Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Кривые и поверхности Второго порядка

Преподаватель – доцент кафедры ВМ ТПУ, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

Кривые второго порядка.

В аналитической геометрии ***линией на плоскости*** называют все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен степени n.

Степень многочлена n называют ***порядком*** линии

Кривые второго порядка – это все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – многочлен второй степени.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Кривые второго порядка.

вырожденные кривые

1. пустое множество
2. точка
3. прямая
4. пара параллельных или пересекающихся прямых

невырожденные кривые

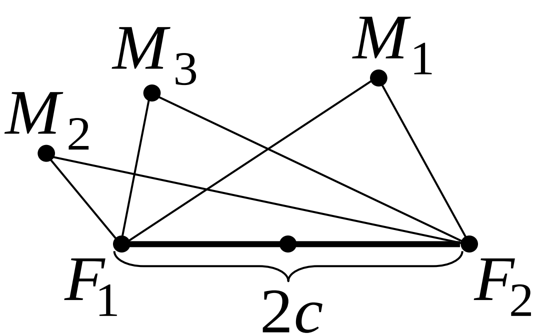
1. эллипс
2. гипербола
3. парабола

Определение. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек есть постоянное число.

Обозначим фиксированные точки F_1 и F_2.

Эти точки называют ***фокусами*** эллипса, а середину отрезка F_1F_2 – ***центром*** эллипса.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от точек эллипса до фокусов – $2a$.



$$\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c$$

$$\left|\overline{F_1M_1}\right| + \left|\overline{F_2M_1}\right| = 2a$$

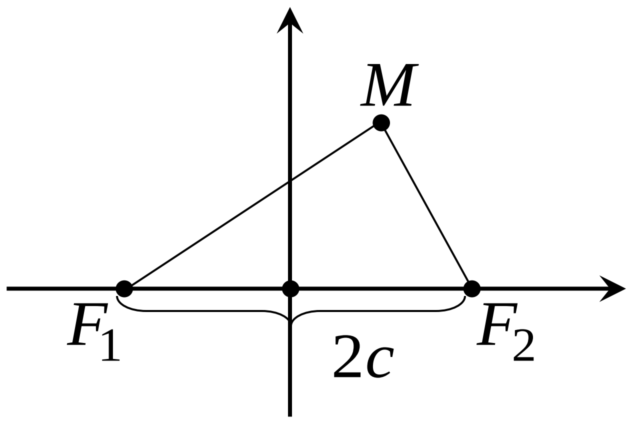
$$\left|\overline{F_1M_2}\right| + \left|\overline{F_2M_2}\right| = 2a$$

$$\left|\overline{F_1M_3}\right| + \left|\overline{F_2M_3}\right| = 2a$$

$$2a > 2c \;\Rightarrow\; \boxed{a > c}$$

Получим уравнение эллипса.

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ox симметрично относительно начала координат.



Найдём координаты фокусов:

$$\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c \;\Rightarrow\; F_1(-c, 0) \text{ и } F_2(c, 0)$$

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка эллипса.

$$\overline{F_1M} = \{x+c,\, y\} \;\Rightarrow\; \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\overline{F_2M} = \{x-c,\, y\} \;\Rightarrow\; \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{F_1M}\right| + \left|\overline{F_2M}\right| = 2a \;\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

Избавляясь от корней, можно получить

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$2a>2c \;\Rightarrow\; a>c \;\Rightarrow\; a^2-c^2>0$$

Обозначим через $b=\sqrt{a^2-c^2}$

Тогда получаем $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \;\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ – ***каноническое уравнение эллипса***

$b \le a$

Исследование формы эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

1. Ox и Oy – оси симметрии, начало координат – точка симметрии

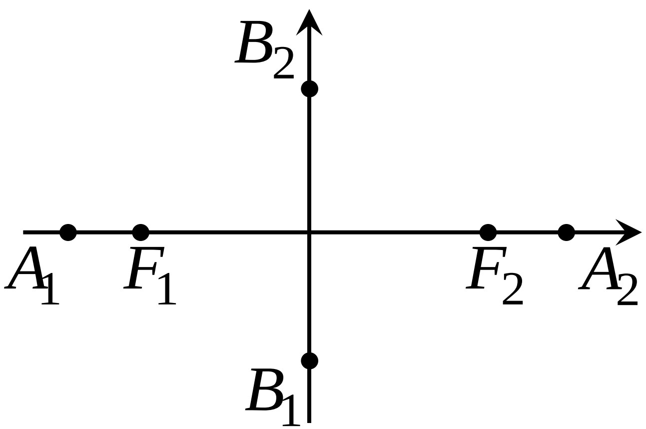
2. Найдём точки пересечения с осями координат.

$$x=0 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; y=\pm b \;\Rightarrow$$

$(0, –b)$ и $(0, b)$ – точки пересечения с осью Oy

$$y=0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{a^2}=1 \;\Rightarrow\; x=\pm a \;\Rightarrow$$

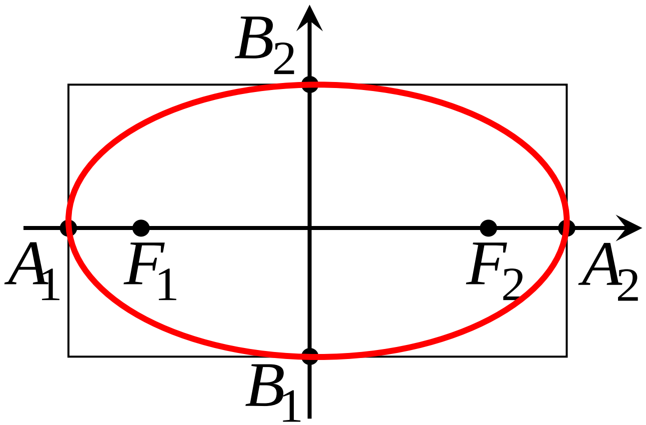
$(–a, 0)$ и $(a, 0)$ – точки пересечения с осью Ox



A_1, A_2, B_1, B_2 – ***вершины*** эллипса

Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ – соответственно ***большая*** и ***малая оси*** эллипса.

Числа a и b – ***большая*** и ***малая полуоси*** эллипса.



3. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{x^2}{a^2}\le 1$ и $\dfrac{y^2}{b^2}\le 1 \quad\Rightarrow\quad \begin{matrix}|x|\le a\\ |y|\le b\end{matrix} \quad\Rightarrow$

эллипс лежит внутри прямоугольника, образованного прямыми $x=\pm a$ и $y=\pm b$.

4. Средствами математического анализа можно исследовать на возрастание и убывание, на выпуклость и вогнутость.

Если $|x|$ увеличивается, то $|y|$ – уменьшается.

1) Пусть $a = b = r \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x^2}{r^2} + \dfrac{y^2}{r^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$

Так как $b^2 = a^2 - c^2$ и $a = b$, то $c = 0 \quad \Rightarrow$

фокусы F_1 и F_2 совпадают $\Rightarrow$

множество точек, равноудалённых от фокуса $\Rightarrow$

окружность.

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, но $a < b$ – эллипс, но фокусы лежат на оси Oy.

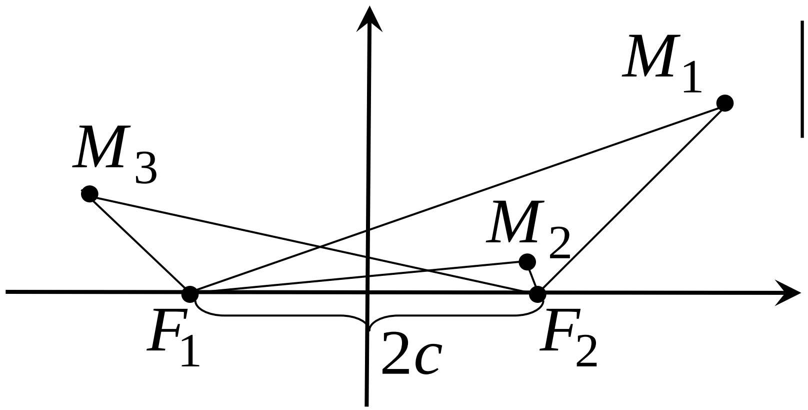
3) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ – эллипс с центром, смещённым в точку (x_0, y_0).

Определение. ***Эллипсом*** называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек есть постоянное число.

Определение. ***Гиперболой*** называется множество всех точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости есть постоянное число, причём меньшее расстояния между фиксированными точками.

Обозначим фиксированные точки F_1 и F_2.
Эти точки называют ***фокусами*** гиперболы, а середину отрезка F_1F_2 – ***центром*** гиперболы.

Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а модуль разности расстояний от точек гиперболы до фокусов через $2a$.



$$\left|\overline{F_1F_2}\right| = 2c \qquad \left|\left|\overline{F_1M_1}\right| - \left|\overline{F_2M_1}\right|\right| = 2a$$

$$\left|\left|\overline{F_1M_2}\right| - \left|\overline{F_2M_2}\right|\right| = 2a$$

$$\left|\left|\overline{F_1M_3}\right| - \left|\overline{F_2M_3}\right|\right| = 2a$$

По определению $2a < 2c \;\Rightarrow\; a < c$

Выберем систему координат так, чтобы фокусы лежали на оси Ox симметрично относительно начала координат.

Найдём координаты фокусов: $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка гиперболы.

$$\overline{F_1M} = \{x + c,\ y\} \;\Rightarrow\; \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\overline{F_2M} = \{x - c,\ y\} \;\Rightarrow\; \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \;\Rightarrow$$

$$\left|\left|\overline{F_1M}\right| - \left|\overline{F_2M}\right|\right| = \left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right|=2a \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Избавляясь от корней, можно получить

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

$$2a<2c \quad \Rightarrow \quad a<c \quad \Rightarrow \quad c^2-a^2>0$$

Обозначим через $b=\sqrt{c^2-a^2}$, то есть $a^2-c^2=-b^2$

Тогда получаем $-b^2x^2+a^2y^2=-a^2b^2 \quad \Rightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

– каноническое уравнение гиперболы

Исследование формы гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

1. *Ox* и *Oy* – оси симметрии,
начало координат – точка симметрии

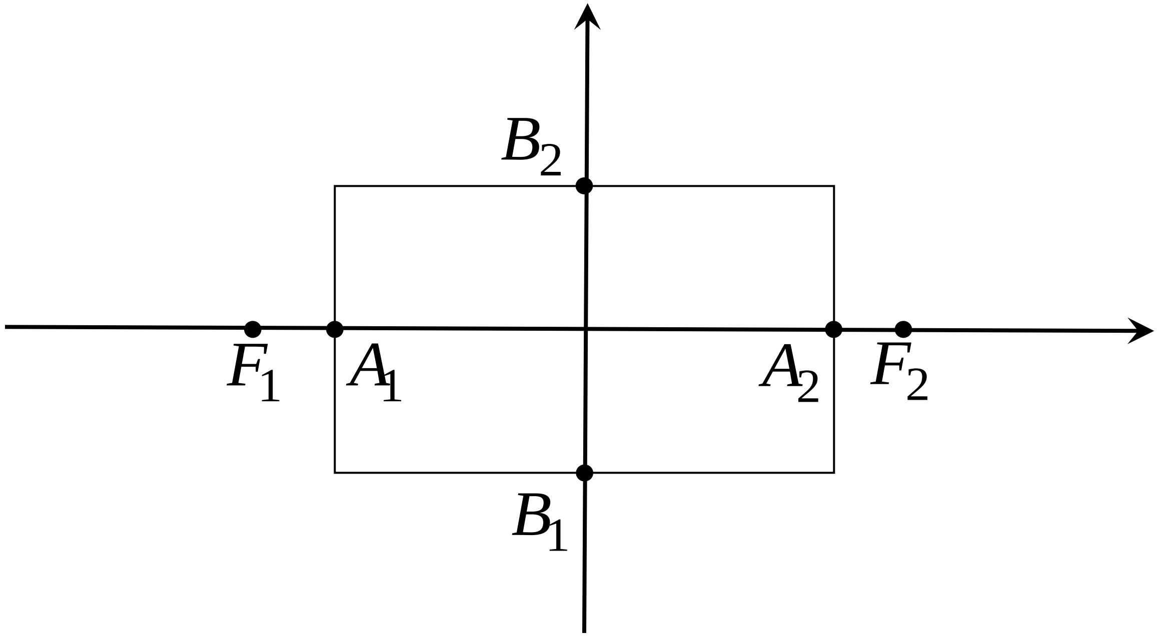
2. Найдём точки пересечения с осями координат.

$x = 0 \;\Rightarrow -\dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ точек пересечения с осью *Oy* нет

$y = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{a^2} = 1 \Rightarrow x = \pm a \;\Rightarrow\;$ $(-a, 0)$ и $(a, 0)$ – точки пересечения с осью *Ox*

Точки $A_1\,(-a, 0)$ и $A_2\,(a, 0)$ называются ***вершинами*** гиперболы.

Пусть $B_1(0, -b)$ и $B_2(0, b)$.



Отрезки A_1A_2 и B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$ называют соответственно ***действительной*** и ***мнимой осями*** гиперболы.

Числа a и b называют соответственно ***действительной*** и ***мнимой полуосями*** гиперболы.

Прямоугольник, образованный прямыми $x=\pm a$ и $y=\pm b$ называют ***основным прямоугольником*** гиперболы.

3. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow -\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2} \Rightarrow 1-\frac{x^2}{a^2}\le 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}\ge 1$

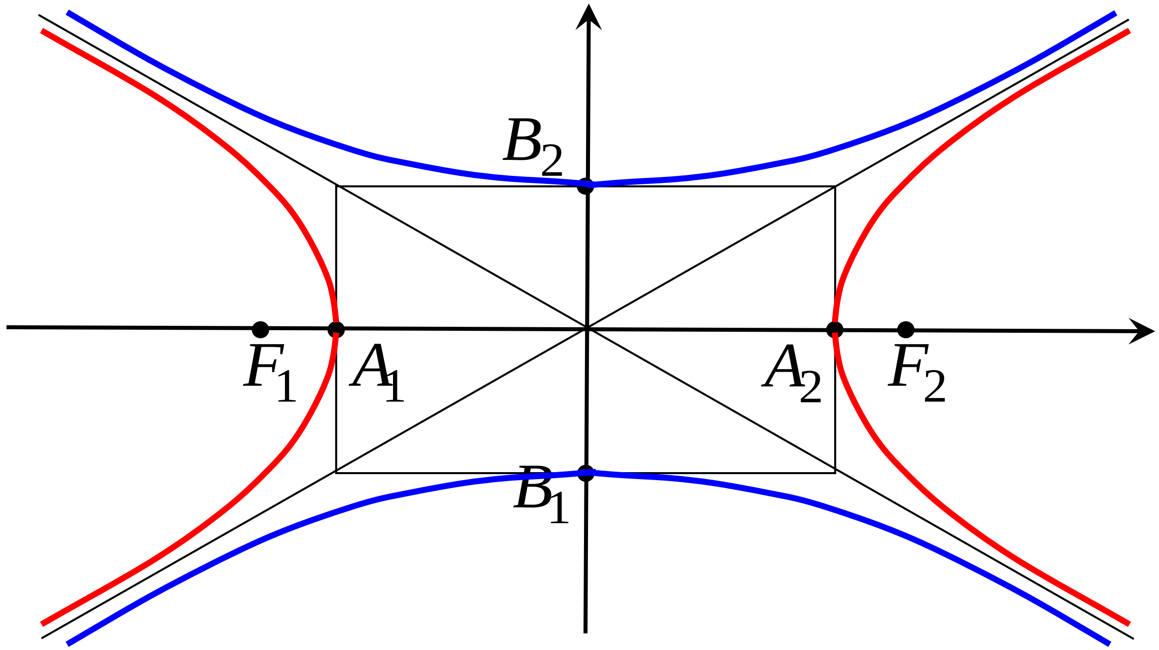
$\Rightarrow \ |x|\ge a$, то есть гипербола лежит вне полосы, образованной прямыми $x=\pm a$.

В силу симметричности относительно оси Oy, гипербола состоит из двух частей, называемых ***ветвями*** гиперболы.

4. Средствами математического анализа можно исследовать на возрастание и убывание, на выпуклость и вогнутость.

Если $|x|$ увеличивается, то $|y|$ – увеличивается.

5. Можно показать, что прямые $y=\pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами гиперболы



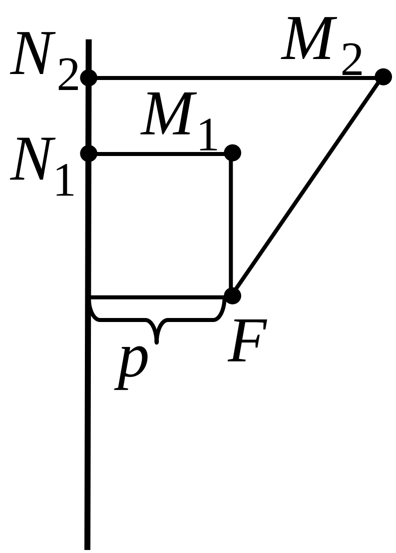
1) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ – гипербола, но фокусы лежат на оси Oy, ветви направлены вверх и вниз.

2) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}-\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ – гипербола с центром, смещённым в точку (x_0, y_0).

Определение. ***Параболой*** называется множество всех точек плоскости, равноудалённых от фиксированной точки и фиксированной прямой.

Обозначим фиксированную точку F, эта точку называют ***фокусом*** параболы. Фиксированную прямую называют ***директрисой*** параболы.

Обозначим расстояние от фокуса до директрисы через p.

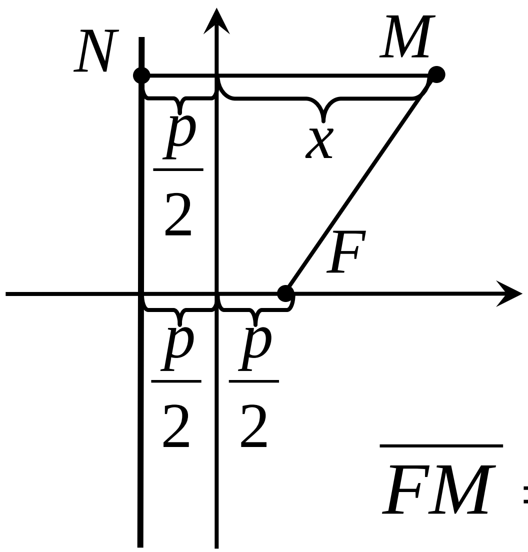


$$\left|\overline{N_1M_1}\right| = \left|\overline{FM_1}\right|$$

$$\left|\overline{N_2M_2}\right| = \left|\overline{FM_2}\right|$$

Получим уравнение параболы.

Выберем систему координат так, чтобы начало координат находилось посередине между фокусом и директрисой, а ось Oy была параллельна директрисе.



Тогда фокус имеет координаты:

$F(p/2, 0)$

Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка параболы.

$$\overline{FM} = \{x - \frac{p}{2}, y\} \Rightarrow \left|\overline{FM}\right| = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}$$

$$\left|\overline{NM}\right| = \frac{p}{2} + x \Rightarrow \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2} = \frac{p}{2} + x \Rightarrow$$

$$\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow \quad -px+y^2=px \quad \Rightarrow$$

$y^2=2px$ – ***каноническое уравнение параболы*** $\quad p>0$

Исследование формы параболы

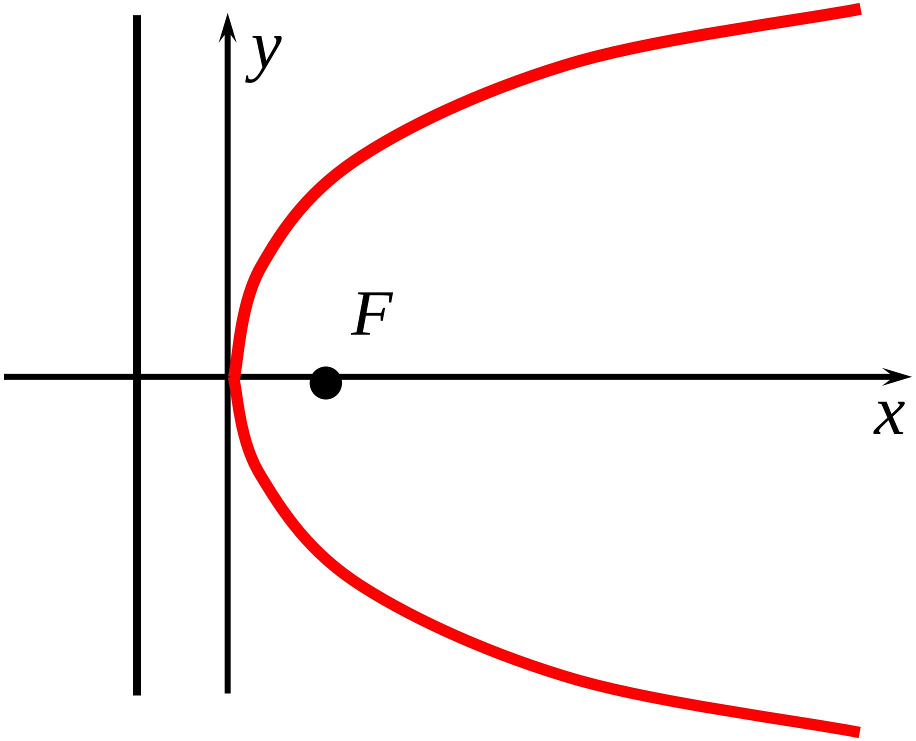
1. Ox – ось симметрии, точек симметрии нет

2. (0,0) – точка пересечения с осями координат, эта точка называется ***вершиной*** параболы.

3. $x=\dfrac{y^2}{2p}$, но $p>0 \Rightarrow x\geq 0$, то есть парабола расположена справа от оси Oy.

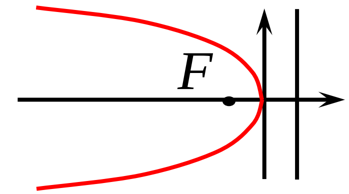
4. Можно исследовать на возрастание и убывание, на выпуклость и вогнутость.

Если x увеличивается, то $|y|$ – увеличивается.



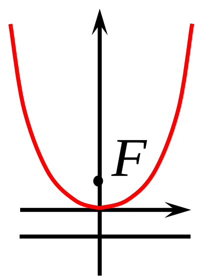
1) $y^2 = -2px$

парабола, ветвь влево



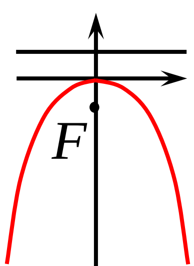
$x^2 = 2py$

парабола, ветвь вверх



$x^2 = -2py$

парабола, ветвь вниз



2) $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$

вершина параболы смещена в точку (x_0, y_0)

Исследование общего уравнения кривой второго порядка

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ – каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ – каноническое уравнение гиперболы

$$y^2=2px$$ – каноническое уравнение параболы

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

Можно показать, что при повороте координатных осей на определённый угол слагаемое Bxy отсутствует $\Rightarrow$

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

1. A и C одного знака. Пусть $A > 0$ и $C > 0$.

Тогда уравнение можно привести к виду

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = F_1$$

$F_1 > 0 \Rightarrow$ эллипс

$F_1 = 0 \Rightarrow$ точка (x_0, y_0)

$F_1 < 0 \Rightarrow$ пустое множество

Если A и C одного знака, то говорят, что кривая второго порядка имеет ***эллиптический тип*.**

При этом также говорят, что эллипс может вырождаться в точку или пустое множество.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

2. A и C разного знака. Пусть $A > 0$ и $C < 0$.

Тогда уравнение можно привести к виду

$$A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = F_1$$

$F_1 \neq 0 \Rightarrow$ гипербола

$F_1 = 0 \Rightarrow$ пара пересекающихся прямых

Если A и C разного знака, то говорят, что кривая второго порядка имеет ***гиперболический тип.***

При этом также говорят, что гипербола может вырождаться в пару пересекающихся прямых.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

3. Один из коэффициентов A или C равен нулю.

а) $A = 0$ и $C \neq 0$. Пусть $C > 0$.

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \Rightarrow \quad C(y - y_0)^2 = F_1 - Dx$$

$D \neq 0 \;\Rightarrow\;$ парабола с осью, параллельной оси Ox (ветвь вправо или влево)

$D = 0 \;\Rightarrow\; C(y - y_0)^2 = F_1$

$F_1 < 0 \;\Rightarrow\;$ пустое множество

$F_1 = 0 \;\Rightarrow\;$ прямая $y = y_0$, параллельная оси Ox

$F_1 > 0 \;\Rightarrow\;$ две прямые, параллельные оси Ox

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

б) $C = 0$ и $A \neq 0$. Пусть $A > 0$.

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x - x_0)^2 = F_1 - Ey$$

$E \neq 0 \quad \Rightarrow$ парабола с осью, параллельной оси Oy (ветвь вверх или вниз)

$E = 0 \quad \Rightarrow \quad A(x - x_0)^2 = F_1$

$F_1 < 0 \quad \Rightarrow$ пустое множество

$F_1 = 0 \quad \Rightarrow$ прямая $x = x_0$, параллельная оси Oy

$F_1 > 0 \quad \Rightarrow$ две прямые, параллельные оси Oy

Если один из коэффициентов A или C равен нулю, то говорят, что кривая второго порядка имеет ***параболический тип*.**

При этом также говорят, что парабола может вырождаться в пару параллельных прямых, в одну прямую или в пустое множество.

Поверхности второго порядка.

Алгебраической поверхностью называют все точки пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен степени n.

Степень многочлена n называют ***порядком*** поверхности.

Поверхности второго порядка – это все точки пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – многочлен второй степени.

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{13}xz + A_{23}yz + \\ + A_{10}x + A_{20}y + A_{30}z + A_{00} = 0$$

Поверхности второго порядка.

вырожденные

1. пустое множество
2. точка
3. плоскость
4. пара параллельных или пересекающихся плоскостей

невырожденные

1. эллипсоид
2. однополостный гиперболоид
3. двухполостный гиперболоид
4. эллиптический параболоид
5. гиперболический параболоид
6. эллиптический конус
7. эллиптический цилиндр
8. гиперболический цилиндр
9. параболический цилиндр

$$A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + A_{12}xy + A_{13}xz + A_{23}yz +$$
$$+ A_{10}x + A_{20}y + A_{30}z + A_{00} = 0$$

Можно показать, что при выборе определённым образом системы координат, любая невырожденная поверхность второго порядка задаётся уравнением одного из девяти видов, называемым ***каноническим***.

Исследуем каждую из невырожденных поверхностей второго порядка ***методом параллельных сечений***, то есть рассмотрим линии пересечения данной поверхности с плоскостями, параллельными координатным плоскостям.

1. Эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Проведём сечения параллельно плоскости xOy: $z = z_0$

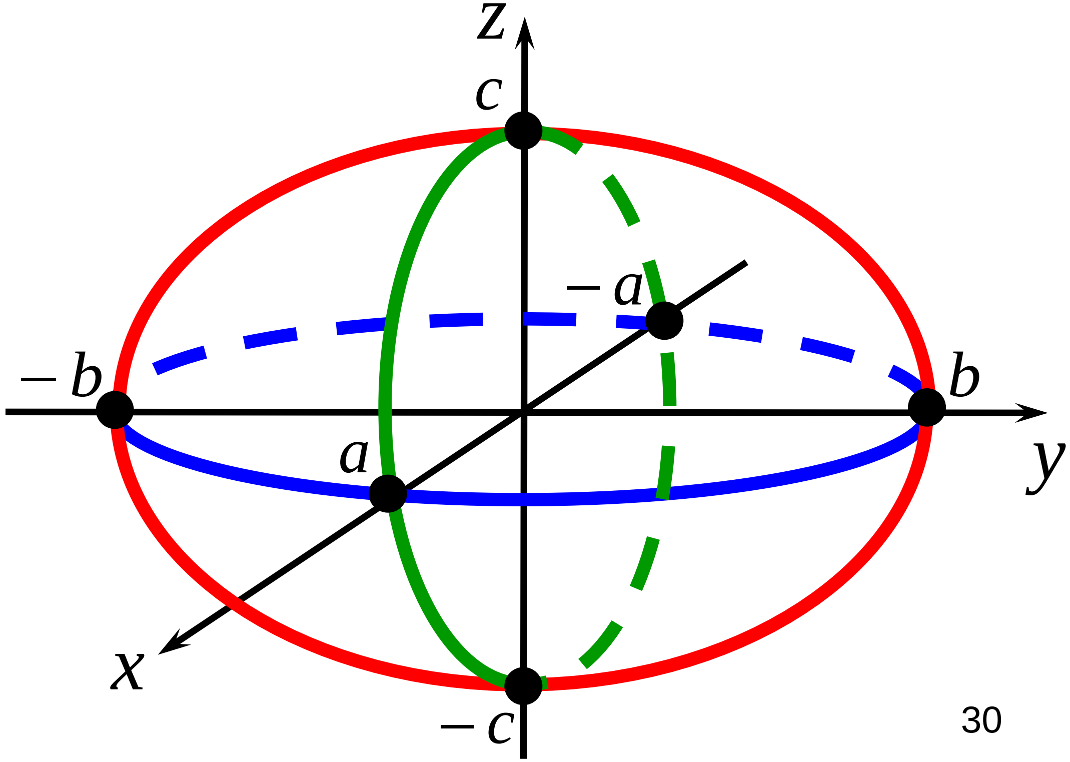
$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z_0{}^2}{c^2}$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0{}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_0{}^2}{b^2}$$



2. Однополостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Параллельно xOy:

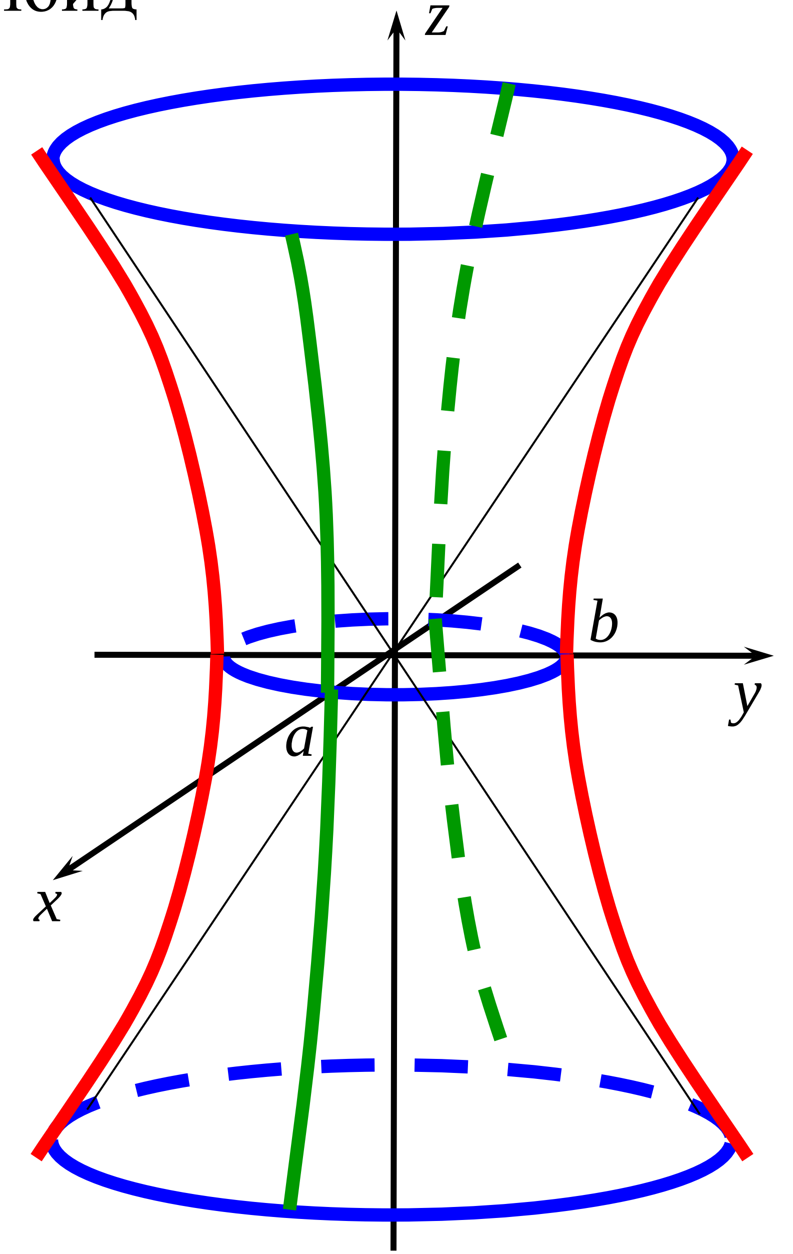
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z_0{}^2}{c^2}$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x_0{}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y_0{}^2}{b^2}$$



3. Двуполостный гиперболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

Параллельно xOy:

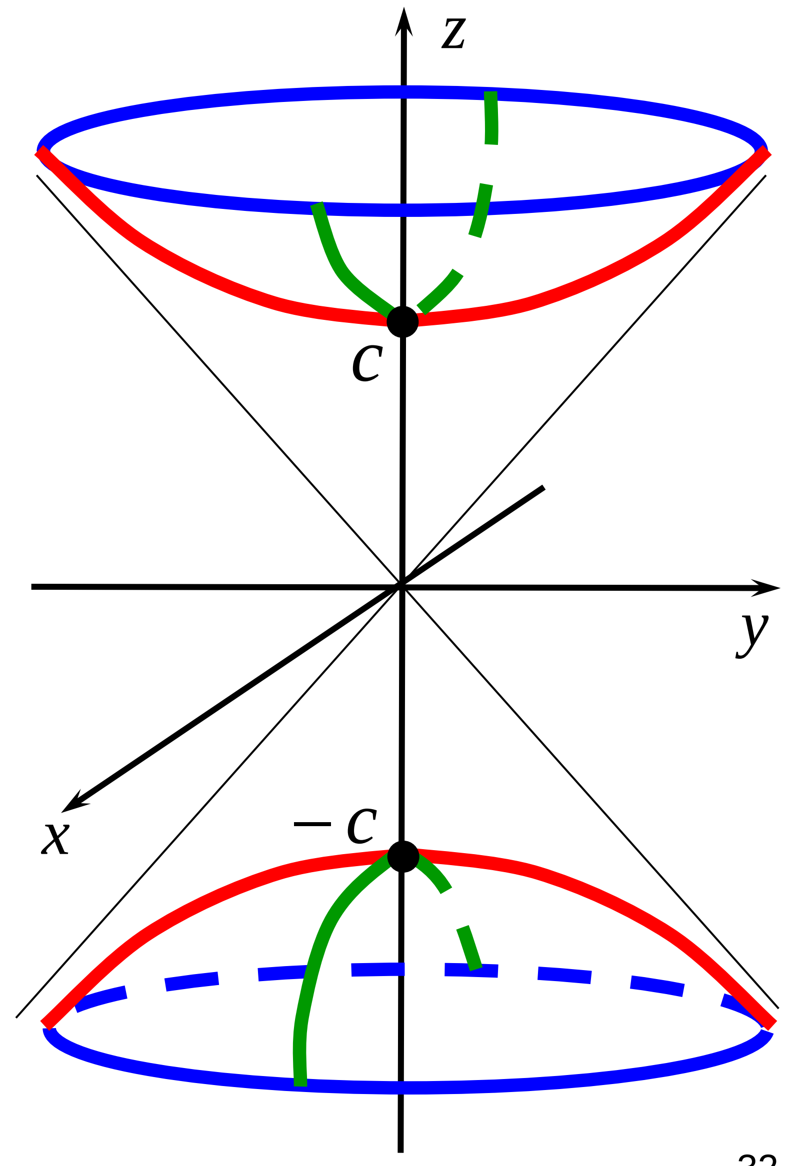
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1+\frac{z_0{}^2}{c^2}$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{x_0{}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1-\frac{y_0{}^2}{b^2}$$



4. Эллиптический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz \qquad p>0$$

Параллельно xOy:

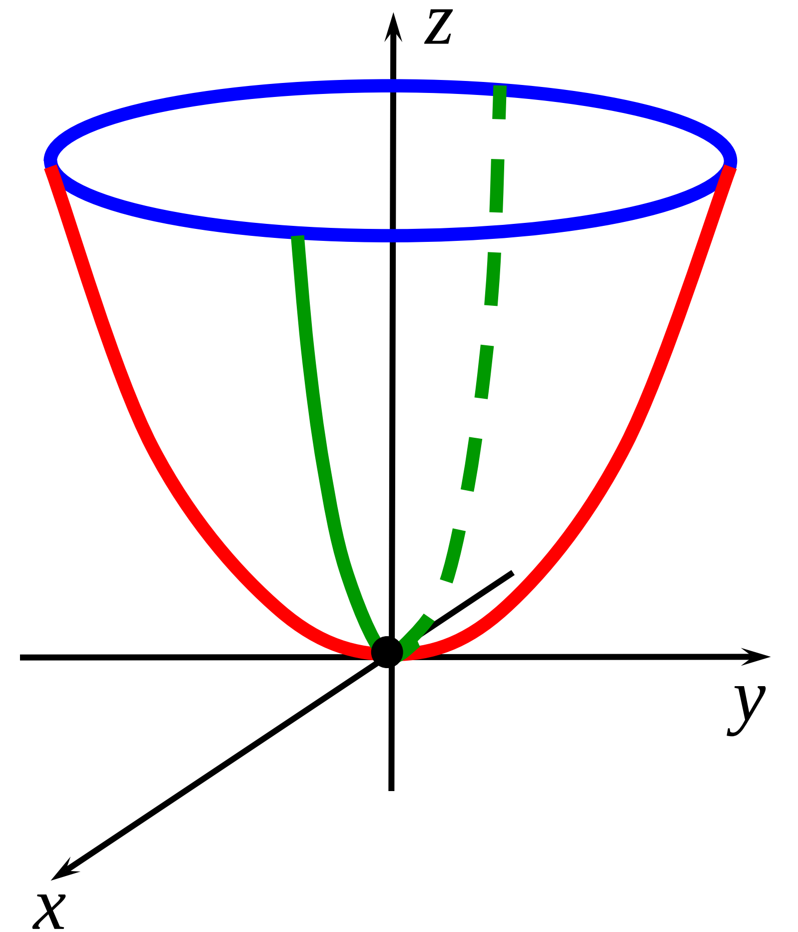
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz_0$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}=2pz-\frac{{x_0}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}=2pz-\frac{{y_0}^2}{b^2}$$



5. Гиперболический параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \qquad p > 0$$

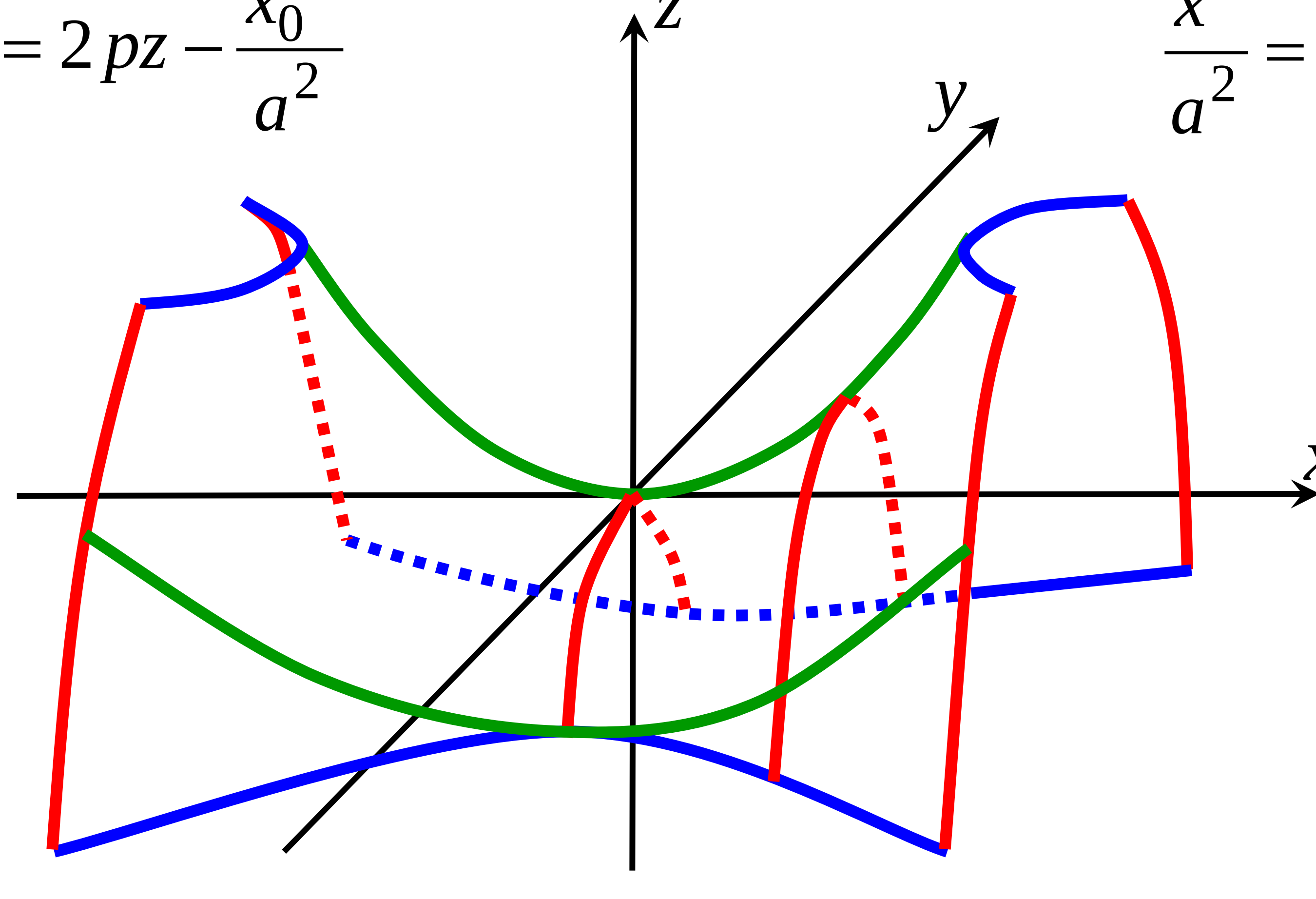
Параллельно xOy: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz_0$

Параллельно yOz:

$$-\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{{x_0}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{{y_0}^2}{b^2}$$



6. Эллиптический конус

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

Параллельно xOy:

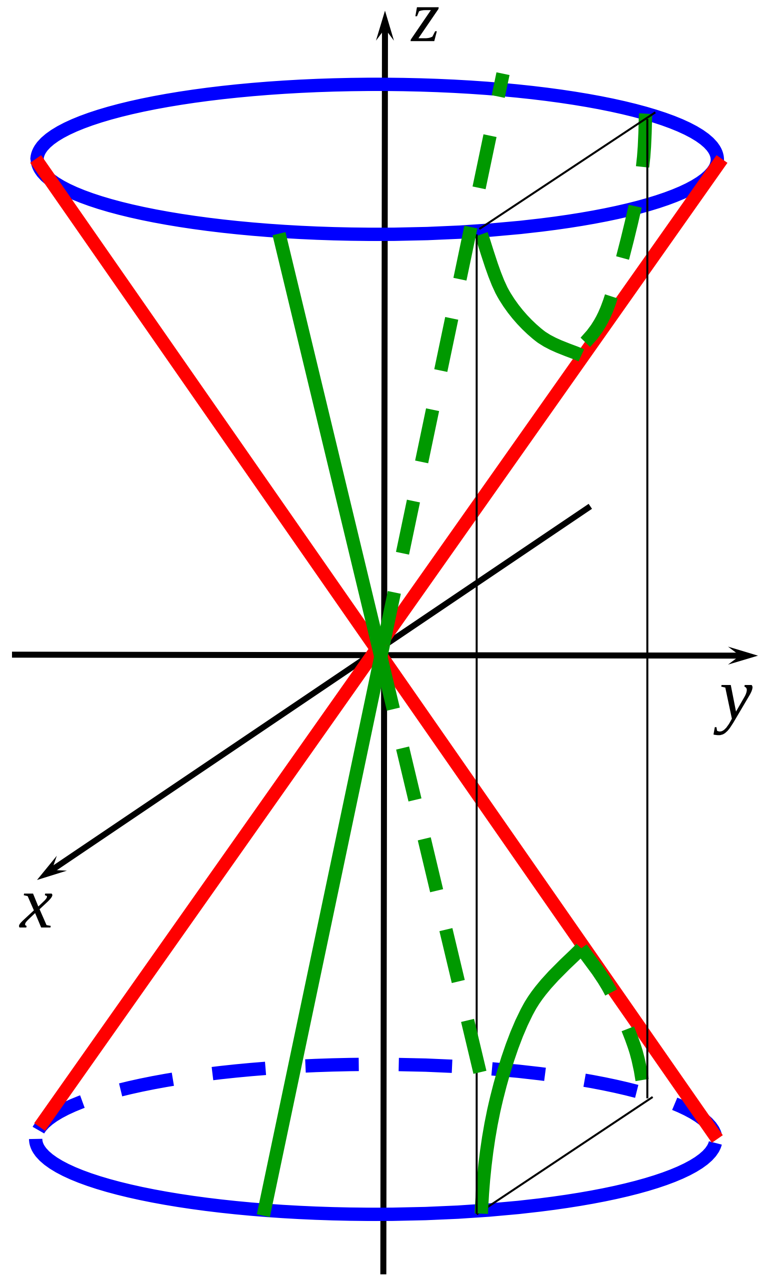
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{{z_0}^2}{c^2}$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{{x_0}^2}{a^2}$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{{y_0}^2}{b^2}$$



7. Эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параллельно *xOy*:

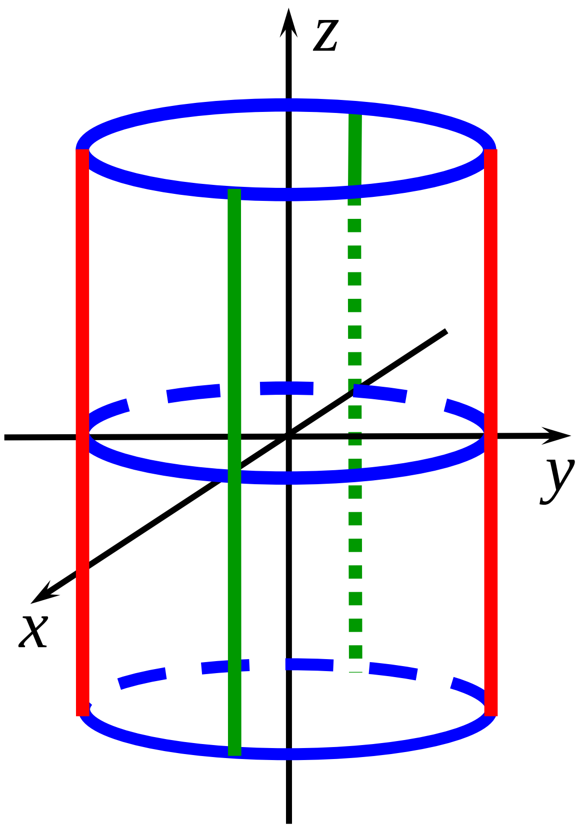
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параллельно *yOz*:

$$\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x_0{}^2}{a^2}$$

Параллельно *xOz*:

$$\frac{x^2}{a^2}=1-\frac{y_0{}^2}{b^2}$$



8. Гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параллельно xOy:

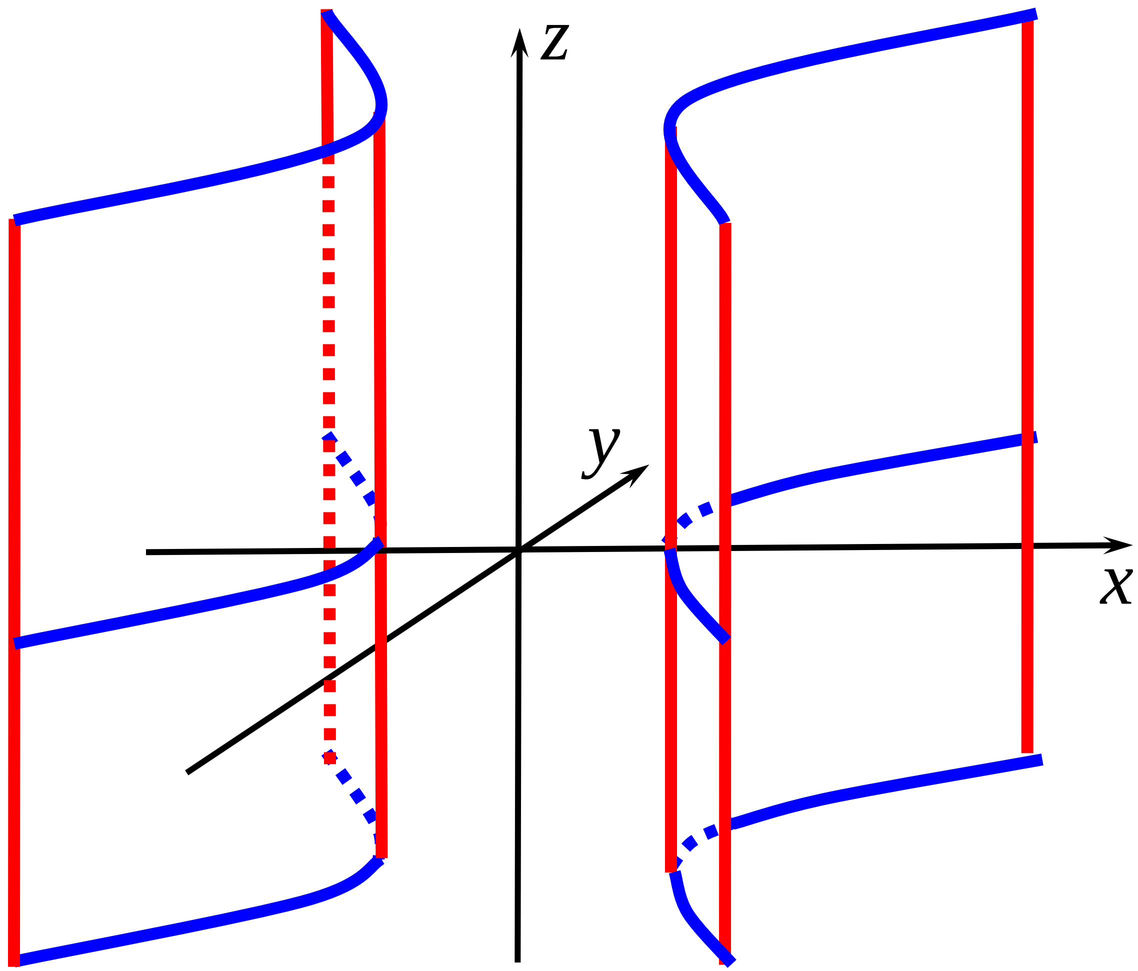
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Параллельно yOz:

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x_0{}^2}{a^2}-1$$

Параллельно xOz:

$$\frac{x^2}{a^2}=1+\frac{y_0{}^2}{b^2}$$



9. Параболический цилиндр

$$y^2 = 2px \qquad p > 0$$

Параллельно xOy:

$$y^2 = 2px$$

Параллельно yOz:

$$y^2 = 2px_0$$

Параллельно xOz:

$$2px = y_0^2$$