

Пример 5. Обозначим через $\mathbb{R}^n[x]$ – линейное пространство многочленов, степень которых меньше n и имеющих коэффициенты из \mathbb{R} . Это линейное пространство имеет размерность $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$. Его базисом являются, например, многочлены

$$f_0(x) = 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \quad \dots, \quad f_{n-1}(x) = x^{n-1}.$$

Будем называть этот базис *стандартным базисом* линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$.

Пример 6. Линейное пространство $\mathbb{R}[x]$ многочленов с коэффициентами из \mathbb{R} является бесконечномерным: $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$. Для любого натурального n многочлены

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, \dots, f_{n-1}(x) = x^{n-1}$$

являются линейно независимыми.

Роль базиса характеризует следующая теорема.

Теорема 4.4 (о базисе). *Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.*

Доказательство.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно определению, e_1, e_2, \dots, e_n – линейно независимы, а e_1, e_2, \dots, e_n, a – линейно зависимы. Следовательно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \beta$, не все равные нулю одновременно и такие, что линейная комбинация

$$\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n + \beta \cdot a = 0.$$

Покажем, что $\beta \neq 0$.

Если $\beta = 0$, то $\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n = 0$, где коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ не все равны нулю одновременно. А это означает, что векторы e_1, e_2, \dots, e_n – линейно зависимые. Но по условию они образуют базис и, следовательно, линейно независимы. Получили противоречие.

Таким образом, $\beta \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} -\beta \cdot a &= \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n, \\ \Rightarrow a &= -\frac{\alpha_1}{\beta} \cdot e_1 - \frac{\alpha_2}{\beta} \cdot e_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\beta} \cdot e_n, \end{aligned}$$

то есть a линейно выражается через векторы e_1, e_2, \dots, e_n .

Докажем, что вектор a линейно выражается через базис единственным образом. Пусть

$$\begin{aligned} a &= \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n, \\ a &= \beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \dots + \beta_n \cdot e_n. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} a - a &= (\alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n) - (\beta_1 \cdot e_1 + \beta_2 \cdot e_2 + \dots + \beta_n \cdot e_n), \\ \Rightarrow 0 &= (\alpha_1 - \beta_1) \cdot e_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot e_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot e_n. \end{aligned}$$

Так как векторы e_1, e_2, \dots, e_n – линейно независимы, то $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, \dots , $\alpha_n - \beta_n = 0$. Откуда получаем, что $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, \dots , $\alpha_n = \beta_n$.

Теорема доказана.

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис, a – произвольный вектор. Тогда согласно теореме 4.4 о базисе, вектор a можно единственным образом представить в виде линейной комбинации базисных векторов:

$$a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n.$$

При этом коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называют **координатами** вектора a в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Матрица $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ имеет в стандартном базисе

$\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$ линейного пространства $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ координаты $1, -2, -3, 4$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (-3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{E}_1 - 2\mathbf{E}_2 - 3\mathbf{E}_3 + 4\mathbf{E}_4.$$

Теорема 4.5. 1) Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а вектор b имеет в том же базисе координаты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то вектор $a + b$ будет иметь в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$.

2) Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, то для любого числа $\lambda \in \mathbb{R}$ вектор λa будет иметь в том же базисе координаты $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$.

Доказательство.

По условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n$.

Тогда используя свойства из определения линейного пространства, получаем

$$a + b = (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = \\ = (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n,$$

$$\lambda a = \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \dots + \lambda\alpha_n e_n.$$

Теорема доказана.

4.4. Связь между координатами вектора в различных базисах

Координаты вектора определены в данном базисе единственным образом. Но в другом базисе вектор будет иметь другие координаты. Связь между координатами вектора в различных базисах дает следующая теорема.

Теорема 4.6. Пусть e_1, e_2, \dots, e_n и e'_1, e'_2, \dots, e'_n – два базиса линейного пространства L . При этом имеют место равенства:

$$\begin{aligned} e'_1 &= t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n, \\ e'_2 &= t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n, \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ e'_n &= t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Если вектор a имеет в базисе e_1, e_2, \dots, e_n координаты $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, а в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n – координаты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, то справедливо равенство

$$\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}, \text{ где}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Составленную таким образом матрицу \mathbf{T} называют *матрицей перехода* от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Доказательство.

По условию $a = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \dots + \beta_n e'_n$. Тогда раскладывая векторы e'_1, e'_2, \dots, e'_n по базису e_1, e_2, \dots, e_n , получим

$$a = \beta_1(t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n) + \beta_2(t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n) + \dots + \beta_n(t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n).$$

Раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} a &= (\beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \dots + \beta_n t_{1n})e_1 + \\ &+ (\beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \dots + \beta_n t_{2n})e_2 + \\ &\quad + \dots + \\ &+ (\beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \dots + \beta_n t_{nn})e_n. \end{aligned}$$

Но по условию $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, следовательно,

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \beta_1 t_{11} + \beta_2 t_{12} + \dots + \beta_n t_{1n}, \\ \alpha_2 &= \beta_1 t_{21} + \beta_2 t_{22} + \dots + \beta_n t_{2n}, \\ &\dots \\ \alpha_n &= \beta_1 t_{n1} + \beta_2 t_{n2} + \dots + \beta_n t_{nn},\end{aligned}$$

или в матричном виде $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$.

Теорема доказана.

Замечания. 1) Столбцы матрицы \mathbf{T} – это координаты векторов e'_1, e'_2, \dots, e'_n в базисе e_1, e_2, \dots, e_n . Но e'_1, e'_2, \dots, e'_n – это базис, то есть линейно независимая система. Таким образом, столбцы матрицы \mathbf{T} – линейно независимы. Тогда согласно критерию равенства нулю определителя (теорема 1.10, пункт 1.15, глава 1), $|\mathbf{T}| \neq 0$.

2) Найдём теперь матрицу перехода от базиса e'_1, e'_2, \dots, e'_n к базису e_1, e_2, \dots, e_n . Имеем $\mathbf{A} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{B}$. Тогда $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$, то есть $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A}$. Таким образом, если \mathbf{T} – это матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n , то \mathbf{T}^{-1} – это матрица перехода от базиса e'_1, e'_2, \dots, e'_n к базису e_1, e_2, \dots, e_n .

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Пример. Вектор x в стандартном базисе линейного пространства \mathbb{R}^2 имеет координаты 2, 3. Найти его координаты в базисе $c_1 = (4, 3)$, $c_2 = (5, 4)$.

Стандартный базис линейного пространства \mathbb{R}^2 образуют векторы $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$.

Найдём матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису c_1, c_2 :

$$\begin{aligned}c_1 &= 4e_1 + 3e_2 \\ c_2 &= 5e_1 + 4e_2\end{aligned} \Rightarrow \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Можно найти, что $\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Координатами вектора x в базисе c_1, c_2 будут -7 и 6 , то есть $x = -7c_1 + 6c_2$.

4.5. Подпространства линейного пространства

Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L .

Определение. Множество L_1 называют *подпространством линейного пространства L* , если оно образует линейное пространство относительно операций, определенных на L .

Рассмотрим примеры линейных подпространств.

Пример 1. Линейное пространство $V^{(2)}$ свободных векторов плоскости является подпространством линейного пространства $V^{(3)}$ свободных векторов пространства.

Пример 2. Линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов.

Для того чтобы показать, что множество является линейным подпространством некоторого линейного пространства, приходится показывать, что оно само является линейным пространством, то есть проверять, выполняются ли все восемь условий из определения линейного пространства. Следующая теорема позволяет значительно уменьшить количество проверяемых условий.

Теорема 4.7 (критерий подпространства). Пусть L – вещественное линейное пространство, L_1 – непустое подмножество L . Множество L_1 является подпространством линейного пространства L тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются условия:

- 1) $a - b \in L_1$;
- 2) $\alpha \cdot a \in L_1$.

Доказательство.

1) Если L_1 – подпространство линейного пространства L , то оно само является линейным пространством, следовательно, $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$.

2) Пусть $a - b \in L_1$ и $\alpha \cdot a \in L_1$ для любых $a, b \in L_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что L_1 является линейным пространством. Проверим, выполняются ли условия из определения линейного пространства.

Для этого надо показать, что а) $o \in L_1$ и б) для любого $b \in L_1$ элемент $-b \in L_1$. Остальные условия выполняются, так как они выполняются в L , а L_1 – подмножество L .

По условию теоремы для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$.

а) Пусть $a = b \in L_1$, тогда $b - b = o \in L_1$.

б) Пусть $a = o$. Так как $o \in L_1$, то $o - b = -b \in L_1$.

Кроме этого надо ещё показать, что при умножении элементов множества L_1 на число и их сложении результат этих действий будет также элементом множества L_1 .

По условию теоремы $\alpha \cdot a \in L_1$ для любого элемента $a \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $a + b \in L_1$ для любых элементов $a, b \in L_1$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Для любых элементов $a, b \in L_1$ $a - b \in L_1$. Так как $-b \in L_1$, то $a - (-b) = a + b \in L_1$.

Теорема доказана.

Рассмотрим, как применяется критерий подпространства на следующем примере.

Пример. Пусть M – множество решений системы линейных однородных уравнений с n неизвестными. Покажем, что это множество является вещественным линейным пространством.

Для этого покажем, что оно является подпространством \mathbb{R}^n . По свойству решений системы линейных однородных уравнений (теорема 2.6, пункт 2.5, глава 2) линейная комбинация решений также является решением этой системы. Следовательно, для любых решений $a, b \in M$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $a - b \in M$ и $\alpha \cdot a \in M$. Тогда согласно критерию подпространства, M – подпространство \mathbb{R}^n , то есть само является линейным пространством.

Заметим, что базисом этого линейного пространства является фундаментальная система решений. Действительно, согласно теореме о фундаментальной системе решений (теорема 2.7, пункт 2.6, глава 2), решения, входящие в неё, – линейно независимы, а любое другое решение является их линейной комбинацией. Таким образом, фундаментальная система решений является максимальной линейно независимой системой векторов, то есть базисом линейного пространства решений системы линейных однородных уравнений.

ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

5.1. Понятие линейного оператора

Пусть $L^{(n)}$ – линейное пространство размерности n , \mathbb{R} – множество действительных чисел.

Определение. Отображение f линейного пространства $L^{(n)}$ в $L^{(n)}$ (то есть в само себя) называется *линейным оператором* этого линейного пространства, если для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняются следующие два условия:

- 1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;
- 2) $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Замечание. Из второго условия определения линейного оператора и леммы 4.1 следует, что

$$f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = o.$$

Рассмотрим примеры линейных операторов.

Пример 1. Пусть $f(x) = o$ для любого $x \in L^{(n)}$ (o – нулевой элемент линейного пространства $L^{(n)}$). Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x + y) &= o = o + o = f(x) + f(y), \\ f(\alpha \cdot x) &= o = \alpha \cdot o = \alpha \cdot f(x), \end{aligned}$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют *нулевым оператором*, будем обозначать его O .

Пример 2. Пусть $f(x) = x$ для любого $x \in L^{(n)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x + y) &= x + y = f(x) + f(y), \\ f(\alpha \cdot x) &= \alpha \cdot x = \alpha \cdot f(x), \end{aligned}$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют *тождественным оператором*, будем обозначать его J .

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $V^{(3)}$ (свободных векторов в пространстве). Пусть k – некоторое действительное число, отличное от нуля, и пусть $f(x) = k \cdot x$ для любого $x \in V^{(3)}$. Тогда для любых $x, y \in L^{(n)}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = k \cdot (x + y) = k \cdot x + k \cdot y = f(x) + f(y),$$

$$f(\alpha \cdot x) = k \cdot (\alpha \cdot x) = \alpha \cdot (k \cdot x) = \alpha \cdot f(x),$$

то есть отображение f является линейным оператором. Этот оператор называют *оператором* подобия.

5.2. Матрица линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, e_1, e_2, \dots, e_n – некоторый базис этого пространства.

Тогда любой вектор линейного пространства $L^{(n)}$ линейно выражается через векторы e_1, e_2, \dots, e_n . Следовательно,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ &\dots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Из коэффициентов в разложении векторов $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ по базису e_1, e_2, \dots, e_n составим матрицу \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу называют *матрицей линейного оператора* в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Замечание. Отметим, что в столбце с номером i матрицы \mathbf{A} стоят координаты вектора $f(e_i)$ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Соотношение (5.1) можно записать в матричном виде:

$$(f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{A}. \tag{5.2}$$

Пример 1. Найдём матрицу нулевого оператора O произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

$$O(e_1) = O(e_2) = \dots = O(e_n) = o = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{O}.$$

Таким образом, нулевой оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет нулевую матрицу.

Пример 2. Найдём матрицу тождественного оператора J произвольного линейного пространства $L^{(n)}$ в некотором базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

$$J(e_1) = e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$J(e_2) = e_2 = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n,$$

$$\dots,$$

$$J(e_n) = e_n = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 1 \cdot e_n$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}.$$

Таким образом, тождественный оператор любого линейного пространства в любом базисе имеет единичную матрицу.

Пример 3. Рассмотрим линейное пространство $\mathbb{R}^n[x]$ (пространство многочленов, степень которых меньше n). Пусть f – оператор дифференцирования. Найдём матрицу линейного оператора f в стандартном базисе $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

$$f(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$

$$f(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$

$$f(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$

$$f(x^3) = (x^3)' = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1},$$

...

$$f(x^{n-1}) = (x^{n-1})' = (n-1)x^{n-2} =$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + (n-1) \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, для каждого линейного оператора можно построить матрицу этого оператора в данном базисе. Оказывается, справедливо и обратное: любой матрице порядка n соответствует линейный оператор n -мерного линейного пространства, более того это соответствие взаимно однозначное.

Теорема 5.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов n -мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка n .*

5.3. Связь между координатами вектора и координатами его образа

Определение. Если f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, то вектор $f(x)$ называют **образом** вектора $x \in L^{(n)}$.

Пусть f – линейный оператор линейного пространства $L^{(n)}$, \mathbf{A} – матрица этого оператора в некотором базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Если $x \in L^{(n)}$, то $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$, где x_1, x_2, \dots, x_n – координаты вектора x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Найдем координаты y_1, y_2, \dots, y_n вектора $y = f(x)$ в этом же базисе. Обозначим через

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow f(x) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{Y} \end{aligned} \tag{5.3}$$

С другой стороны, из определения линейного оператора следует, что

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \dots + x_n f(e_n) = \\ &= (f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)) \cdot \mathbf{X}. \end{aligned}$$

Но из равенства (5.2)

$$(f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{A}.$$

Следовательно,

$$f(x) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}. \quad (5.4)$$

Из равенств (5.3) и (5.4) получаем, что

$$f(x) = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{Y} = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{X},$$

откуда

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 5.2. Если \mathbf{A} – матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , x_1, x_2, \dots, x_n – координаты вектора x в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , y_1, y_2, \dots, y_n – координаты вектора $f(x)$ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , то имеет место следующее соотношение

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \quad \text{где} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим следующий пример.

Пример. Пусть линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем $f(x)$, если $x = 2e_1 - e_2$. Согласно теореме 5.2,

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow f(x) = 4e_1 + 5e_2.$$

5.4. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Матрица линейного оператора составляется из координат векторов, являющихся образами базисных векторов. Поэтому в разных базисах

линейный оператор может иметь разные матрицы. Найдём, как меняется матрица линейного оператора при переходе от одного базиса к другому.

Лемма 5.3. *Если для любого столбца*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

имеет место равенство $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$, где \mathbf{A} и \mathbf{B} – квадратные матрицы порядка n , то $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Доказательство.

Так как $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}$ для любого столбца \mathbf{X} , то пусть

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{n1} \end{pmatrix},$$

то есть $a_{11} = b_{11}$, $a_{21} = b_{21}$, ..., $a_{n1} = b_{n1}$.

Проводя аналогичные рассуждения для столбцов

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix},$$

получаем равенство остальных элементов матрицы \mathbf{A} соответствующим элементам матрицы \mathbf{B} .

Лемма доказана.

Теорема 5.4. Если \mathbf{A} – матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , то матрица \mathbf{B} этого линейного оператора в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n имеет вид:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T},$$

где \mathbf{T} – матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Доказательство.

Пусть x – произвольный вектор линейного пространства $L^{(n)}$. Обозначим через \mathbf{X} и \mathbf{Y} – столбцы координат векторов x и $f(x)$ соответственно в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , а через \mathbf{X}' и \mathbf{Y}' – столбцы координат этих векторов в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Тогда согласно теореме 4.6,

$$\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}', \quad \mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}',$$

и согласно теореме 5.2,

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}'.$$

Из $\mathbf{Y} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}'$ и $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$ получаем

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}.$$

Но $\mathbf{X} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'$, следовательно,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}',$$

откуда

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}' \Rightarrow \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Умножим полученное равенство на матрицу \mathbf{T}^{-1} слева:

$$\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}' \Rightarrow \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Таким образом, имеем равенства

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}' \quad \text{и} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'$$

$$\Rightarrow \mathbf{B} \cdot \mathbf{X}' = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{X}'.$$

Из последнего полученного равенства и леммы 5.3 получаем, что

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}.$$

Теорема доказана.

5.5. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. Ненулевой вектор $x \in L^{(n)}$ называется *собственным вектором* линейного оператора f , если существует такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $f(x) = \lambda_0 x$, при этом λ_0 называют *собственным значением* этого линейного оператора и говорят, что собственный вектор x *относится* к собственному значению λ_0 .

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 5.5. *Собственный вектор линейного оператора относится к единственному собственному значению.*

Доказательство.

Допустим, что собственный вектор x относится к собственным значениям λ_1 и λ_2 . Тогда $f(x) = \lambda_1 x$ и $f(x) = \lambda_2 x$, откуда $\lambda_1 x = \lambda_2 x$, то есть $(\lambda_1 - \lambda_2)x = o$.

Если $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, то $x = (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. Следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2$.

Теорема доказана.

Теорема 5.6. (свойство собственных векторов). *Если x_1, x_2, \dots, x_n – линейно независимые собственные векторы линейного оператора f , относящиеся к одному и тому же собственному значению λ , то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором, относящимся к этому же собственному значению.*

Доказательство.

Так как x_1, x_2, \dots, x_n – собственные векторы линейного оператора f , относящиеся к собственному значению λ , то

$$f(x_1) = \lambda x_1, \quad f(x_2) = \lambda x_2, \quad \dots, \quad f(x_n) = \lambda x_n.$$

Пусть $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$ – нетривиальная линейная комбинация векторов x_1, x_2, \dots, x_n , то есть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – числа, не все равные нулю одновременно. Тогда так как векторы x_1, x_2, \dots, x_n – линейно независимы, то $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n \neq o$, причём,

$$f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n) = \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) + \dots + \alpha_n \cdot f(x_n) =$$

$$= \alpha_1 \cdot \lambda \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot \lambda \cdot x_n = \lambda \cdot (\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n).$$

Следовательно, $\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n$ – собственный вектор, относящийся к собственному значению λ .

Теорема доказана.

Теорема 5.7. *Собственные векторы x_1 и x_2 линейного оператора f , относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.*

Доказательство.

Векторы x_1 и x_2 являются собственными векторами линейного оператора f . Тогда $f(x_1) = \lambda_1 x_1$, $f(x_2) = \lambda_2 x_2$, причём из условия теоремы $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Рассмотрим равенство

$$\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 = o. \quad (5.5)$$

Векторы x_1 и x_2 – линейно независимы, если это равенство возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Покажем, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Подействуем линейным оператором f на левую и правую часть равенства (5.5):

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) &= f(o) = o \Rightarrow \\ f(\alpha_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot x_2) &= \alpha_1 \cdot f(x_1) + \alpha_2 \cdot f(x_2) = \\ &= \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 = o \end{aligned} \quad (5.6)$$

1) Умножим равенство (5.5) на $-\lambda_2$ и прибавим к (5.6). Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot x_1 - \alpha_1 \cdot \lambda_2 \cdot x_1 &= o \Rightarrow \\ \alpha_1 \cdot (\lambda_1 \cdot x_1 - \lambda_2 \cdot x_1) &= \alpha_1 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot x_1 = o. \end{aligned}$$

По условию теоремы $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Если $\alpha_1 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_1 = \alpha_1^{-1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x_1 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_1 = 0$.

2) Умножим равенство (5.5) на $-\lambda_1$ и прибавим к (5.6). Тогда

$$\begin{aligned} \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot x_2 - \alpha_2 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 &= o \Rightarrow \\ \alpha_2 \cdot (\lambda_2 \cdot x_2 - \lambda_1 \cdot x_2) &= \alpha_2 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot x_2 = o. \end{aligned}$$

По условию теоремы $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$. Если $\alpha_2 \neq 0$, то из последнего равенства получаем $x_2 = \alpha_2^{-1} \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \cdot o = o$ (согласно лемме 4.1). Но x_2 – собственный вектор, то есть ненулевой. Таким образом, $\alpha_2 = 0$.

Теорема доказана.

Применяя метод математической индукции, по аналогии с доказательством теоремы 10.3. можно доказать более широкое утверждение.

Теорема 5.8. *Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

5.6. Характеристический многочлен линейного оператора

Пусть f – линейный оператор, \mathbf{A} – его матрица в некотором базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

Пусть λ – произвольное число, \mathbf{E} – единичная матрица порядка n . Рассмотрим матрицу $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, её определитель

$$\begin{aligned} |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заметим, что полученный определитель является многочленом степени n относительно λ .

Определение. Матрица $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$ называется *характеристической матрицей* линейного оператора f , а определитель $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$ – его *характеристическим многочленом*.

Теорема 5.9. *Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора.*

Доказательство.

Пусть \mathbf{A} – матрица линейного оператора f в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , \mathbf{B} – матрица этого линейного оператора в базисе e'_1, e'_2, \dots, e'_n , \mathbf{T} – матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису e'_1, e'_2, \dots, e'_n .

Надо доказать, что $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}|$.

По теореме 5.4 $\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$. Используя определение обратной матрицы и свойства линейных операций над матрицами, получаем

$$\begin{aligned} |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| &= |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\lambda \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = \\ &= |\lambda \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot \lambda \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}| \end{aligned}$$

Так как определитель произведения матриц равен произведению определителей каждого из сомножителей,

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1} \cdot (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| \cdot |\mathbf{T}|.$$

Но $\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{E}$, следовательно, $|\mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\mathbf{T}| = |\mathbf{E}| = 1$. Тогда

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}| = |\mathbf{T}^{-1}| \cdot |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| \cdot |\mathbf{T}| = |\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}|.$$

Теорема доказана.

Таким образом, характеристический многочлен линейного оператора определяется однозначно, независимо от того, в каком базисе была найдена его матрица.

Определение. Уравнение $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$ называют *характеристическим уравнением* линейного оператора f , а корни этого уравнения – *характеристическими корнями* линейного оператора f .

Теорема 5.10. 1) Любое собственное значение линейного оператора f является его характеристическим корнем.

2) Любой вещественный характеристический корень линейного оператора f является его собственным значением.

Замечание. Из теоремы 5.10 следует, что для нахождения всех собственных значений линейного оператора достаточно найти все вещественные корни уравнения $|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = 0$.

Покажем, как находят все собственные векторы и собственные значения линейного оператора, рассмотрев следующий пример.

Пример. Линейный оператор f в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для того чтобы найти собственные значения этого оператора, найдём его характеристические корни.

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -2 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\lambda - (-2)(-1) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -1$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f . Других собственных значений этот оператор не имеет.

1) Найдем все собственные векторы x , относящиеся к $\lambda_1 = 2$.

Пусть x_1, x_2 – координаты вектора x , а y_1, y_2 – координаты вектора $f(x)$ в базисе e_1, e_2 ,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда согласно теореме 8.1 $\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$. Но x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 2$, следовательно, $\mathbf{Y} = \lambda_1 \cdot \mathbf{X}$. Получаем

$$\lambda_1 \cdot \mathbf{X} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \Rightarrow (\lambda_1 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}.$$

Для нахождения всех собственных векторов, относящихся к $\lambda_1 = 2$, достаточно найти все решения полученной системы.

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$, то есть любое решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_1 = 2$, являются векторы $x = ke_1 + ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Отметим, что условие $k \neq 0$ необходимо в связи с тем, что согласно определению собственными векторами являются только ненулевые векторы.

2) Найдем все собственные векторы x , относящиеся к $\lambda_2 = -1$.

Аналогично предыдущему получаем

$$(\lambda_2 \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1-1 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Общим решением этой системы является $x_2 = -2x_1$. Тогда любое решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} k \\ -2k \end{pmatrix}, \text{ где } k \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, собственными векторами, относящимися к $\lambda_2 = -1$, являются векторы $x = ke_1 - 2ke_2$, где $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.

5.7. Диагонализируемость линейного оператора

Ранее уже было отмечено, что в различных базисах линейный оператор имеет различные матрицы.

Определение. Линейный оператор называется *диагонализируемым*, если существует базис, относительно которого его матрица является диагональной.

Оказывается, что не все линейные операторы являются диагонализируемыми.

Теорема 5.11 (критерий диагонализируемости линейного оператора). *Линейный оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в линейном пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.*

Доказательство.

1) Пусть f – диагонализируемый линейный оператор. Тогда существует базис e_1, e_2, \dots, e_n , относительно которого его матрица \mathbf{A} – диагональная:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Согласно определению матрицы линейного оператора, в первом столбце матрицы \mathbf{A} находятся координаты вектора $f(e_1)$ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , во втором – координаты вектора $f(e_2)$ и так далее. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(e_1) &= \lambda_1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n = \lambda_1 \cdot e_1, \\ f(e_2) &= 0 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_n = \lambda_2 \cdot e_2, \\ &\dots \\ f(e_n) &= 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + \lambda_n \cdot e_n = \lambda_n \cdot e_n, \end{aligned}$$

то есть e_1, e_2, \dots, e_n – собственные векторы линейного оператора f .

2) Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис, состоящий из собственных векторов линейного оператора f . Тогда из определения собственного вектора следует, что

$$f(e_1) = \lambda_1 \cdot e_1, \quad f(e_2) = \lambda_2 \cdot e_2, \quad \dots, \quad f(e_n) = \lambda_n \cdot e_n,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ – собственные значения линейного оператора f . Тогда в базисе e_1, e_2, \dots, e_n матрица линейного оператора f имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Эта матрица – диагональная, откуда следует, что f – диагонализуемый оператор.

Теорема доказана.

Замечание. С помощью теоремы 5.11 можно выяснить, является ли линейный оператор диагонализуемым.

Пример 1. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализуемым. Для этого найдём все собственные векторы этого линейного оператора. Если из них можно выбрать векторы, образующие базис линейного пространства $L^{(2)}$, то согласно критерию диагонализуемости линейного оператора (теорема 5.11), линейный оператор f – диагонализуемый, в противном случае – нет.

Найдём собственные значения линейного оператора f .

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) = 0.$$

Это уравнение имеет два корня $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$, которые и являются собственными значениями линейного оператора f .

Обозначим через x – собственный вектор, относящийся к $\lambda_1 = 1$, через y – собственный вектор, относящийся к $\lambda_2 = 3$. Согласно теореме 5.7, собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, – линейно независимы. Следовательно, x и y – линейно независимы. Линейное пространство $L^{(2)}$ имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$,

поэтому векторы x и y являются базисом этого пространства. Таким образом, линейный оператор f – диагонализируемый.

Найдём матрицу линейного оператора f в базисе x, y . Согласно определению матрицы линейного оператора, элементы первого столбца этой матрицы – это коэффициенты в разложении вектора $f(x)$ по базису x, y , а второго столбца – коэффициенты в разложении $f(y)$. Так как

$$\begin{aligned} f(x) &= \lambda_1 \cdot x = x = 1 \cdot x + 0 \cdot y, \\ f(y) &= \lambda_2 \cdot y = 3 \cdot y = 0 \cdot x + 3 \cdot y, \end{aligned}$$

матрица линейного оператора f в базисе x, y имеет вид:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Линейный оператор f линейного пространства $L^{(2)}$ в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, является ли он диагонализируемым.

Найдём собственные значения линейного оператора f .

$$|\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 1(-1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень $\lambda = 2$, который и является собственным значением линейного оператора f .

Найдём все собственные векторы линейного оператора f , то есть все собственные векторы, относящиеся к $\lambda = 2$.

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{X} = \mathbf{O} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ 1 & 2-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}.$$

Общим решением этой системы является $x_1 = x_2$. Фундаментальная система состоит из одного решения. Тогда все остальные решения линейно выражаются через это решение, то есть любые два собственных вектора линейного оператора f пропорциональны, откуда следует, что они линейно зависимы. Получаем, что в линейном пространстве $L^{(2)}$, которое имеет размерность $\dim L^{(2)} = 2$, не существует базиса из собственных векторов линейного оператора f . Согласно критерию диагонализируемости линейного оператора (теорема 5.11), линейный оператор f не является диагонализируемым.

ГЛАВА 6. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

6.1. Линия на плоскости

Линия и поверхность – это геометрические понятия, точное и достаточно общее определение которых дать затруднительно. В разных разделах математики их определяют по-разному.

Определение. В аналитической геометрии *линией на плоскости* называют совокупность всех точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ – произвольная функция двух аргументов.

Обычно ограничиваются рассмотрением случая, когда $F(x, y)$ – некоторый многочлен.

Определение. Линия на плоскости называется *алгебраической*, если $F(x, y)$ – многочлен степени n . При этом степень многочлена называют *порядком* линии.

Определив таким образом понятие линии, её геометрические свойства можно выяснять, изучая свойства соответствующего уравнения средствами алгебры.

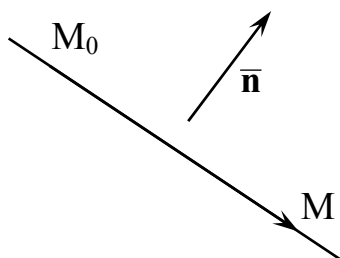
Простейшей из линий на плоскости является прямая. Перейдём к её изучению.

6.2. Различные формы записи уравнения прямой

Разным способам задания прямой соответствуют различные виды её уравнений. Рассмотрим некоторые из них.

1. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A, B\}$.

Определение. Вектор, перпендикулярный прямой, называют *нормальным вектором* или *нормалью* к этой прямой.



Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой.

Тогда вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой и имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0\}$.

Вектор \bar{n} перпендикулярен прямой, сле-

довательно, векторы $\overline{M_0M}$ и \bar{n} – ортогональны, откуда следует, что $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$, или, в координатной форме,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

Это и есть искомое уравнение. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки прямой и не удовлетворяют координаты других точек плоскости.

2. Уравнение прямой в общем виде.

Раскроем скобки в полученном уравнении прямой и приведем подобные слагаемые:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Обозначим число $-Ax_0 - By_0$ через C и получим **общее уравнение прямой на плоскости**:

$$Ax + By + C = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, является многочленом, степень которого равна 1. Таким образом, прямая на плоскости – это линия первого порядка.

Отметим, что в общем уравнении прямой коэффициенты A и B – это координаты вектора, перпендикулярного прямой.

3. Уравнение прямой в отрезках.

Пусть все коэффициенты A , B и C в общем уравнении прямой на плоскости отличны от нуля. Тогда его можно записать в виде

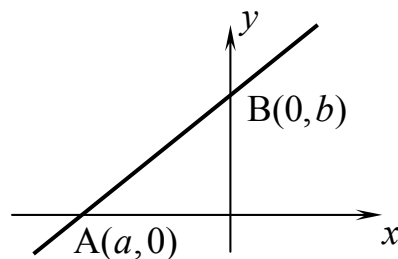
$$Ax + By = -C \Rightarrow \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Обозначим $-\frac{C}{A} = a$ и $-\frac{C}{B} = b$. Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Это уравнение называют **уравнением прямой в отрезках**.

Легко проверить, что прямая, имеющая такое уравнение, проходит через точки $A(a; 0)$ и $B(0; b)$. Следовательно, с геометрической точки зрения a и b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.



Уравнение прямой в отрезках удобно использовать при построении прямой.

4. Параметрические уравнения прямой.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{m; n\}$.

Определение. Вектор, параллельный прямой, называют *направляющим вектором* этой прямой.

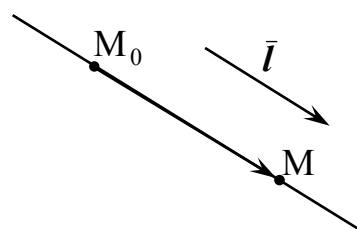
Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой и имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0\}$.

Рассмотрим векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{l} . Они коллинеарны. Следовательно, существует такое число t , что

$$\overline{M_0M} = t\vec{l},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \end{cases}.$$



Полученную систему уравнений называют *параметрическими уравнениями прямой на плоскости*. Придавая параметру t всевозможные числовые значения, получаем координаты всех точек, лежащих на данной прямой.

5. Каноническое уравнение прямой.

Если направляющий вектор \vec{l} не параллелен ни одной из координатных осей (то есть если $m \neq 0$ и $n \neq 0$), то из параметрических уравнений прямой можно выразить параметр t :

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}$$

и заменить систему одним уравнением вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Это уравнение называют *каноническим уравнением прямой на плоскости*.

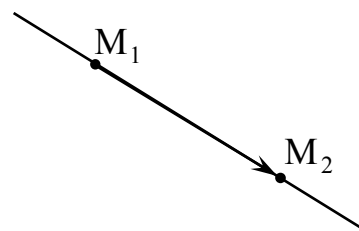
Отметим, что в данном уравнении x_0, y_0 – координаты некоторой точки прямой, m, n – координаты направляющего вектора прямой.

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Это уравнение является частным случаем канонического уравнения прямой.

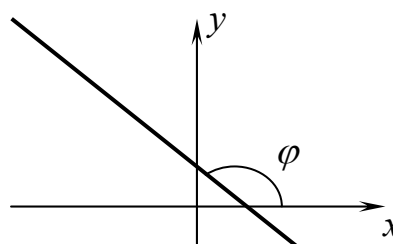
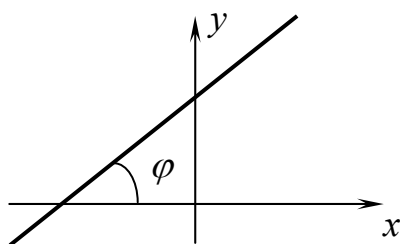
Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ является ее направляющим вектором, и каноническое уравнение этой прямой будет иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$



7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

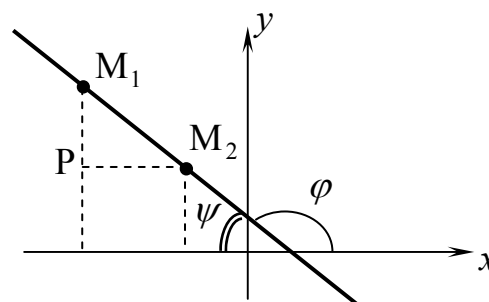
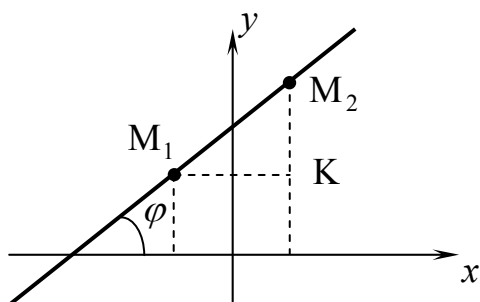
Пусть прямая не параллельна оси Ox , тогда она пересекается с ней. Угол φ , отсчитываемый от оси Ox к прямой против часовой стрелки,



называют *углом наклона прямой к оси Ox* . При этом число $k = \operatorname{tg} \varphi$ (если оно существует, то есть если прямая не параллельна оси Oy) называют *угловым коэффициентом прямой*.

Для прямой, параллельной оси Ox , угол наклона прямой к оси Ox считают равным нулю. Следовательно, угловой коэффициент такой прямой $k = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Пусть прямая не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ (где $x_1 < x_2$). Найдем угловой коэффициент этой прямой.



Если угол φ острый, то

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{|\overline{M_2K}|}{|\overline{M_1K}|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Если угол φ тупой, то

$$k = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\pi - \psi) = -\operatorname{tg} \psi = -\frac{|\overline{M_1P}|}{|\overline{M_2P}|} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Итак, в обоих случаях $k = \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Так как прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, её уравнением будет

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Тогда $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$, и так как $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$,

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1).$$

Это уравнение – **уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1)$ и имеющей угловой коэффициент k** .

Положим $b = y_1 - kx_1$, тогда уравнение принимает вид

$$y = kx + b.$$

Полученное уравнение называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

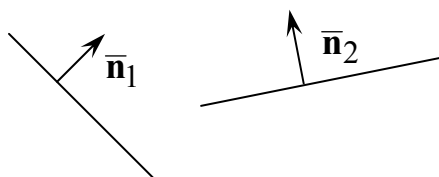
Легко убедиться, что с геометрической точки зрения b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy .

Замечание. Уравнение прямой с угловым коэффициентом было получено в предположении, что прямая не параллельна осям Ox и Oy . Но для прямой, параллельной Ox , тоже можно записать уравнение с угловым коэффициентом. Действительно, уравнение такой прямой можно записать в виде $y = b$ или $y = 0 \cdot x + b$, где $k = 0$ – угловой коэффициент прямой.

6.3. Взаимное расположение прямых на плоскости

Если на плоскости даны две различные прямые, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

1. Пусть прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ – нормальный вектор первой прямой, а $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ – нормальный вектор второй прямой.



Очевидно, что прямые параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны. Если же нормальные векторы не коллинеарны, то прямые пересекаются. Прямые перпендикулярны, если их нормальные векторы ортогональны. А для нахождения угла между прямыми достаточно найти угол между их нормальными векторами. Таким образом, верны следующие утверждения.

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ – коллинеарны, то есть когда один вектор линейно выражается через другой:

$$\bar{n}_1 = \alpha \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$ – ортогональны, то есть когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

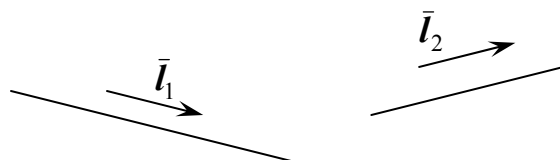
$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Найдём **угол между прямыми**. Пересекающиеся прямые образуют два смежных угла. Один из них φ – это угол между их нормальными векторами $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2\}$, а второй – это $(\pi - \varphi)$. Но $\cos(\pi - \varphi) = -\cos \varphi$, тогда

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} = \pm \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}},$$

где знак плюс берётся для нахождения острого угла между прямыми, а минус – для нахождения тупого угла.

2. Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2}$. Тогда вектор $\bar{l}_1 = \{m_1; n_1\}$ – это направляющий вектор первой прямой, а $\bar{l}_2 = \{m_2; n_2\}$ – направляющий вектор второй прямой.



Аналогично предыдущему получаем следующие утверждения.

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\bar{l}_1 = \{m_1; n_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2; n_2\}$ – коллинеарны, то есть когда один вектор линейно выражается через другой:

$$\bar{l}_1 = \alpha \bar{l}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\bar{l}_1 = \{m_1; n_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2; n_2\}$ – ортогональны, то есть когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\bar{l}_1, \bar{l}_2) = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Найдём **угол между прямыми**. Пересекающиеся прямые образуют два смежных угла, один из которых – это угол между направляющими векторами $\bar{l}_1 = \{m_1; n_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2; n_2\}$, следовательно,

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|\langle \bar{l}_1, \bar{l}_2 \rangle|}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}},$$

где знак плюс берётся для нахождения острого угла между прямыми, а минус – для нахождения тупого угла.

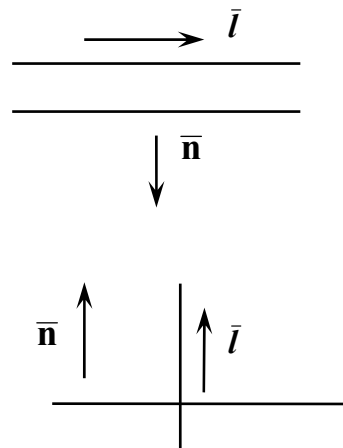
3. Рассмотрим случай, когда одна прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$, а вторая – каноническим $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$.

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда вектор $\bar{n} = \{A, B\}$ ортогонален вектору $\bar{l} = \{m; n\}$, то есть когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\bar{n}, \bar{l}) = 0 \Leftrightarrow Am + Bn = 0.$$

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы $\bar{n} = \{A, B\}$ и $\bar{l} = \{m; n\}$ – коллинеарны, то есть

$$\bar{n} = \alpha \bar{l} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n}.$$



4. Пусть обе прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ соответственно.

Чтобы получить критерии параллельности и перпендикулярности прямых, заданных уравнениями с угловым коэффициентом, запишем их уравнения в общем виде:

$$k_1x - y + b_1 = 0 \text{ и } k_2x - y + b_2 = 0.$$

Нормальными векторами для этих прямых будут $\bar{n}_1 = \{k_1, -1\}$ и $\bar{n}_2 = \{k_2, -1\}$.

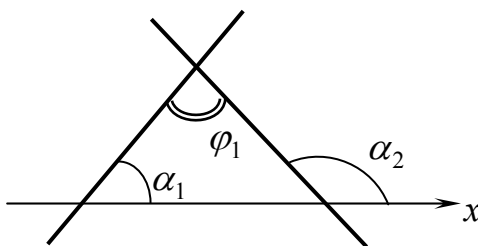
Прямые параллельны тогда и только тогда, когда векторы \bar{n}_1 и \bar{n}_2 являются коллинеарными, то есть $\frac{k_1}{k_2} = \frac{-1}{-1}$, откуда

$$k_1 = k_2.$$

Прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы \bar{n}_1 и \bar{n}_2 – ортогональны, то есть $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0$, откуда

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Найдём **угол между прямыми**. Острый угол между прямыми будет равен $\varphi_1 = |\alpha_2 - \alpha_1|$.



$$\text{Но тогда } \operatorname{tg} \varphi_1 = \left| \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) \right| = \left| \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1} \right| = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|.$$

Так как тупой угол между прямыми $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, то

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg}(\pi - \varphi_1) = -\operatorname{tg} \varphi_1 = -\left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|.$$

Таким образом, верна следующая формула

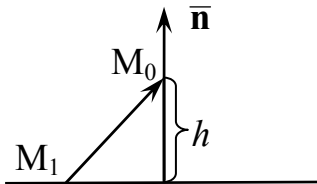
$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \pm \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|,$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Замечание. В случае получения параллельности двух прямых, необходимо дополнительно проверить, не совпадают ли они. Прямые совпадают, если общие уравнения этих прямых отличаются лишь числовым множителем, или если координаты произвольно взятой точки одной прямой удовлетворяют также уравнению второй прямой.

6.4. Расстояние от точки до прямой

Пусть прямая задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Найдём расстояние h от точки $M_0(x_0, y_0)$ до этой прямой.



Вектор $\bar{\mathbf{n}} = \{A, B\}$ является нормальным вектором к этой прямой. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – произвольная точка прямой, рассмотрим вектор $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1\}$. Тогда

$$h = \left| \operatorname{пр}_{\bar{\mathbf{n}}} \overline{M_1M_0} \right| = \frac{|\overline{M_1M_0}, \bar{\mathbf{n}}|}{|\bar{\mathbf{n}}|}.$$

Найдём $\overline{M_1M_0}, \bar{\mathbf{n}} = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1 = Ax_0 + By_0 + C - Ax_1 - By_1 - C = Ax_0 + By_0 + C - (Ax_1 + By_1 + C)$.

Но точка $M_1(x_1, y_1)$ лежит на прямой $Ax + By + C = 0$, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, то есть $Ax_1 + By_1 + C = 0$, откуда

$$\overline{M_1M_0}, \bar{\mathbf{n}} = Ax_0 + By_0 + C.$$

Так как $|\bar{\mathbf{n}}| = \sqrt{A^2 + B^2}$, получаем, что $h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

ГЛАВА 7. ПЛОСКОСТЬ

7.1. Поверхность в пространстве

Определение. В аналитической геометрии *поверхностью в пространстве* называют совокупность всех точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – произвольная функция трёх аргументов.

Также как и при изучении линий на плоскости, обычно рассматривают только тот случай, когда $F(x, y, z)$ – некоторый многочлен. Аналогично тому, как это делалось в главе 6 (пункт 6.1), вводятся следующие понятия.

Определение. Поверхность в пространстве называется *алгебраической*, если $F(x, y, z)$ – многочлен степени n . При этом степень многочлена называют *порядком* поверхности.

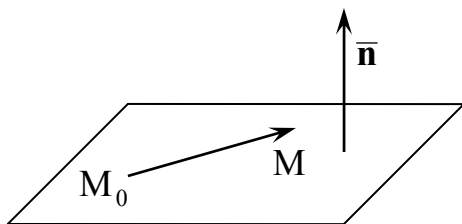
Рассмотрим простейшую алгебраическую поверхность – плоскость.

7.2. Различные формы записи уравнения плоскости.

Рассмотрим некоторые виды уравнения плоскости, которые соответствуют разным способам задания плоскости.

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\bar{n} = \{A, B, C\}$.

Определение. Вектор, перпендикулярный плоскости, называют *нормальным вектором* или *нормалью* к этой плоскости.



Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ лежит на плоскости и имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Вектор \bar{n} перпендикулярен плоскости, следовательно, векторы $\overline{M_0M}$ и \bar{n} – ортогональны. Тогда $(\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0$, или, в координатной форме,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Это и есть искомое уравнение.

2. Уравнение плоскости в общем виде.

Раскроем скобки в полученном уравнении плоскости и приведем подобные слагаемые:

$$Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0.$$

Обозначим число $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D и получим **общее уравнение плоскости**:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения, является многочленом, степень которого равна 1. Таким образом, плоскость – это поверхность первого порядка.

Отметим, что в общем уравнении плоскости коэффициенты A , B и C – это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

3. Уравнение плоскости в отрезках.

Пусть в общем уравнении плоскости все коэффициенты A , B , C и D отличны от нуля. Тогда его можно записать в виде

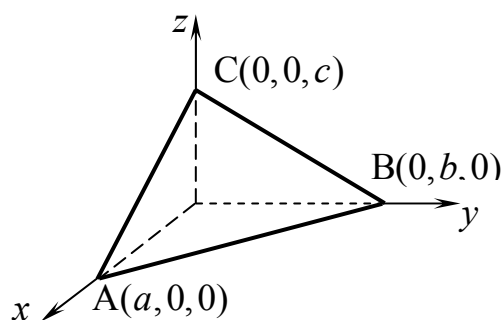
$$Ax + By + Cz = -D \Rightarrow \frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Обозначим $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$ и $-\frac{D}{C} = c$. Тогда уравнение плоскости примет вид:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Это уравнение называют **уравнением плоскости в отрезках**.

Легко проверить, что плоскость, имеющая такое уравнение, проходит через точки $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$ и $C(0; 0; c)$. Следовательно, с геометрической точки зрения a , b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно.

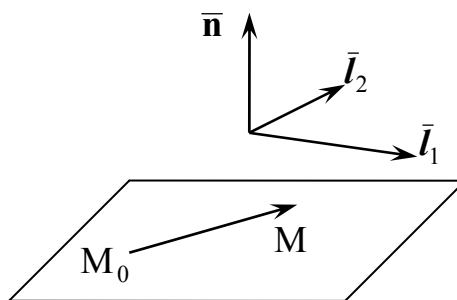


Уравнение в отрезках удобно использовать при построении плоскостей.

4. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\vec{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ лежит на плоскости и имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Так как векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 параллельны плоскости, их векторное произведение перпендикулярно плоскости, то есть вектор $\vec{n} = [\vec{l}_1, \vec{l}_2]$ является нормалью для этой плоскости. Тогда векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{n} – ортогональны, откуда $(\overline{M_0M}, \vec{n}) = 0$, то есть



$$(\overline{M_0M}, \vec{n}) = (\overline{M_0M}, [\vec{l}_1, \vec{l}_2]) = (\overline{M_0M}, \vec{l}_1, \vec{l}_2) = 0.$$

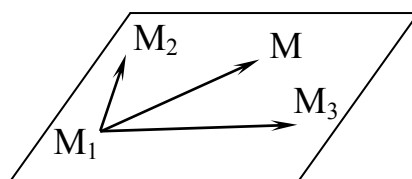
Записывая смешанное произведение векторов $\overline{M_0M}$, \vec{l}_1 и \vec{l}_2 через координаты, получаем искомое уравнение плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0.$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

Это уравнение является частным случаем предыдущего уравнения.

Действительно, пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Тогда векторы $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$ – неколлинеарные и параллельны плоскости. Согласно предыдущему пункту, уравнение этой плоскости будет иметь вид

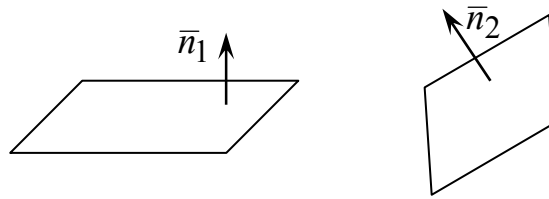


$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

7.3. Взаимное расположение плоскостей

Если в пространстве даны две различные плоскости, то они либо параллельны, либо пересекаются. Выясним, как по уравнениям плоскостей определить их взаимное расположение.

Пусть плоскости заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Тогда $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ – нормальный вектор первой плоскости, а $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальный вектор второй плоскости.



Очевидно, что плоскости параллельны, если их нормальные векторы коллинеарны. Если же нормальные векторы не коллинеарны, то плоскости пересекаются. Плоскости перпендикулярны, если их нормальные векторы ортогональны. А для нахождения угла между плоскостями, достаточно найти угол между их нормальными векторами. Таким образом, верны следующие утверждения.

Плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – коллинеарны, то есть когда один вектор линейно выражается через второй:

$$\bar{n}_1 = \alpha \bar{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – ортогональны, то есть когда скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Найдём **угол между плоскостями**. Пересекающиеся плоскости образуют два смежных двугранных угла, один из которых – это угол между нормальными векторами $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, следовательно,

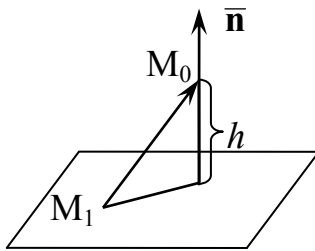
$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|(\vec{n}_1, \vec{n}_2)|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где знак плюс берётся для нахождения острого угла между плоскостями, а минус – для нахождения тупого угла.

Замечание. В случае получения параллельности двух плоскостей, необходимо дополнительно проверить, не совпадают ли они. Плоскости совпадают, если уравнения этих плоскостей отличаются лишь числовым множителем, или если координаты произвольно взятой точки одной плоскости удовлетворяют также уравнению второй плоскости.

7.4. Расстояние от точки до плоскости

Пусть плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Найдём расстояние h от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости.



Вектор $\vec{n} = \{A, B, C\}$ является нормальным вектором к этой плоскости. Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости, рассмотрим вектор $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1\}$. Тогда

$$h = |\text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_1M_0}| = \frac{|(\overline{M_1M_0}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}.$$

Найдём

$$\begin{aligned} (\overline{M_1M_0}, \vec{n}) &= (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1 = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - Ax_1 - By_1 - Cz_1 - D = \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D). \end{aligned}$$

Но точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, следовательно, её координаты удовлетворяют уравнению этой прямой, то есть $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, откуда

$$(\overline{M_1M_0}, \vec{n}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

Так как $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, получаем, что

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

7.5. Исследование общего уравнения плоскости

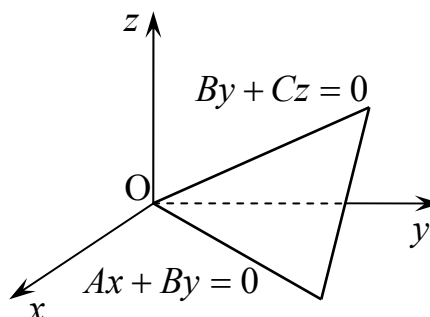
Проведем исследование общего уравнения плоскости, то есть выясним, что можно сказать о плоскости по виду ее общего уравнения.

1. Пусть в уравнении плоскости коэффициенты A , B и C – ненулевые, а $D = 0$, то есть уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Эта плоскость проходит через начало координат – точку $O(0; 0; 0)$.

Для построения плоскости обычно находят прямые, по которым она пересекается с двумя координатными плоскостями, например, с плоскостями xOy и yOz . У точек, лежащих на координатной плоскости xOy , координата $z = 0$, а у точек, лежащих на координатной плоскости yOz , координата $x = 0$. Поэтому уравнение одной прямой имеет вид $Ax + By = 0$, а второй – $By + Cz = 0$. Заметим, что обе эти прямые проходят через начало координат.



2. Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A , B или C – нулевой, а $D \neq 0$, то есть уравнение имеет один из следующих видов:

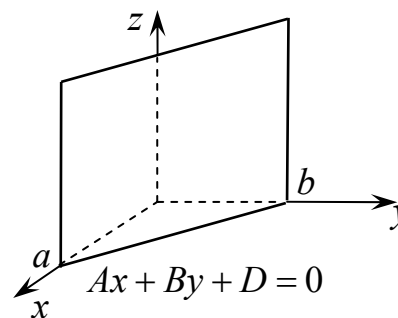
$$Ax + By + D = 0, \quad Ax + Cz + D = 0, \quad By + Cz + D = 0.$$

Рассмотрим уравнение $Ax + By + D = 0$. Если числа x и y удовлетворяют этому уравнению, то для любого числа z точка с координатами (x, y, z) лежит на этой плоскости, то есть плоскость содержит прямую, параллельную оси Oz , откуда следует, что она параллельна оси Oz .

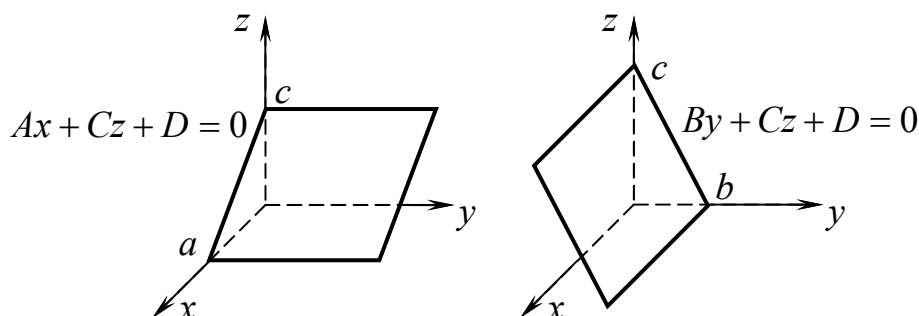
Запишем уравнение $Ax + By + D = 0$ в виде $Ax + By = -D$, откуда

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где $-D/A = a$, $-D/B = b$. Следовательно, плоскость $Ax + By + D = 0$ отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно.



Аналогичным образом получаем, что плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси Oy и отсекает на осях Ox и Oz отрезки $a = -D/A$ и $c = -D/C$ соответственно, а плоскость $Bu + Cz + D = 0$ параллельна оси Ox и отсекает на осях Oy и Oz отрезки $b = -D/B$ и $c = -D/C$.



Итак, *плоскость, в уравнении которой отсутствует слагаемое с одной из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.*

3. Пусть в общем уравнении плоскости два из трех коэффициентов A , B или C – нулевые, а $D \neq 0$, то есть уравнение имеет один из следующих видов:

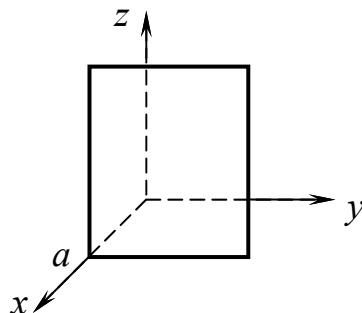
$$Ax + D = 0, \quad By + D = 0, \quad Cz + D = 0.$$

Рассмотрим уравнение $Ax + D = 0$. В нём отсутствуют слагаемые с переменными y и z , поэтому плоскость параллельна координатным осям Oy и Oz , то есть и координатной плоскости yOz .

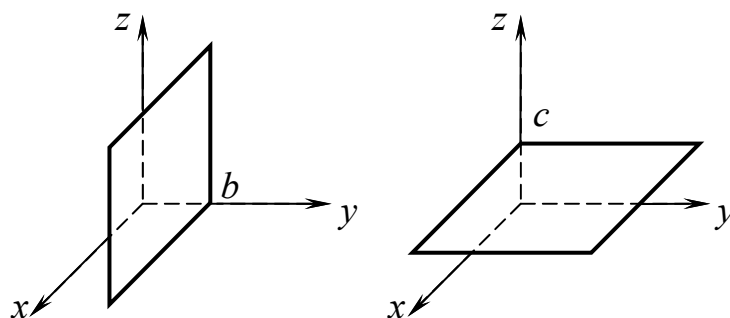
Запишем уравнение $Ax + D = 0$ в виде $Ax = -D$, откуда

$$\frac{x}{-D/A} = 1 \quad \text{или} \quad \frac{x}{a} = 1,$$

где $-D/A = a$. Следовательно, плоскость $Ax + D = 0$ отсекает на оси Ox отрезок a .



Аналогичным образом получаем, что плоскость $Bu + D = 0$ параллельна координатной плоскости xOz и отсекает на оси Oy отрезок $b = -D/B$, а плоскость $Cz + D = 0$ параллельна плоскости xOy и отсекает на оси Oz отрезок $c = -D/C$.



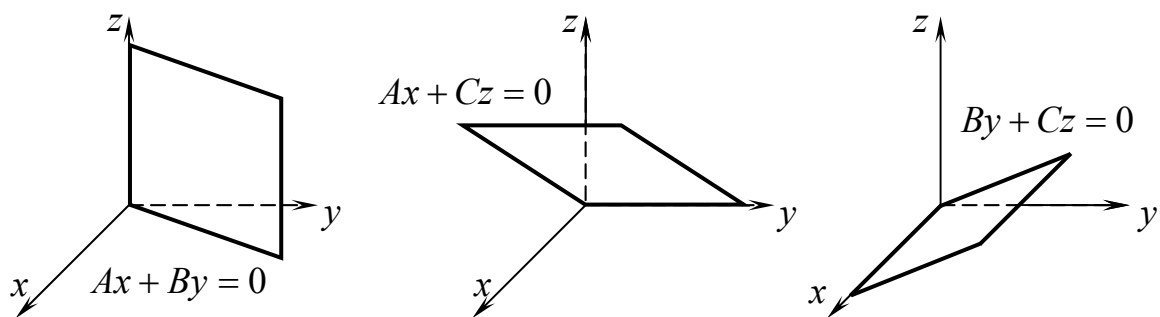
Итак, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.*

4. Пусть в общем уравнении плоскости коэффициент $D = 0$ и один из коэффициентов A , B или C также нулевой, то есть уравнение имеет один из следующих видов:

$$Ax + By = 0, \quad Ax + Cz = 0, \quad By + Cz = 0.$$

Рассмотрим уравнение $Ax + By = 0$. Ему удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на оси Oz , следовательно, эта плоскость проходит через ось Oz .

Аналогично получаем, что плоскость $Ax + Cz = 0$ проходит через ось Oy , а плоскость $By + Cz = 0$ проходит через ось Ox .



5) Пусть в общем уравнении плоскости три коэффициента равны нулю, то есть уравнение имеет один из следующих видов:

$$Ax = 0, \quad By = 0, \quad Cz = 0,$$

откуда получаем

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

то есть уравнения координатных плоскостей yOz , xOz , xOy соответственно.

ГЛАВА 8. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

8.1. Линия в пространстве

Определение. В аналитической геометрии *линией в пространстве* называют пересечение двух поверхностей.

Рассмотрим прямую в пространстве.

8.2. Различные формы записи уравнений прямой

1. Общие уравнения прямой.

Прямую в пространстве можно задавать как пересечение двух плоскостей. Пусть $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения непараллельных плоскостей. Тогда эти плоскости пересекаются по некоторой прямой. Координаты любой точки прямой удовлетворяют одновременно обоим уравнениям, то есть являются решениями системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Эту систему называют *общими уравнениями прямой в пространстве*.

Так как через любую прямую в пространстве проходит множество плоскостей, то любую прямую можно задать ее общими уравнениями и не единственным образом.

Недостатком задания прямой общими уравнениями является то, что по их виду ничего нельзя сказать о расположении прямой в пространстве. При решении задач удобнее использовать другие, более наглядные формы записи уравнений прямой.

2. Параметрические уравнения прямой.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\vec{l} = \{m, n, p\}$.

Также, как и для прямой на плоскости, вектор, параллельный прямой в пространстве, называют *направляющим вектором* этой прямой.

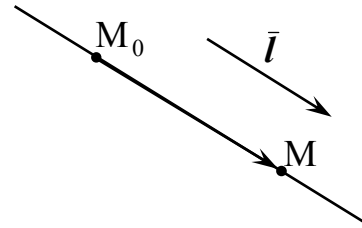
Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ лежит на прямой и имеет координаты $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$.

Рассмотрим векторы $\overline{M_0M}$ и \vec{l} . Они коллинеарны. Следовательно, существует такое число t , что

$$\overline{M_0M} = t\vec{l},$$

или, в координатной форме,

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \\ z - z_0 = t \cdot p \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \\ z = z_0 + t \cdot p \end{cases}.$$



Полученную систему уравнений называют **параметрическими уравнениями прямой в пространстве**. Придавая параметру t всевозможные числовые значения, получаем координаты всех точек, лежащих на данной прямой.

3. Канонические уравнения прямой.

Если направляющий вектор \vec{l} не параллелен ни одной из координатных осей (то есть если $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $p \neq 0$), то из параметрических уравнений прямой можно выразить параметр t :

$$t = \frac{x - x_0}{m}, \quad t = \frac{y - y_0}{n}, \quad t = \frac{z - z_0}{p}.$$

Получаем уравнения следующего вида:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

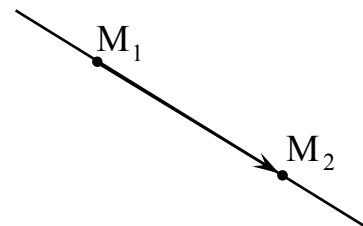
Эти уравнения называют **каноническими уравнениями прямой в пространстве**.

Отметим, что в данных уравнениях x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой точки прямой, m, n, p – координаты направляющего вектора прямой.

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Это уравнение является частным случаем канонического уравнения прямой.

Действительно, пусть прямая проходит через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Тогда вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ является ее направляющим вектором, и каноническое уравнение прямой имеет вид



нические уравнения этой прямой будут иметь вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

8.3. Переход от общих уравнений прямой к каноническим

Пусть прямая задана общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Чтобы записать канонические уравнения этой прямой, необходимо найти ее направляющий вектор \vec{l} и координаты какой-нибудь точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой.

Координаты точки M_0 найти легко – это одно из решений данной системы уравнений.

Найдём направляющий вектор \vec{l} . Прямая лежит в плоскостях $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, следовательно, она перпендикулярна нормальным векторам этих плоскостей, то есть векторам $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$. Тогда векторное произведение векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 будет параллельно прямой. Таким образом, в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение векторов \vec{n}_1 и \vec{n}_2 :

$$\vec{l} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2].$$

Пример. Записать канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z + 7 = 0, \\ x + 3y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$$

1) Найдём одно из решений системы. Так как нам не нужно все множество решений системы, то придадим переменной z конкретное значение. Например, полагаем $z = 0$. Тогда переменные x и y будут удовлетворять системе

$$\begin{cases} 2x - 3y + 7 = 0, \\ x + 3y - 1 = 0. \end{cases}$$

Решая систему по формулам Крамера, получаем:

$$x = -2, \quad y = 1.$$

Таким образом, $M_0(-2; 1; 0)$ – точка, лежащая на прямой.

2) Найдем направляющий вектор \bar{l} прямой. Имеем:

$$\bar{n}_1 = \{2; -3; 5\}, \quad \bar{n}_2 = \{1; 3; -4\};$$

$$[\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 13\mathbf{j} + 9\mathbf{k}.$$

Следовательно, в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\bar{l} = \{-3; 13; 9\}$.

Тогда канонические уравнения рассматриваемой прямой будут иметь вид:

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-1}{13} = \frac{z}{9}.$$

8.4. Взаимное расположение прямых.

Если в пространстве даны две различные прямые, то они либо параллельны, либо пересекаются, либо скрещиваются. Выясним, как по уравнениям прямых определить их взаимное расположение.

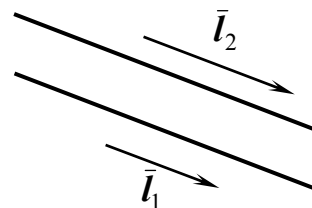
Пусть прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тогда векторы $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – направляющие векторы соответственно первой и второй прямых, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, лежащие соответственно на первой и второй прямых.

Прямые параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ коллинеарны, то есть когда один вектор линейно выражается через другой:

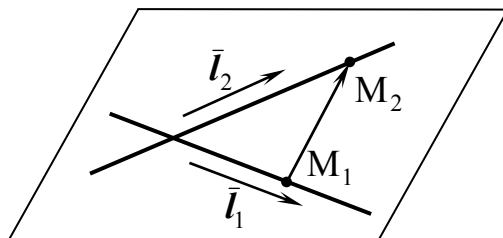
$$\bar{l}_1 = \alpha \bar{l}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$



Замечание. В случае получения параллельности двух прямых, необходимо дополнительно проверить, не совпадают ли они. Прямые совпадают, если координаты произвольно взятой точки одной прямой удовлетворяют также уравнениям второй прямой.

Найдём условие пересечения двух прямых в пространстве.

Рассмотрим две пересекающиеся прямые. Они лежат в одной плоскости.



Тогда векторы $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – компланарны, то есть

$$(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2) = 0,$$

или, в координатной форме,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.1)$$

Заметим, что для параллельных прямых векторы \bar{l}_1 , \bar{l}_2 и $\overline{M_1M_2}$ также будут компланарны, а для скрещивающихся – нет, то есть равенство (8.1) для параллельных прямых имеет место, а для скрещивающихся прямых – нет. Следовательно, получаем следующие утверждения.

Прямые пересекаются тогда и только тогда, когда они не параллельны и для них выполняется условие (8.1).

Прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда для них не выполняется условие (8.1).

Прямые лежат в одной плоскости, если они параллельны или пересекаются, то есть тогда и только тогда, когда для них выполняется условие (8.1).

Примеры.

1) Прямые

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x}{6} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-2}{9}$$

будут параллельны, так как их направляющие векторы $\vec{l}_1 = \{2, 4, 3\}$ и $\vec{l}_2 = \{6, 12, 9\}$ имеют пропорциональные координаты:

$$\frac{2}{6} = \frac{4}{12} = \frac{3}{9}.$$

2) Прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}$$

не являются параллельными (их направляющие векторы не коллинеарны) и для них выполняется условие (8.1):

$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-(-1) \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Следовательно, эти прямые пересекаются.

3) Прямые

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-1}.$$

скрещиваются, так как для них не выполняется условие (8.1):

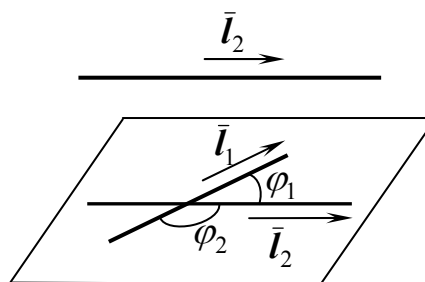
$$\begin{vmatrix} 1-0 & 5-3 & 2-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Найдём *угол между прямыми* в пространстве.

Напомним, что *углом между двумя скрещивающимися прямыми* называется угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.

Пусть даны две пересекающиеся или скрещивающиеся прямые:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$



Эти прямые образуют два смежных угла, один из которых – это угол между направляющими векторами прямых $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$, следовательно,

$$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{|\langle \bar{l}_1, \bar{l}_2 \rangle|}{|\bar{l}_1| \cdot |\bar{l}_2|} = \pm \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}},$$

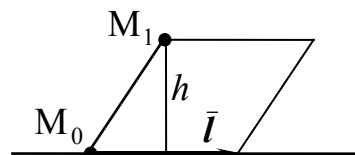
где знак плюс берётся для нахождения острого угла между прямыми, а минус – для нахождения тупого угла.

8.5. Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – точка, не принадлежащая этой прямой.

Тогда $\bar{l} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой, h – расстояние от точки M_1 до прямой.

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах \bar{l} и $\overline{M_0M_1}$.



Найдём площадь этого параллелограмма:

$$S = \frac{1}{2} h \cdot |\bar{l}| = \frac{1}{2} |\langle \bar{l}, \overline{M_0M_1} \rangle|, \quad \text{откуда} \quad h = \frac{|\langle \bar{l}, \overline{M_0M_1} \rangle|}{|\bar{l}|}.$$

8.6. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Напомним, что *расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра.

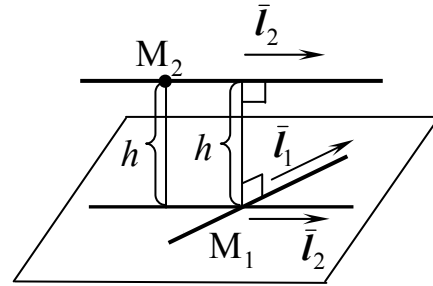
Пусть даны две скрещивающиеся прямые

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}.$$

Тогда $\bar{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\bar{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ – направляющие векторы первой и второй прямых, а $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ – точки, лежащие соответственно на первой и второй прямых.

Обозначим расстояние между этими прямыми через h .

Построим плоскость, проходящую через первую прямую параллельно второй прямой. Тогда h – это расстояние от второй прямой до плоскости. Но так как точка $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежит на второй прямой, то h – это расстояние от точки $M_2(x_2, y_2, z_2)$ до плоскости.



Расстояние от точки M_2 до плоскости находится по формуле

$$|\text{пр } \bar{n} \overline{M_1M_2}| = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{n})|}{|\bar{n}|},$$

где \bar{n} – нормальный вектор этой плоскости.

Найдём вектор \bar{n} . Построенная плоскость параллельна векторам \bar{l}_1 и \bar{l}_2 . Тогда вектор $[\bar{l}_1, \bar{l}_2]$ перпендикулярен данной плоскости, то есть является нормальным вектором. Следовательно, $\bar{n} = [\bar{l}_1, \bar{l}_2]$.

Получаем, что

$$h = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{n})|}{|\bar{n}|} = \frac{|(\overline{M_1M_2}, [\bar{l}_1, \bar{l}_2])|}{|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|} = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2)|}{|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|}.$$

Пример. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{4}.$$

Направляющими векторами этих прямых являются $\bar{l}_1 = \{1, 2, 2\}$ и $\bar{l}_2 = \{1, 3, 4\}$. Точки, лежащие соответственно на первой и второй прямых, – это $M_1(1, 0, 1)$ и $M_2(3, 1, 2)$. Тогда

$$\overline{M_1M_2} = \{2, 1, 1\}, \quad [\bar{l}_1, \bar{l}_2] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2i - 2j + k \Rightarrow$$

$$|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3,$$

$$(\overline{M_1M_2}, [\bar{l}_1, \bar{l}_2]) = 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 = 3.$$

Получаем, что $h = 3 / 3 = 1$.

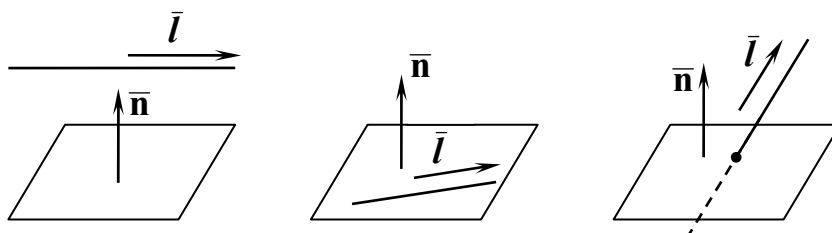
8.7. Взаимное расположение прямой и плоскости

Пусть в пространстве заданы плоскость и прямая. Возможны следующие случаи:

- 1) они параллельны;
- 2) прямая лежит в плоскости;
- 3) прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

Выясним, как зная уравнения плоскости и прямой, определить их взаимное расположение.

Пусть дана плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Тогда $\bar{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости, $\bar{l} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой.



Плоскость и прямая параллельны или **прямая лежит в плоскости** тогда и только тогда, когда векторы \bar{n} и \bar{l} – ортогональны, то есть

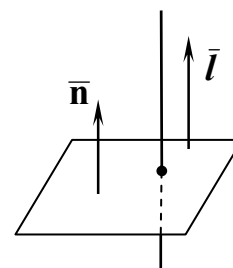
$$(\bar{n}, \bar{l}) = 0, \text{ или в координатной форме } Am + Bn + Cp = 0.$$

Если же это условие не выполняется, то **прямая и плоскость пересекаются в одной точке**.

Замечание. Укажем условие, которое позволит различать случай параллельности прямой и плоскости и случай принадлежности прямой плоскости. Прямая лежит в плоскости, если координаты произвольно взятой точки прямой удовлетворяют также уравнению плоскости.

Частным случаем пересечения прямой и плоскости в одной точке является перпендикулярность прямой плоскости. **Прямая перпендикулярна плоскости** тогда и только тогда, когда векторы \bar{n} и \bar{l} коллинеарны, то есть

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$



В заключение этого пункта получим формулу для нахождения угла между прямой и плоскостью.

Определение. Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Прямая и её проекция на плоскость образуют два смежных угла. Найдём *острый угол между прямой и плоскостью*.

Пусть φ – угол между прямой и плоскостью, ψ – угол между векторами $\bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{l}}$. Тогда

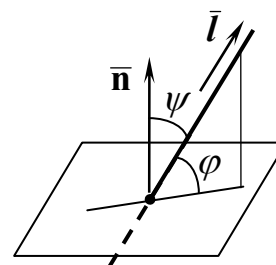
$$\cos \psi = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{l}})|}{|\bar{\mathbf{n}}| \cdot |\bar{\mathbf{l}}|},$$

где знак плюс берётся, если ψ – острый угол, а минус – если тупой.

Если векторы $\bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{l}}$ выбраны так, что угол ψ – острый, то

$$\psi = 90^\circ - \varphi,$$

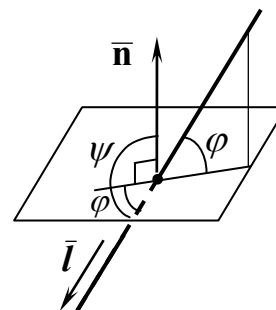
и
$$\cos \psi = \sin \varphi = \frac{|(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{l}})|}{|\bar{\mathbf{n}}| \cdot |\bar{\mathbf{l}}|}.$$



Если векторы $\bar{\mathbf{n}}$ и $\bar{\mathbf{l}}$ выбраны так, что угол ψ – тупой, то

$$\psi = 90^\circ + \varphi,$$

и
$$\cos \psi = -\sin \varphi = -\frac{|(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{l}})|}{|\bar{\mathbf{n}}| \cdot |\bar{\mathbf{l}}|}.$$



Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{|(\bar{\mathbf{n}}, \bar{\mathbf{l}})|}{|\bar{\mathbf{n}}| \cdot |\bar{\mathbf{l}}|}.$$

ГЛАВА 9. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.1. Классификация кривых второго порядка

Напомним, что кривой второго порядка называется совокупность всех точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

где $F(x, y)$ – многочлен второй степени.

Кривые второго порядка делятся на два класса: *вырожденные* и *невырожденные*.

Вырожденные кривые второго порядка – это прямые и точки, которые задаются уравнением второй степени. К вырожденным кривым второго порядка относят также мнимую кривую – случай, когда уравнению второй степени не удовлетворяет ни одна точка плоскости.

Рассмотрим возможные случаи отдельно.

1. Пустое множество. Например, уравнению $x^2 + y^2 + 4 = 0$ не удовлетворяет ни одна точка плоскости.

2. Точка. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости одну точку – начало координат.

3. Прямая. Например, уравнение $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ можно записать в виде $(x - y)^2 = 0$, то есть оно определяет на плоскости прямую $y = x$.

4. Пара параллельных прямых. Например, уравнение $x^2 - 4 = 0$ равносильно уравнению $(x - 2)(x + 2) = 0$, оно задаёт две параллельные прямые $x = 2$ и $x = -2$.

5. Пара пересекающихся прямых. Например, уравнение $x^2 - y^2 = 0$ определяет две пересекающиеся прямые $y = x$ и $y = -x$.

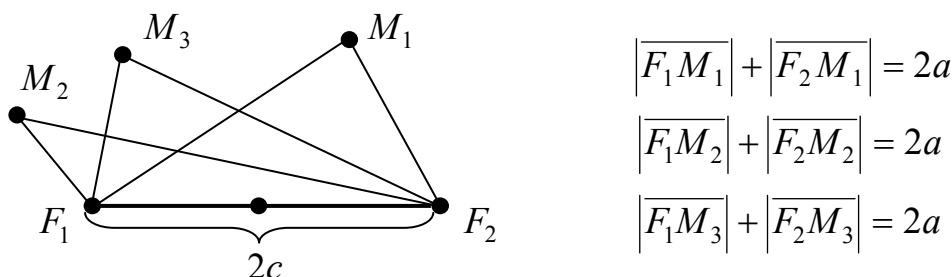
Невырожденными кривыми второго порядка являются *эллипс*, *окружность*, *гипербола* и *парабола*. Убедимся в этом, получив их уравнения.

9.2. Эллипс и окружность

Определение. *Эллипсом* называется совокупность всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости есть постоянное число.

Обозначим фиксированные точки F_1 и F_2 . Эти точки называют **фокусами** эллипса, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** эллипса.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов – $2a$. Заметим, что $2a > 2c$, то есть $a > c$.

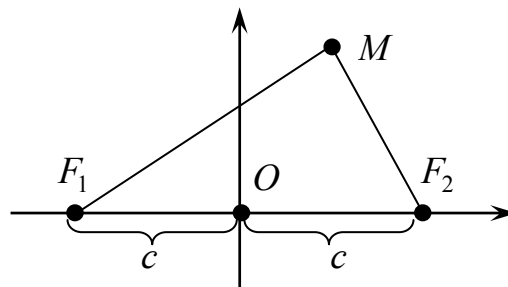


Получим уравнение эллипса. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат.

В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c; 0) \text{ и } F_2(c; 0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.



Пусть $M(x; y)$ – текущая точка эллипса. По определению эллипса

$$\begin{aligned} |F_1M| + |F_2M| &= 2a, \\ \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a. \end{aligned}$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2, \\ \Rightarrow (x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Приведа подобные слагаемые, получим:

$$4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} & \left(a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = (a^2 - xc)^2, \\ \Rightarrow & a^2 \cdot ((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x \cdot c + x^2 \cdot c^2, \\ & \Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2, \\ \Rightarrow & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2. \end{aligned}$$

Так как $a > c$, то $a^2 - c^2 > 0$. Следовательно, $a^2 - c^2 = b^2$ для некоторого числа b , и последнее равенство примет вид:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на b^2a^2 и окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением эллипса**. Система координат, в которой эллипс имеет такое уравнение, называется его **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что эллипс является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид эллипса. Для этого проведем исследование его канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что эллипс лежит внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Действительно, так как $\frac{x^2}{a^2} \geq 0$, $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ и $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} \leq 1, \quad \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \\ \Rightarrow & x^2 \leq a^2, \quad y^2 \leq b^2, \\ \Rightarrow & |x| \leq a, \quad |y| \leq b. \end{aligned}$$

2) Эллипс имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x; y)$ – точка эллипса, то кроме равенства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, на эллипсе лежат точки $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$, $M_3(-x; -y)$, которые симметричны точке $M(x; y)$ относительно оси Ox , Oy и начала координат соответственно.

3) Из уравнения эллипса получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Следовательно, верхняя половина эллипса – график функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, нижняя – график функции $y = -\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

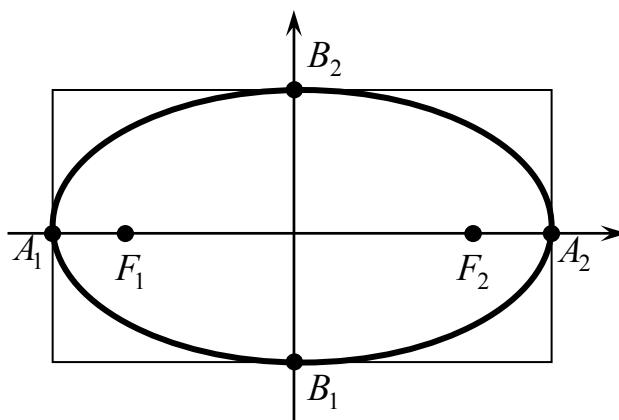
Исследуем поведение функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ методами, разработанными в математическом анализе.

а) $D(y) = [-a; a]$, $y(\pm a) = 0$.

б) $y' = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right)$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (-a; 0)$ ($y' > 0$), убывает – при $x \in (0; a)$ ($y' < 0$), имеет экстремум в точке $x = 0$ (максимум, $y(0) = b$).

в) $y'' = -\frac{ab}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} < 0$. Следовательно, график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим эллипс в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим его в нижней.



Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются **вершинами** эллипса. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются **большой (фокальной) осью**, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – **малой осью**. Величины a и b называются **боль-**

шой и *малой полуосью* соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется **фокусным расстоянием**.

Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1 , MF_2 и их длины r_1 , r_2 называются **фокальными радиусами точки M** .

Замечание. Прямая A_1A_2 , отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2 , MF_1 , MF_2 .

Определение Величина ε , равная отношению фокусного расстояния эллипса к его большой оси, то есть

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

называется **эксцентриситетом эллипса**.

Так как $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$, то $0 < \varepsilon < 1$. Величина ε характеризует форму эллипса.

Действительно,

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

Следовательно, **чем больше ε** , тем меньше отношение $\frac{b}{a}$, то есть **тем больше вытянут эллипс вдоль действительной оси**.

Кроме того, зная эксцентриситет эллипса легко найти фокальные радиусы точки $M(x; y)$:

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon x.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-c-x)^2 + (0-y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(a^2 - b^2) + 2cx + x^2 + \left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 - b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} = \\ &= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается вторая формула.

Замечания.

1. Пусть в уравнении эллипса $a = b = r$. Для этой кривой

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0,$$
$$\Rightarrow F_1 = F_2 = O, \quad \varepsilon = \frac{c}{a} = 0.$$

Геометрически это означает, что точки такой кривой равноудалены (на расстояние r) от ее центра O , то есть кривая является **окружностью**. Каноническое уравнение окружности принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

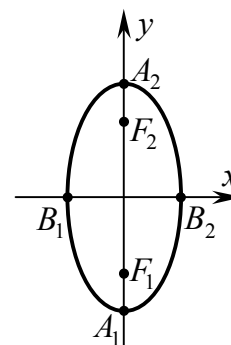
где r – расстояние от любой точки окружности до ее центра; r называют **радиусом окружности**.

2. Выводя уравнение эллипса, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. Если же выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от начала координат, но лежали на оси Oy , то уравнение эллипса будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Для этого эллипса большая ось – ось Oy , малая ось – ось Ox , фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$), фокальные радиусы точки $M(x; y)$ находятся по формулам

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon y, \quad r_2 = |MF_2| = a - \varepsilon y.$$



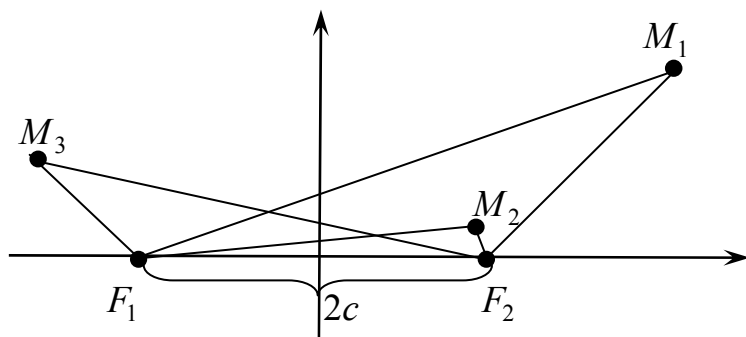
9.3. Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется совокупность всех точек плоскости, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек плоскости есть постоянное число, причём меньшее расстояния между фиксированными точками.

Обозначим фиксированные точки F_1 и F_2 . Эти точки называют **фокусами** гиперболы, а середину отрезка F_1F_2 – **центром** гиперболы.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а модуль разности расстояний от точек гиперболы до фокусов – $2a$. Согласно определению гиперболы $2a < 2c$, то есть $a < c$.

Получим уравнение гиперболы. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат.



$$\left| |F_1M_1| - |F_2M_1| \right| = 2a$$

$$\left| |F_1M_2| - |F_2M_2| \right| = 2a$$

$$\left| |F_1M_3| - |F_2M_3| \right| = 2a$$

В такой системе координат точки F_1 и F_2 будут иметь координаты:

$$F_1(-c; 0) \text{ и } F_2(c; 0),$$

где $|OF_1| = |OF_2| = c$.

Пусть $M(x; y)$ – текущая точка гиперболы. По определению гиперболы

$$\begin{aligned} & \left| |F_1M| - |F_2M| \right| = 2a, \\ \Rightarrow & \left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a, \\ \Rightarrow & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a, \end{aligned}$$

Избавимся от квадратных корней:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ \Rightarrow & \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2, \\ \Rightarrow & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые, получим:

$$\pm 4a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4xc - 4a^2.$$

Снова возведем обе части в квадрат и приведем подобные слагаемые:

$$\begin{aligned} & \left(\pm a \cdot \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right)^2 = (xc - a^2)^2, \\ \Rightarrow & a^2 \cdot ((x-c)^2 + y^2) = a^4 - 2a^2x \cdot c + x^2 \cdot c^2, \\ \Rightarrow & c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4, \\ \Rightarrow & (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2. \end{aligned}$$

Так как $a < c$, то $c^2 - a^2 > 0$. Следовательно, $c^2 - a^2 = b^2$ для некоторого числа b , и последнее равенство примет вид:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = b^2 a^2.$$

Разделим обе части этого равенства на $b^2 a^2$ и окончательно получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением гиперболы**. Система координат, в которой гипербола имеет такое уравнение, называется ее **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что гипербола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид гиперболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего заметим, что точек гиперболы нет в полосе, ограниченной прямыми $x = \pm a$.

Действительно, так как $\frac{x^2}{a^2} \geq 0$, $\frac{y^2}{b^2} \geq 0$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, то $\frac{x^2}{a^2} \geq 1$,

$$\Rightarrow x^2 \geq a^2,$$

$$\Rightarrow |x| \geq a.$$

2) Гипербола имеет центр симметрии (начало координат) и две оси симметрии (оси Ox и Oy).

Действительно, если $M(x; y)$ – точка гиперболы, то кроме равенства $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, на гиперболе лежат точки $M_1(-x; y)$, $M_2(x; -y)$, $M_3(-x; -y)$, которые симметричны точке $M(x; y)$ относительно оси Ox , Oy и начала координат соответственно.

3) Из уравнения гиперболы получаем:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Следовательно, верхняя половина гиперболы – график функции $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, нижняя – график функции $y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

Исследуем поведение функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ методами, разработанными в математическом анализе.

а) $D(y) = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$, $y(\pm a) = 0$.

б) Линия $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ имеет наклонные асимптоты¹ $y = \pm \frac{b}{a}x$.

Действительно,

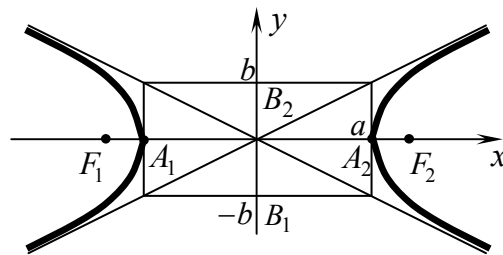
$$k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{b}{a}|x|}{x} = \pm \frac{b}{a},$$

$$b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{a} [\sqrt{x^2 - a^2} \mp x] = \frac{b}{a} \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} \pm x} = 0.$$

в) $y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$. Следовательно, функция возрастает при $x \in (a; +\infty)$ ($y' > 0$), убывает – при $x \in (-\infty; -a)$ ($y' < 0$). Экстремумов функция не имеет (критические точки $x = 0 \notin D(y)$ и $x = \pm a$ – граничные).

в) $y'' = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}} < 0 \Rightarrow$ график функции всюду выпуклый.

На основании полученных данных построим гиперболу в верхней полуплоскости, а затем симметрично достроим ее в нижней.



¹ Напомним, что прямая ℓ называется асимптотой кривой, если расстояние от точки M кривой до прямой ℓ стремится к нулю при удалении точки M от начала координат. Различают два вида асимптот – вертикальные и наклонные. Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ имеет в тех точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$, в которых хотя бы один из односторонних пределов функции равен бесконечности. Наклонные асимптоты кривой $y = f(x)$ имеют уравнение $y = k_{1,2}x + b_{1,2}$, где $k_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$, $b_{1,2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - k_{1,2}x]$.

Точки A_1, A_2 называются *вершинами гиперболы*. Отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ называются *действительной (фокальной) осью*, отрезок B_1B_2 и его длина $2b$ – *мнимой осью*. Величины a и b называются *действительной* и *мнимой полуосью* соответственно. Длина отрезка F_1F_2 (равная $2c$) называется *фокусным расстоянием*.

Если M – произвольная точка эллипса, то отрезки MF_1, MF_2 и их длины r_1, r_2 называются *фокальными радиусами точки M* .

Замечание. Прямая A_1A_2 , отрезок A_1A_2 и его длина $2a$ носят одно название. О чем идет речь – всегда ясно из контекста. То же самое касается B_1B_2, MF_1, MF_2 .

Определение. Величина ε , равная отношению фокусного расстояния гиперболы к ее действительной оси, то есть

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a},$$

называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Так как $c = \sqrt{a^2 + b^2} > a$, то $\varepsilon > 1$. Величина ε характеризует форму гиперболы. Действительно,

$$\begin{aligned} \varepsilon = \frac{c}{a} &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \\ \Rightarrow \frac{b}{a} &= \sqrt{\varepsilon^2 - 1}. \end{aligned}$$

Следовательно, *чем больше ε* , тем больше отношение b/a , то есть *тем «шире» гипербола*.

Кроме того, зная эксцентриситет гиперболы, легко найти фокальные радиусы точки $M(x, y)$. Так, если точка M лежит на правой ветке гиперболы (то есть $x > 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon x, \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon x.$$

Если M лежит на левой ветке гиперболы (то есть $x < 0$), то

$$r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon x), \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon x).$$

Действительно, пусть $x > 0$. Тогда

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(-c - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{c^2 + 2cx + x^2 + y^2} = \\ &= \sqrt{(a^2 + b^2) + 2cx + x^2 + \left(\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2\right)} = \sqrt{a^2 + 2cx + \left(\frac{b^2}{a^2} + 1\right)x^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + (a^2 + b^2)x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^4 + 2ca^2x + c^2x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{(a^2 + cx)^2}{a^2}} = \\
&= \sqrt{\left(a + \frac{cx}{a}\right)^2} = \sqrt{(a + \varepsilon x)^2} = |a + \varepsilon x| = a + \varepsilon x.
\end{aligned}$$

Аналогично доказываются и оставшиеся формулы.

Замечания.

1. Если в уравнении гиперболы $a = b$, то гипербола называется **равнобочной**. Асимптоты равнобочной гиперболы, очевидно, перпендикулярны. Следовательно, можно выбрать систему координат так, чтобы координатные оси совпали с асимптотами. Тогда уравнение гиперболы будет иметь вид $xy = 0,5a^2$.

Это уравнение называют **уравнением равнобочной гиперболы, отнесенной к асимптотам**.

2) Выводя уравнение гиперболы, мы выбрали систему координат так, чтобы фокусы F_1 и F_2 лежали на оси Ox на одинаковом расстоянии от начала координат. Если выбрать систему координат так, чтобы фокусы были на одинаковом расстоянии от $O(0;0)$, но лежали на Oy , то уравнение гиперболы будет иметь вид

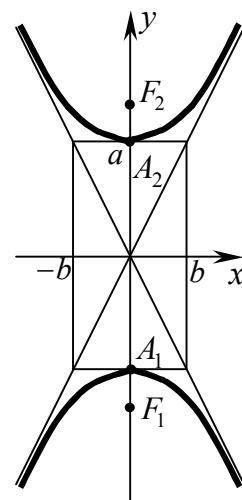
$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Для этой гиперболы действительная ось – ось Oy , мнимая ось – ось Ox , фокусы имеют координаты $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$ (где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$), асимптотами являются прямые $y = \pm \frac{a}{b}x$, фокальные радиусы точки

$M(x; y)$ находятся по формулам

$$r_1 = |MF_1| = a + \varepsilon y, \quad r_2 = |MF_2| = -a + \varepsilon y \quad (\text{при } y > 0)$$

и $r_1 = |MF_1| = -(a + \varepsilon y), \quad r_2 = |MF_2| = -(-a + \varepsilon y) \quad (\text{при } y < 0).$

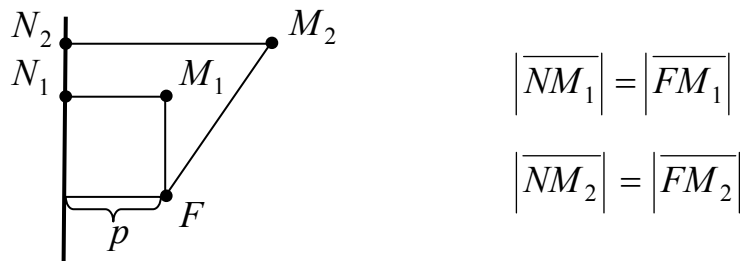


9.4. Парабола

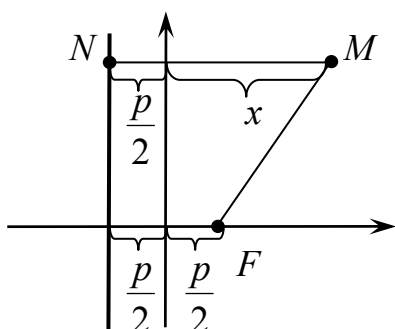
Определение. *Параболой называется совокупность всех точек плоскости, расстояние от которых до фиксированной прямой и до фиксированной точки, не лежащей на этой прямой, одинаково.*

Обозначим фиксированную точку F , эту точку называют **фокусом** параболы. Фиксированную прямую называют **директрисой** параболы.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p .



Получим уравнение параболы. Выберем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы директриса параболы была перпендикулярна оси Ox , фокус F лежал на положительной части Ox и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаковым.



В такой системе координат $F(\frac{p}{2}; 0)$.

Пусть $M(x; y)$ – текущая точка параболы. Тогда

$$\overline{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\}, \quad |\overline{NM}| = \frac{p}{2} + x.$$

По определению параболы $|\overline{NM}| = |\overline{FM}|$

$$\Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x$$

Избавимся от квадратного корня:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2,$$

$$\Rightarrow y^2 = 2px$$

Это уравнение называется **каноническим уравнением параболы**. Система координат, в которой парабола имеет такое уравнение, называется ее **канонической системой координат**.

Итак, мы убедились, что парабола является кривой второго порядка. Теперь выясним геометрический вид параболы. Для этого проведем исследование ее канонического уравнения.

1) Прежде всего, очевидно, что парабола лежит в полуплоскости $x \geq 0$ (т.к. $y^2 \geq 0$ и $p > 0$).

2) Парабола имеет ось симметрии (ось Ox).

Действительно, если $M(x; y)$ – точка параболы, то кроме равенства $y^2 = 2px$ будет справедливо также равенство

$$(-y)^2 = 2px.$$

Следовательно, на параболе лежит точка $M_1(x; -y)$, которая симметрична точке $M(x; y)$ относительно оси Ox .

Ось симметрии параболы называют **осью параболы**.

3) Из уравнения параболы получаем:

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Следовательно, верхняя половина параболы – график функции $y = \sqrt{2px}$, нижняя – график функции $y = -\sqrt{2px}$. В силу симметрии верхней и нижней половины достаточно провести исследование одной из этих функций.

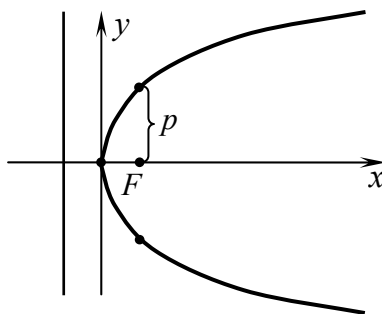
Исследуем поведение функции $y = \sqrt{2px}$ методами, разработанными в математическом анализе.

а) $D(y) = [0; +\infty)$, $y(0) = 0$.

б) $y' = \frac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}} > 0$. Следовательно, функция возрастает на всей области определения.

в) $y'' = -\frac{\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}} < 0$. Следовательно, график функции – выпуклый.

На основании полученных данных построим параболу в верхней полуплоскости, а затем достроим ее в нижней полуплоскости.



Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется **вершиной параболы**, число p называется **параметром параболы**. Если M – произвольная точка параболы, то отрезок MF и его длина называются **фокальными радиусами точки M** .

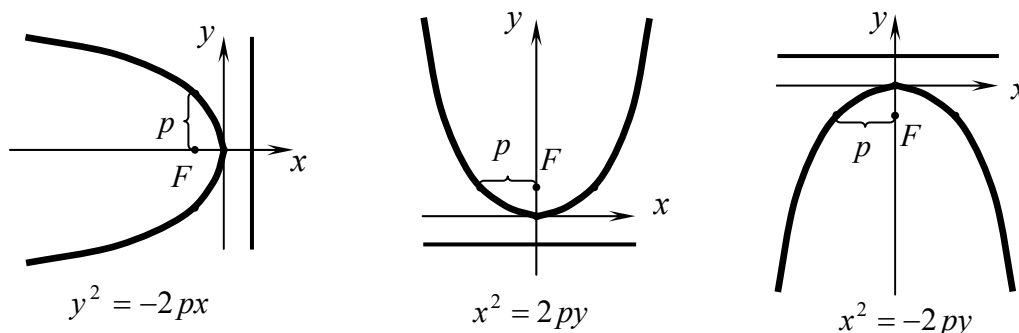
Замечание. Если при выводе уравнения параболы выбрать систему координат так, чтобы фокус F лежал на отрицательной части оси Ox , директриса была перпендикулярна оси Ox , и расстояние от начала координат до фокуса и до директрисы было одинаково, то получим для параболы уравнение

$$y^2 = -2px.$$

Если выбрать систему координат так, чтобы директриса была перпендикулярна оси Oy , фокус лежал на положительной (отрицательной) части оси Oy и начало координат было на одинаковом расстоянии от фокуса и от директрисы, то уравнение параболы будет иметь вид

$$x^2 = \pm 2py.$$

Полученные уравнения тоже называются **каноническими уравнениями параболы**, а соответствующие им системы координат – **каноническими системами координат**.



9.5. Общее уравнение кривой второго порядка

В общем случае уравнение кривой второго порядка записывается следующим образом:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Однако можно показать, что при повороте координатных осей на определённый угол слагаемое Bxy отсутствует, то есть уравнение принимает следующий вид:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Рассмотрим это уравнение. С помощью элементарных преобразований оно может быть приведено к следующему виду:

а) при $AC \neq 0$:
$$\frac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1;$$

б) при $AC = 0$: $(x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0)$ или $(y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0)$.

Полученные уравнения называют **каноническими уравнениями кривых со смещенным центром (вершиной)**, так как они определяют кривые, для которых канонической является система координат, смещённая в точку $C(x_0; y_0)$.

Замечание. Приводить уравнение к каноническому виду необходимо, если мы хотим построить кривую. Тип кривой можно определить и без канонического уравнения. А именно:

- 1) если $AC = 0$, то кривая является параболой, которая может вырождаться в пару параллельных прямых, в одну прямую или в пустое множество;
- 2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой, которая может вырождаться в пару пересекающихся прямых;
- 3) если $AC > 0$, то кривая является эллипсом (при $A = C$ окружностью), который может вырождаться в точку или пустое множество.

ГЛАВА 10. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

10.1. Классификация поверхностей второго порядка

Напомним, что кривой второго порядка называется совокупность всех точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ – многочлен второй степени.

Следовательно, в общем случае уравнение поверхности второго порядка имеет вид:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x + 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0.$$

Поверхности второго порядка делятся на два класса: *вырожденные* и *невырожденные*.

Вырожденные поверхности второго порядка – это плоскости и точки, которые задаются уравнением второй степени. К вырожденным поверхностям второго порядка относят также мнимую поверхность второго порядка – случай, когда уравнению второй степени не удовлетворяет ни одна точка пространства.

Рассмотрим возможные случаи отдельно.

1. Пустое множество. Например, уравнению $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не удовлетворяет ни одна точка пространства.

2. Точка. Например, уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает только одну точку $(0; 0; 0)$ – начало координат.

3. Плоскость. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 = 0$$

задает плоскость $x + y + z - 1 = 0$, так как

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 2x - 2y - 2z + 1 &= (x + y + z - 1)^2, \\ \Rightarrow (x + y + z - 1)^2 &= 0, \Rightarrow x + y + z - 1 = 0. \end{aligned}$$

4. Пара параллельных плоскостей. Например, уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 = 0$$

определяет пару параллельных плоскостей, так как

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz - 1 &= (x + y + z - 1)(x + y + z + 1), \\ \Rightarrow (x + y + z - 1)(x + y + z + 1) &= 0, \\ \Rightarrow x + y + z - 1 = 0 \text{ или } x + y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

5. Пара пересекающихся плоскостей. Например, уравнение

$$x^2 + 2xy + y^2 - z^2 = 0$$

определяет две пересекающиеся плоскости:

$$(x - y)^2 - z^2 = 0, \Rightarrow (x - y - z)(x - y + z) = 0, \\ \Rightarrow x - y - z = 0 \text{ или } x - y + z = 0.$$

Невырожденные поверхности второго порядка свои названия получили, в большинстве случаев, от названия кривых, которые получаются при их пересечении плоскостями. Выделяют следующие пять типов поверхностей: *эллипсоиды*, *гиперboloиды*, *параболоиды*, *конусы* и *цилиндры*.

Также как и для кривых второго порядка, наиболее простое уравнение поверхность второго порядка будет иметь в декартовой системе координат, которая привязана к осям симметрии поверхности. Такие системы координат называют *каноническими системами координат поверхности*.

10.2. Эллипсоид

Определение. *Эллипсоидом* называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой эллипсоид имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*, а само уравнение – *каноническим уравнением эллипсоида*.

Исследование канонического уравнения эллипсоида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Действительно, если $M(x; y; z)$ – точка эллипсоида, то кроме равенства $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ будут справедливы также равенства

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(-z)^2}{c^2} = 1,$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Следовательно, на эллипсоиде лежат точки $M_1(-x; -y; -z)$, $M_2(x; y; -z)$, $M_3(x; -y; z)$, $M_4(-x; y; z)$, которые симметричны точке $M(x; y; z)$ относительно начала координат и координатных плоскостей xOy , xOz , yOz соответственно.

Для дальнейшего определения формы эллипсоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| < a$ – эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
- б) при $h = \pm a$ – точку $A_{1,2}(\mp a; 0; 0)$;
- в) при $|h| > a$ – мнимую кривую.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| < b$ – эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
- б) при $h = \pm b$ – точку $B_{1,2}(0; \mp b; 0)$;
- в) при $|h| > b$ – мнимую кривую.

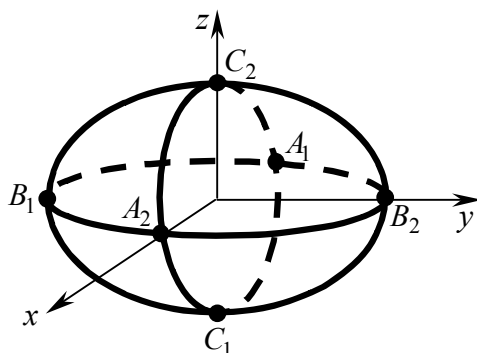
3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллипсоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| < c$ – эллипс (чем больше $|h|$, тем меньше полуоси эллипса);
 б) при $h = \mp c$ – точку $C_{1,2}(0; 0; \mp c)$;
 в) при $|h| > c$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим эллипсоид.



Величины a , b и c называются **полуосями** эллипсоида. Если все они различны, то эллипсоид называется **трехосным**.

В случае, когда две из трех полуосей равны, эллипсоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения эллипса вокруг одной из своих осей. Например, если $a = b$, то эллипсоид получится в результате вращения лежащего в плоскости yOz эллипса $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг его оси Oz . При этом, если $a = b < c$, то эллипсоид называется **вытянутым**, а при $a = b > c$ – **сжатым**.

Эллипсоид, у которого все три полуоси равны, называют **сферой**. Каноническое уравнение сферы принято записывать в виде

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

где r – величина полуосей, которая называется **радиусом сферы**.

С геометрической точки зрения, **сфера** – это совокупность всех точек пространства, равноудаленных (на расстояние r) от некоторой фиксированной точки (называемой **центром**). В канонической системе координат центр сферы – это начало координат.

10.3. Гиперboloиды

Определение. **Однополостным гиперboloидом** называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперboloид имеет такое уравнение называется его **канонической системой координат**, а само уравнение – **каноническим уравнением однополостного гиперboloида**.

Вид канонического уравнения однополостного гиперboloида позволяет сделать вывод, что он имеет центр симметрии $O(0; 0; 0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Для дальнейшего определения формы однополостного гиперboloида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| < a$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oy ;
- б) при $h = \pm a$ – пару прямых;
- в) при $|h| > a$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz .

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении однополостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| < b$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Ox ;
- б) при $|h| > b$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz ;
- в) при $h = \pm b$ – пару прямых.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении однополостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

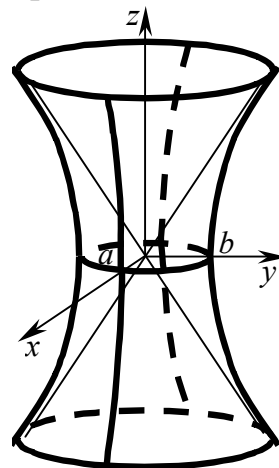
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет эллипс при любом h . При $h = 0$ полуоси эллипса будут наименьшими. Этот эллипс называют *горловым эллипсом* однополостного гиперboloида.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются *полуосями* гиперboloида.

В случае, когда $a = b$, однополостный гиперboloид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

также определяют однополостные гиперboloиды, но они «вытянуты» вдоль осей Oy и Ox соответственно.

Определение. *Двуполостным гиперboloидом* называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой однополостный гиперboloид имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*, а само уравнение – *каноническим уравнением двуполостного гиперboloида*.

По виду канонического уравнения двуполостного гиперboloида определяем, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Изучим сечения двуполостного гиперboloида плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Oz .

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 - \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение при любом h определяет гиперболу, действительная ось которой параллельна оси Oz .

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении двуполостного гиперboloида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

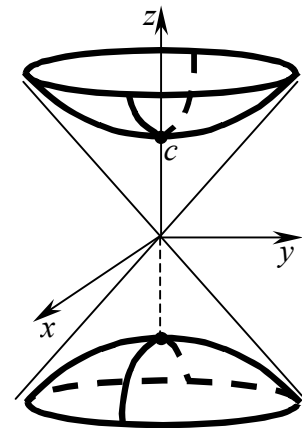
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 + \frac{h^2}{c^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| > c$ – эллипс (чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);
- б) при $h = \mp c$ – точку $C_{1,2}(0; 0; \mp c)$;
- в) при $|h| < c$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются **полуосями** двуполостного гиперboloида. В случае, когда $a = b$, двуполостный гиперboloид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения гиперболы $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ вокруг своей мнимой оси. В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

также определяют двуполостные гиперboloиды, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

10.4. Конус

Определение. *Конусом* называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

где a, b, c – положительные константы.

Система координат, в которой конус имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*, а само уравнение – *каноническим уравнением конуса*.

По виду канонического уравнения конуса определяем, что он имеет центр симметрии $O(0;0;0)$ и три плоскости симметрии xOy , xOz , yOz .

Изучим сечения конуса плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| \neq 0$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz ;
- б) при $h = 0$ – пару прямых.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $|h| \neq 0$ – гиперболу, действительная ось которой параллельна Oz ;
- б) при $h = 0$ – пару прямых.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении конуса этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}.$$

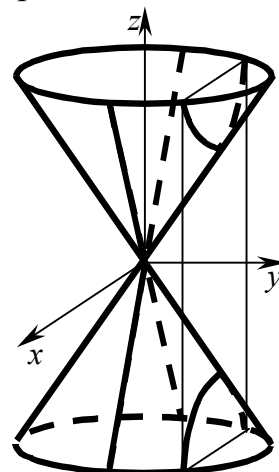
Это уравнение определяет:

- а) при $|h| \neq 0$ – эллипс (чем больше $|h|$, тем больше полуоси эллипса);
- б) при $h = 0$ – точку $O(0;0;0)$.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a , b и c называются *полуосями* конуса. Центр симметрии $O(0;0;0)$ называется *вершиной* конуса.

В случае, когда $a = b$, конус является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения прямой $z = \frac{c}{b}y$ (ее называют *образующей* конуса) вокруг оси Oz . В этом случае в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечание. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \quad \text{и} \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

тоже определяют конусы, но они «вытянуты» вдоль оси Oy и Ox соответственно.

10.5. Параболоиды

Определение. *Эллиптическим параболоидом* называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой эллиптический параболоид имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*, а уравнение – *каноническим уравнением эллиптического параболоида*.

По виду канонического уравнения эллиптического параболоида определяем, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz .

Для дальнейшего определения формы эллиптического параболоида изучим его сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

Это уравнение при любом h определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = b^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z - \frac{h^2}{b^2}.$$

При любом h оно определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении эллиптического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

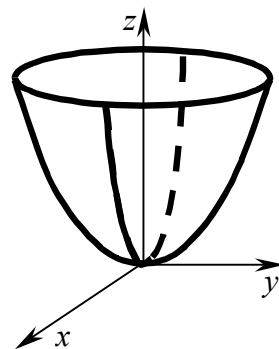
Это уравнение определяет:

- а) при $h > 0$ – эллипс (чем больше h , тем больше его полуоси);
- б) при $h = 0$ – точку $O(0; 0; 0)$;
- в) при $h < 0$ – мнимую кривую.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a и b называются **параметрами** параболоида. Точка $O(0; 0; 0)$ называется **вершиной** эллиптического параболоида.

В случае, когда $a = b$, эллиптический параболоид является поверхностью вращения. Он получается в результате вращения параболы $y^2 = 2b^2z$ вокруг оси Oz . В этом случае, в сечении поверхности плоскостями $z = h$ будут окружности.



Замечания.

1. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y$ и $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$ определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

3. Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому *эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой* (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви направлены в одну сторону).

Определение. *Гиперболическим параболоидом* называется совокупность всех точек пространства, координаты которых в некоторой декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z,$$

где a, b – положительные константы.

Система координат, в которой гиперболический параболоид имеет такое уравнение, называется его *канонической системой координат*, а само уравнение – *каноническим уравнением гиперболического параболоида*.

По виду канонического уравнения гиперболического параболоида определяем, что он имеет две плоскости симметрии xOz и yOz .

Исследуем сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными координатным плоскостям канонической системы координат.

1) Рассмотрим сечение плоскостью $x = h$. Координаты y и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2z - \frac{h^2}{a^2}.$$

При любом h это уравнение определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = b^2$, ветви направлены вниз. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вверх.

2) Рассмотрим сечение плоскостью $y = h$. Координаты x и z кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z + \frac{h^2}{b^2}.$$

Это уравнение) при любом h определяет параболу, ось которой параллельна оси Oz , параметр $p = a^2$, ветви направлены вверх. При $h \neq 0$ вершина параболы смещена вниз.

3) Рассмотрим сечение плоскостью $z = h$. Координаты x и y кривой, которая получается в сечении гиперболического параболоида этой плоскостью, удовлетворяют уравнению

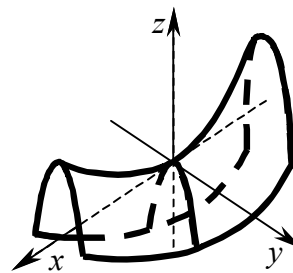
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2h.$$

Это уравнение определяет:

- а) при $h \neq 0$ – гиперболу (при $h > 0$ действительная ось гиперболы параллельна оси Ox , при $h < 0$ – оси Oy);
- б) при $h = 0$ – пару прямых.

На основании полученных данных построим поверхность.

Величины a и b называются **параметрами** гиперболического параболоида.



Замечания.

1. Уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -2z$ тоже определяет эллиптический параболоид, но «развернутый» вниз.

2. Уравнения $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2y$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 2x$

определяют эллиптические параболоиды, но с осями симметрии Oy и Ox соответственно.

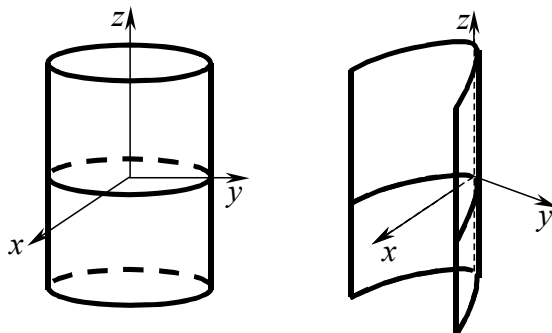
3. Все параболы, которые получаются в сечении плоскостью $x = h$, имеют один параметр. Следовательно, их можно получить одну из другой в результате параллельного переноса. Поэтому **эллиптический параболоид**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ **можно рассматривать как поверхность, которая получается при движении одной параболы вдоль другой** (вершина параболы скользит по параболе, оси подвижной и неподвижной параболы параллельны, ветви подвижной параболы направлены вниз, неподвижной – вверх).

10.6. Цилиндры

Определение. *Цилиндрической поверхностью (цилиндром)* называется поверхность, которую описывает прямая (называемая *образующей*), перемещающаяся параллельно самой себе вдоль некоторой кривой (называемой *направляющей*).

Цилиндры называют по виду направляющей: *круговые, эллиптические, параболические, гиперболические*.



Пусть направляющая цилиндра лежит в плоскости xOy и имеет уравнение $F(x, y) = 0$, а образующая параллельна оси Oz . Заметим, что если точка $M_0(x_0; y_0)$ принадлежит направляющей, то $M(x_0; y_0; z)$ – принадлежит цилиндру при любом z . Следовательно, координаты точек цилиндра будут удовлетворять уравнению $F(x, y) = 0$.

Аналогично, если поместим направляющую в плоскость xOz (yOz) и возьмем образующую параллельно оси Oy (Ox), то уравнение цилиндра будет иметь вид $F(x, z) = 0$ ($F(y, z) = 0$), где $F(x, z) = 0$ ($F(y, z) = 0$) – уравнение направляющей в координатной плоскости.

Таким образом, получили, что **цилиндр в некоторой декартовой системе координат задается уравнением, в которое не входит одна из координат**. Кривая, которую определяет это уравнение в соответствующей координатной плоскости, является направляющей цилиндра; а образующая – параллельна оси отсутствующей координаты.

Рекомендуемая литература

1. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Попова Н.В, Хейнман В.Б. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1986. – 272 с.
2. Апатенок Р.Ф., Маркина А.М., Хейнман В.Б. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии. – Минск: Высшая школа, 1990. – 286 с.
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
4. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Физматлит, 2006. — 240 с.
5. Ильин В.А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. – М.: Физматлит, 2009. — 224 с.
6. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. – СПб.: Лань, 2006.
7. Ильин В.А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2007. – 280 с.
8. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч.2: Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2004. – 368 с
9. Сборник задач по алгебре / Под ред. А. И. Кострикина. – М.: Физико-математическая литература, 2001. – 464 с.
10. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре. – СПб.: Лань, 2005. – 416 с.
11. Фаддеев, Д. К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре. – СПб.: Лань, 2008. – 288 с.

Учебное издание

ШЕРСТНЁВА Анна Игоревна
ЯНУЩИК Ольга Владимировна
ПАХОМОВА Елена Григорьевна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие


Научный редактор *доктор физико-математических наук,*
профессор К.П. Арефьев
Редактор *А.И. Шерстнёва*
Компьютерная верстка *А.И. Шерстнёва*
Дизайн обложки

Подписано к печати . Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать XEROX. Усл.печ.л. 5,12. Уч.-изд.л. 4,63.
Заказ. Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО  ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru