Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Глава 4.
Аналитическая геометрия

Преподаватель – доцент кафедры ВМ, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

Определение. В аналитической геометрии ***линией на плоскости*** называют все точки плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y) = 0$.

Определение. ***Поверхностью*** в пространстве называют все точки пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$.

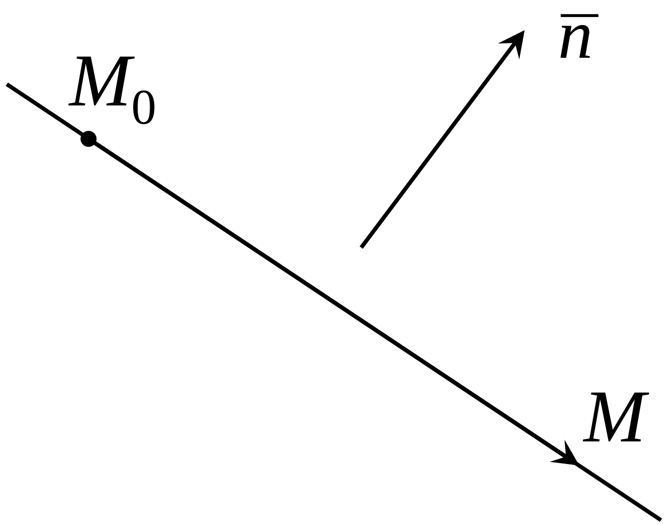
Определение. Линия на плоскости (поверхность) называется ***алгебраической***, если $F(x, y)$ ($F(x, y, z)$) – многочлен степени n. При этом степень многочлена называют ***порядком*** линии (поверхности).

Определение. ***Линией в пространстве*** называют пересечение двух поверхностей.

1. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{A, B\}$.

Определение. Вектор, перпендикулярный прямой, называют ***нормальным вектором*** или ***нормалью*** к этой прямой.

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка прямой.



$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$\overline{M_0M}$ и $\overline{n}$ – ортогональны $\Rightarrow$

$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0 \quad \Rightarrow$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Прямая – линия первого порядка.

2. Общее уравнение прямой.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

Обозначим $C = -Ax_0 - By_0$, тогда $Ax + By + C = 0$

$\overline{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор прямой

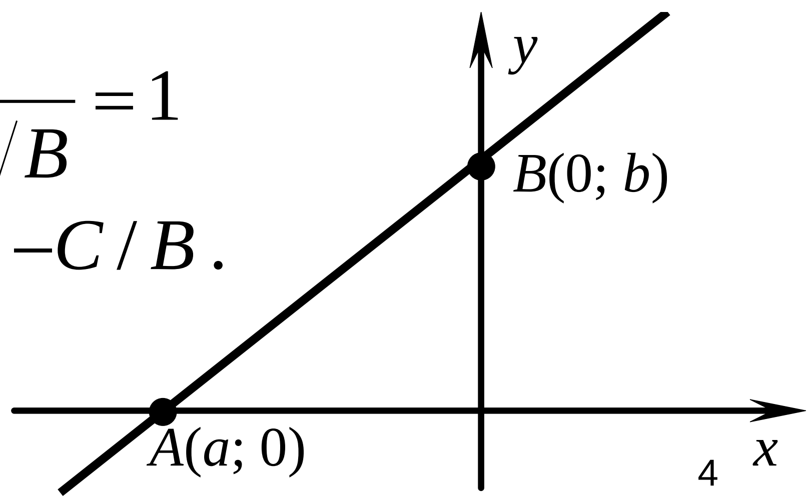
3. Уравнение прямой в отрезках.

Пусть все коэффициенты *A, B* и *C* отличны от 0.

$$Ax + By = -C \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$$

Обозначим $a = -C/A$ и $b = -C/B$.

Тогда $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

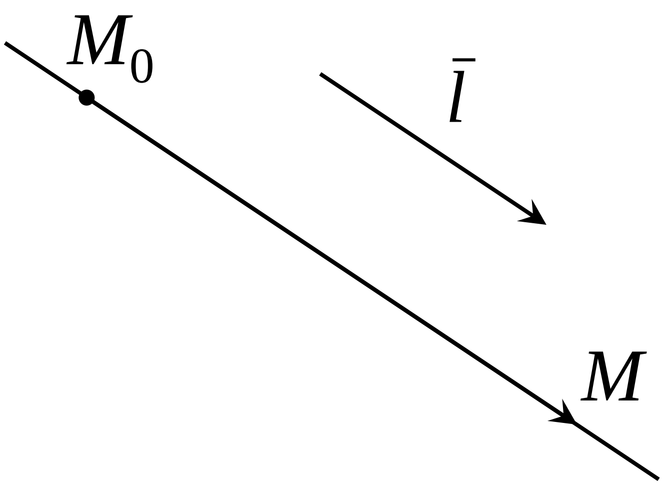


4. Параметрические уравнения прямой.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно вектору $\bar{l}=\{m, n\}$.

Определение. Вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.

Пусть $M\,(x, y)$ – произвольная точка прямой.



$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$$

$\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ – коллинеарны $\Rightarrow$

$$\overline{M_0M} = t\bar{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \end{cases}$$

5. Каноническое уравнение прямой.

Пусть направляющий вектор $\bar{l} = \{m, n\}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$ и $n \neq 0$).

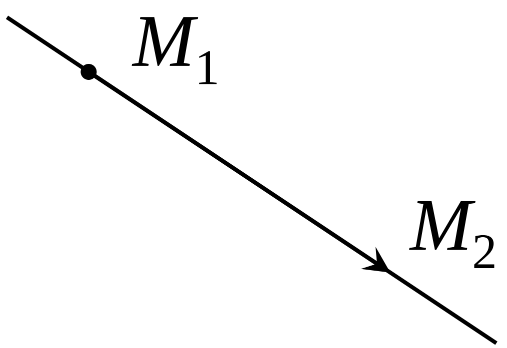
$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x - x_0}{m},\ t = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}}$$

x_0, y_0 – координаты некоторой точки на прямой,

m, n – координаты направляющего вектора прямой

6. Уравнение прямой, проходящей через две точки.

$M_1\,(x_1, y_1)$ и $M_2\,(x_2, y_2)$



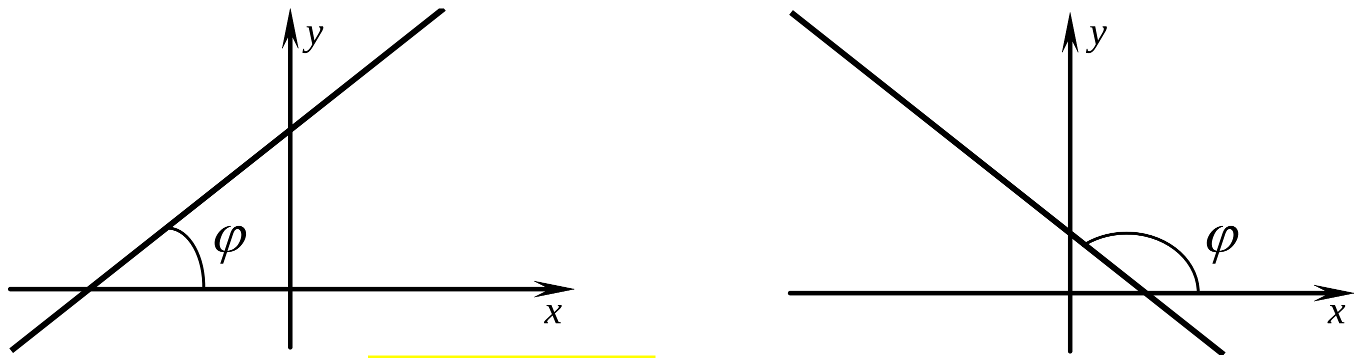
$$\bar{l} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

7. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Пусть прямая пересекается с осью Ox.

Определение. Угол φ, отсчитываемый от оси Ox к прямой против часовой стрелки, называют ***углом наклона*** прямой к оси Ox.

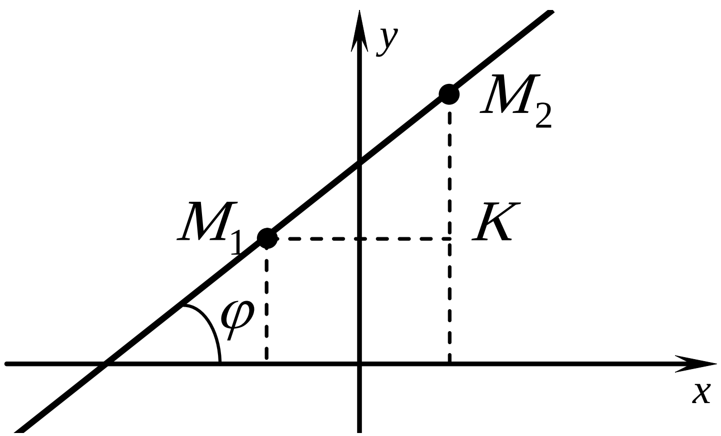


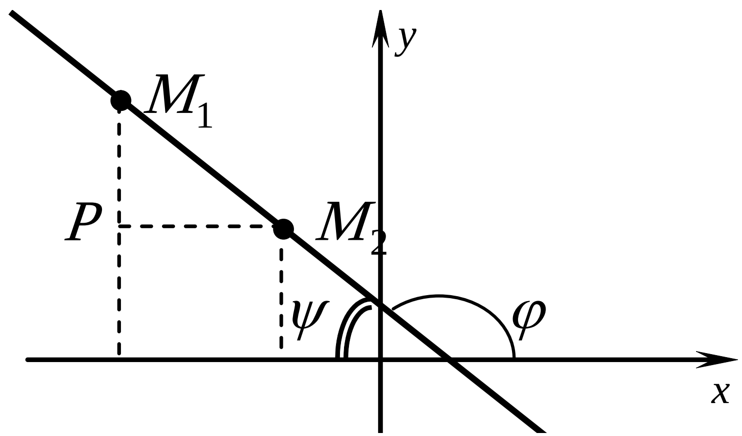
При этом число $k = \operatorname{tg}\varphi$ (если оно существует, то есть если прямая не параллельна оси Oy) называют ***угловым коэффициентом*** прямой.

Если прямая параллельна оси Ox, угол наклона прямой к оси Ox считают равным 0. Тогда $k = \operatorname{tg} 0 = 0$.

Пусть прямая не параллельна оси Ox и Oy и проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 < x_2$.

Найдём угловой коэффициент этой прямой





φ – острый $\Rightarrow$ $$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{M_2K}{M_1K} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

φ – тупой $\Rightarrow$ $$k = \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\pi - \psi) = -\operatorname{tg}\psi =$$

$$= -\frac{M_1P}{M_2P} = -\frac{y_1 - y_2}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Прямая проходит через $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ $\Rightarrow$ её уравнением будет

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \Rightarrow \quad y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot \left(x - x_1\right) \quad \Rightarrow$$

$$y - y_1 = k \cdot \left(x - x_1\right) \quad \Rightarrow \quad y = kx + (y_1 - kx_1)$$

Обозначим $b = y_1 - kx_1$ $\Rightarrow$ $y = kx + b$

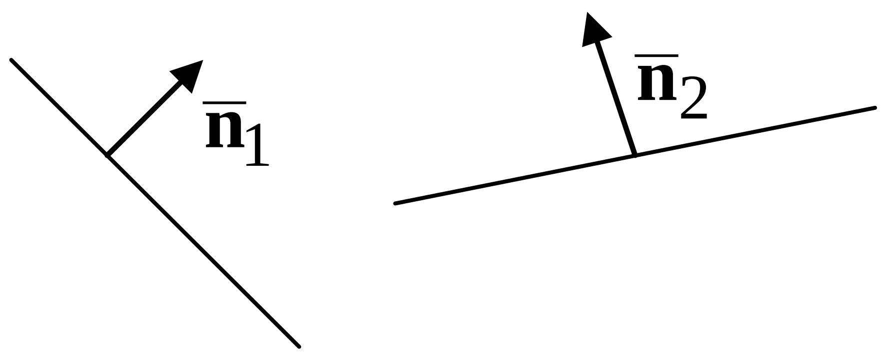
Если прямая параллельна оси Ox, то её уравнение $y = b$ можно записать $y = 0 \cdot x + b$ $\Rightarrow$ получаем уравнение с угловым коэффициентом.

Пусть даны две различные прямые $\Rightarrow$ они либо пересекаются, либо параллельны

1. Прямые заданы уравнениями в общем виде:

$$\begin{matrix} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{n_1} = \{A_1, B_1\} \\ \overline{n_2} = \{A_2, B_2\} \end{matrix}$$

– нормальные векторы



Прямые параллельны $\Leftrightarrow$ $\overline{n}_1 \parallel \overline{n}_2$

Прямые перпендикулярны $\Leftrightarrow$ $\overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $(\overline{n}_1, \overline{n}_2) = 0$

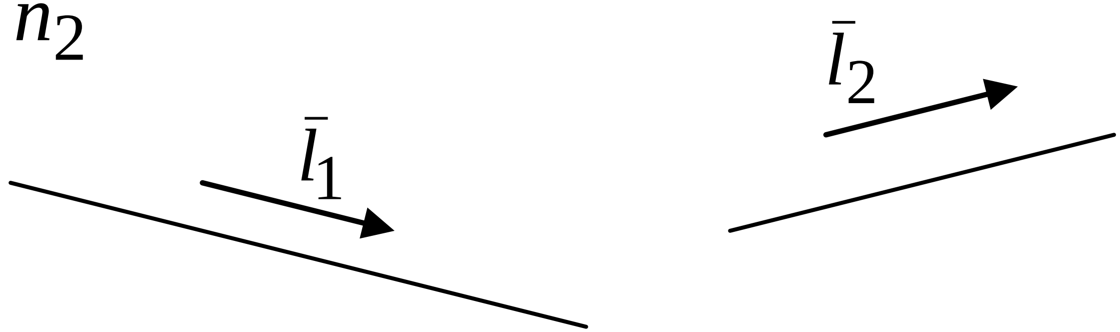
Угол между прямыми: $\cos\varphi = \pm \dfrac{|(\overline{n}_1, \overline{n}_2)|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$

2. Прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1} \qquad \bar{l}_1=\{m_1,\,n_1\}$$

– направляющие векторы

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2} \qquad \bar{l}_2=\{m_2,\,n_2\}$$



Прямые параллельны $\quad\Leftrightarrow\quad \bar{l}_1 \parallel \bar{l}_2$

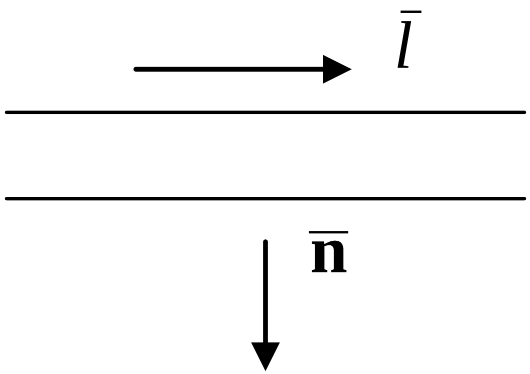
Прямые перпендикулярны $\quad\Leftrightarrow\quad \bar{l}_1 \perp \bar{l}_2 \quad\Leftrightarrow\quad (\bar{l}_1,\bar{l}_2)=0$

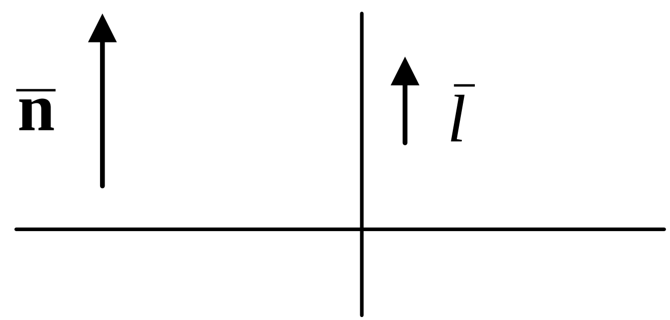
Угол между прямыми: $\quad \cos\varphi=\pm\dfrac{\left|(\bar{l}_1,\bar{l}_2)\right|}{\left|\bar{l}_1\right|\cdot\left|\bar{l}_2\right|}$

3. Одна прямая задана общим уравнением, вторая - каноническим:

$Ax + By + C = 0$ $\qquad$ $\bar{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор

$\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$ $\qquad$ $\bar{l} = \{m, n\}$ – направляющий вектор





Прямые параллельны $\Leftrightarrow \bar{n} \perp \bar{l} \Leftrightarrow (\bar{n}, \bar{l}) = 0$

Прямые перпендикулярны $\Leftrightarrow \bar{n} \parallel \bar{l}$

4. Прямые заданы уравнениями с угловым коэффициентом:

$$\begin{matrix} y = k_1x+b_1 \\ y = k_2x+b_2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} k_1x - y + b_1 = 0 \\ k_2x - y + b_2 = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} \bar{n}_1 = \{k_1, -1\} \\ \bar{n}_2 = \{k_2, -1\} \end{matrix}$$

Прямые параллельны $\Leftrightarrow$ $k_1 = k_2$

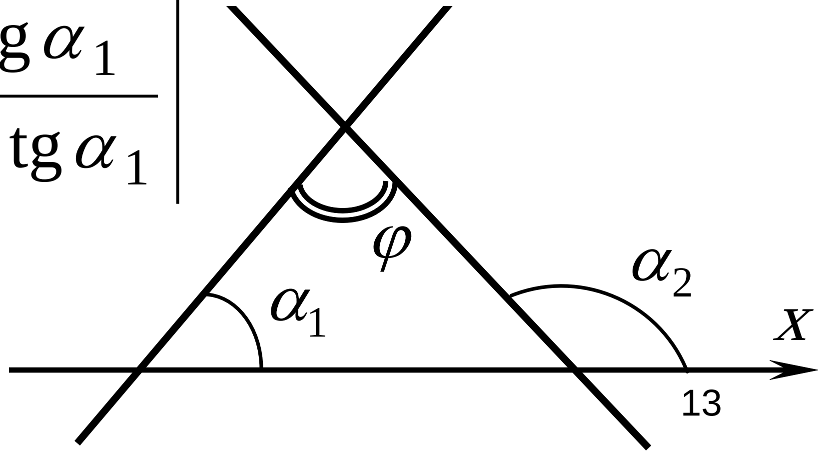
Прямые перпендикулярны $\Leftrightarrow \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \Leftrightarrow (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$

$$\Leftrightarrow k_1k_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k_1 = -1/k_2$$

Угол между прямыми: $\varphi = \left| \alpha_2 - \alpha_1 \right|$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left| \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) \right| = \left| \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_2 \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} \right|$$

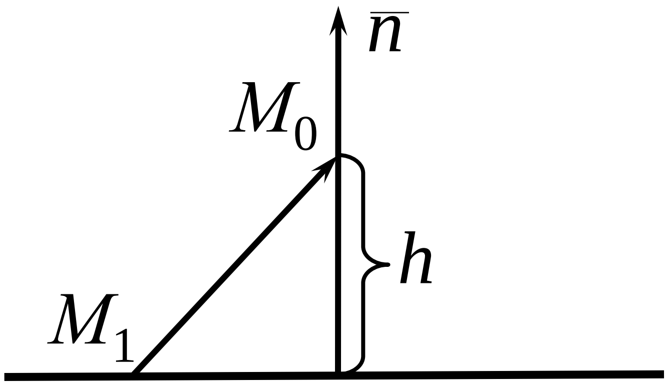
$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$$



Найдём расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой

$Ax + By + C = 0 \;\Rightarrow\; \overline{n} = \{A, B\}$ – нормальный вектор

Пусть $M_1(x_1, y_1)$ – произвольная точка прямой.



$$\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1,\, y_0 - y_1\}$$

$$h = \left|np_{\overline{n}}\,\overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|(\overline{M_1M_0}, \overline{n})\right|}{\left|\overline{n}\right|}$$

$$\left|\overline{n}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$(\overline{M_1M_0}, \overline{n}) = (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B = Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1 =$$

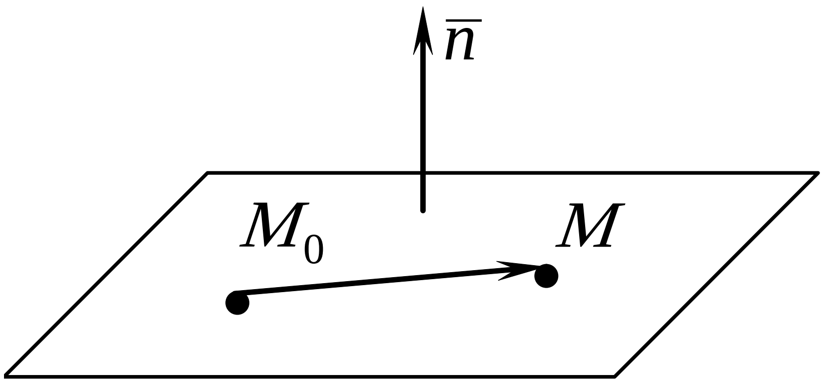
$$= Ax_0 + By_0 + C - (\underbrace{Ax_1 + By_1 + C}_{0}) = Ax_0 + By_0 + C$$

$$h = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

1. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{n} = \{A, B, C\}$.

Определение. Вектор, перпендикулярный плоскости, называют ***нормальным вектором*** или ***нормалью*** к этой плоскости.

Пусть $M\,(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.



$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$\overline{M_0M}$ и $\overline{n}$ – ортогональны $\Rightarrow$

$$(\overline{M_0M}, \overline{n}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Плоскость – поверхность первого порядка.

2. Общее уравнение плоскости.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad \Rightarrow$$

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0$$

Обозначим $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$, тогда

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$\overline{n}=\{A,\ B,\ C\}$ – нормальный вектор плоскости

3. Уравнение плоскости в отрезках.

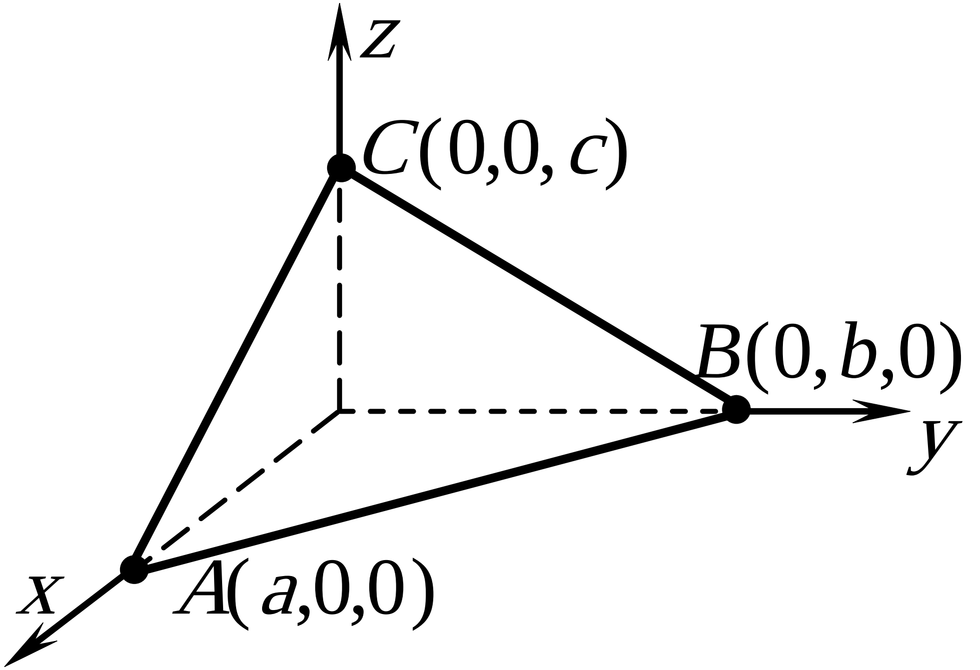
Пусть все коэффициенты *A, B, C* и *D* отличны от 0.

$$Ax+By+Cz=-D \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$$

Обозначим $a=-D/A$, $b=-D/B$, $c=-D/C$.

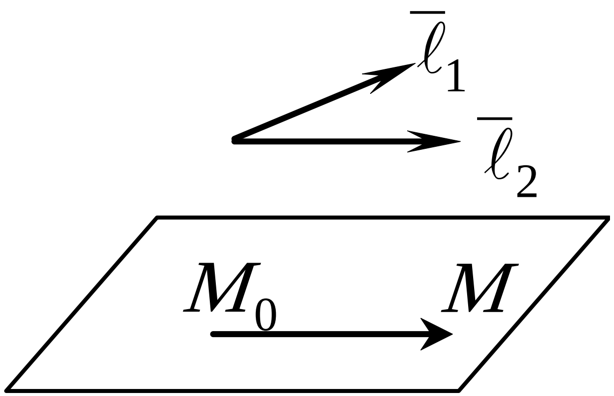
Тогда $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



4. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\bar{\ell}_1 = \{m_1;\ n_1;\ p_1\}$ и $\bar{\ell}_2 = \{m_2;\ n_2;\ p_2\}$.

Пусть $M\,(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.



$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$\left[\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right]$ – нормаль к плоскости

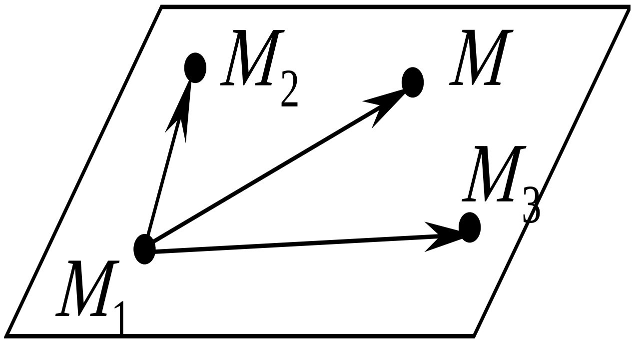
$$\overline{M_0M} \perp \left[\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right] \Rightarrow$$

$$\left(\overline{M_0M}, \left[\bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right]\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(\overline{M_0M}, \bar{\ell}_1, \bar{\ell}_2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0}$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

$M_1\,(x_1, y_1, z_1)$
$M_2\,(x_2, y_2, z_2)$
$M_3\,(x_3, y_3, z_3)$



Пусть $M\,(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости.

Векторы $\overline{\mathbf{M_1M_2}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ и

$\overline{\mathbf{M_1M_3}} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$

– неколлинеарные и параллельны плоскости $\Rightarrow$

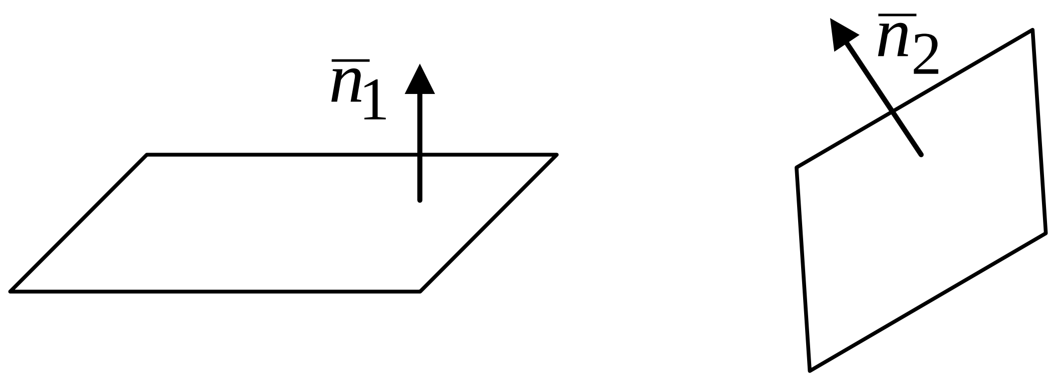
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Пусть даны две различные плоскости $\Rightarrow$ они либо пересекаются, либо параллельны.

Пусть уравнения плоскостей:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \\ \bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \end{aligned}$$

– нормальные векторы



Плоскости параллельны $\Leftrightarrow \quad \bar{n}_1 \parallel \bar{n}_2$

Плоскости перпендикулярны $\Leftrightarrow \; \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2 \; \Leftrightarrow \; (\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$

Угол между плоскостями: $\cos\varphi = \pm \dfrac{|(\bar{n}_1, \bar{n}_2)|}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|}$

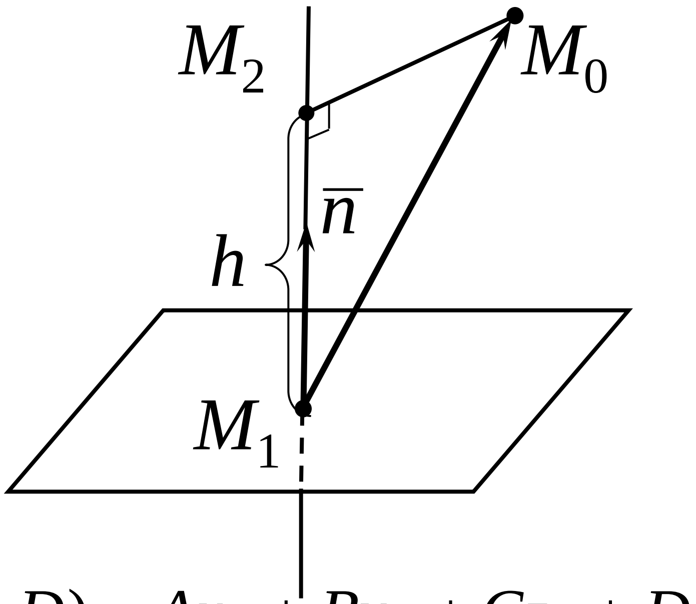
Найдём расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости

$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{n} = \{A, B, C\}$ – нормаль

Обозначим расстояние от точки M_0 до плоскости через h.

Пусть $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка плоскости.

Поместим вектор $\overline{n}$ в точку M_1.



$$h = \left|\overline{M_1M_2}\right| = \left|np_{\overline{n}}\,\overline{M_1M_0}\right| \quad \Rightarrow$$

$$h = \frac{\left|(\overline{M_1M_0}, \overline{n})\right|}{|\overline{n}|} \qquad |\overline{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

$$(\overline{M_1M_0}, \overline{n}) =$$

$$= (x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C =$$

$$= Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D - (\underbrace{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}_{0}) = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$$

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

1. Пусть A, B и C отличны от нуля, а $D = 0$.

Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz = 0 \quad \Rightarrow$$

плоскость проходит через начало координат.

Пересечение с плоскостью xOy:

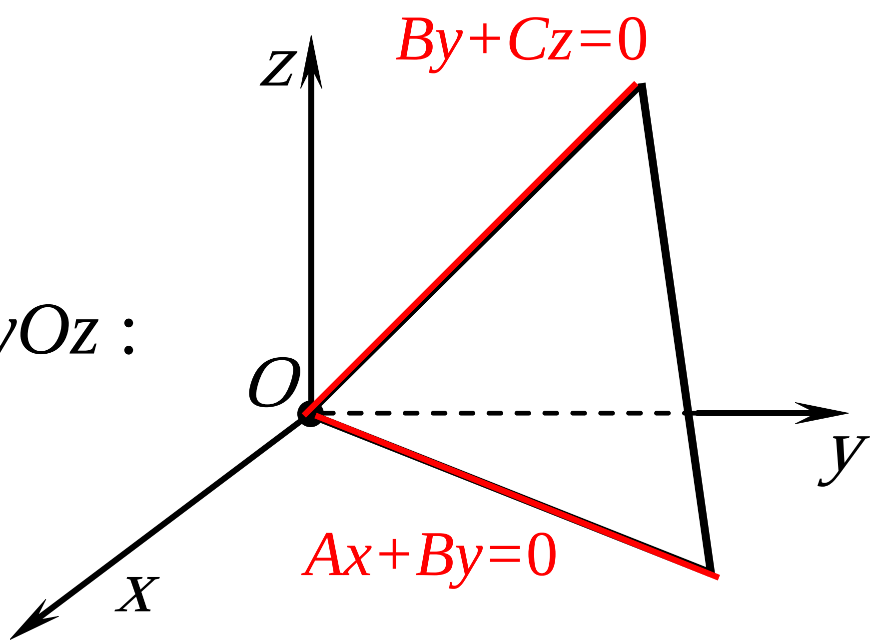
$z = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By = 0$

прямая, проходящая через начало координат.

Пересечение с плоскостью yOz :

$x = 0 \quad \Rightarrow \quad By + Cz = 0$

прямая, проходящая через начало координат.



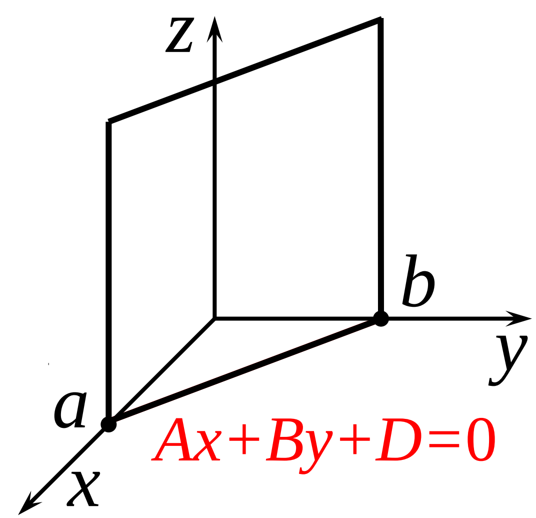
2. Пусть один из коэффициентов A, B или C равен нулю, а $D \neq 0$. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$Ax+By+D=0$ или $Ax+Cz+D=0$ или $By+Cz+D=0$

Рассмотрим уравнение $Ax+By+D=0$

Если числа x и y удовлетворяют этому уравнению, то для любого z точка (x, y, z) лежит на плоскости $\Rightarrow$ плоскость содержит прямую, параллельную оси Oz $\Rightarrow$

***плоскость параллельна оси** Oz.*

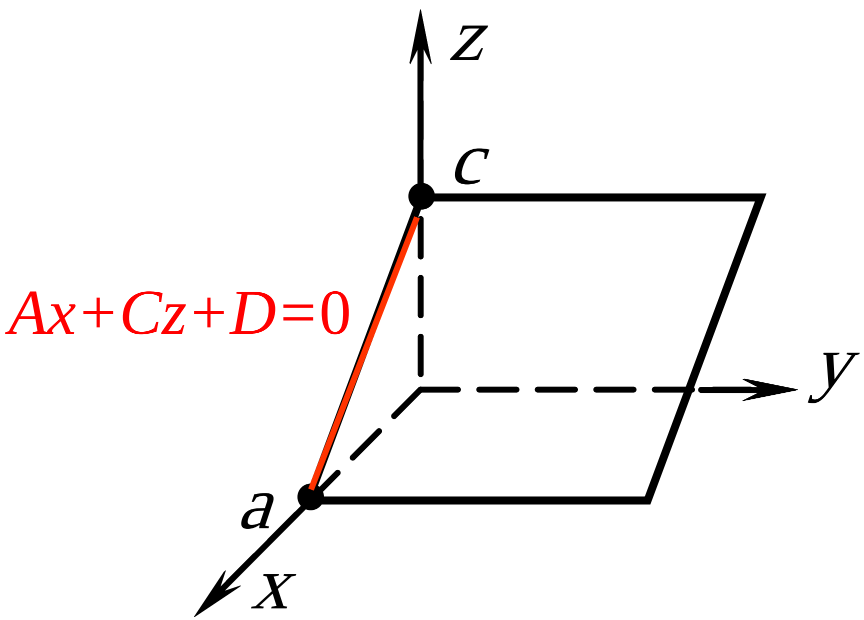


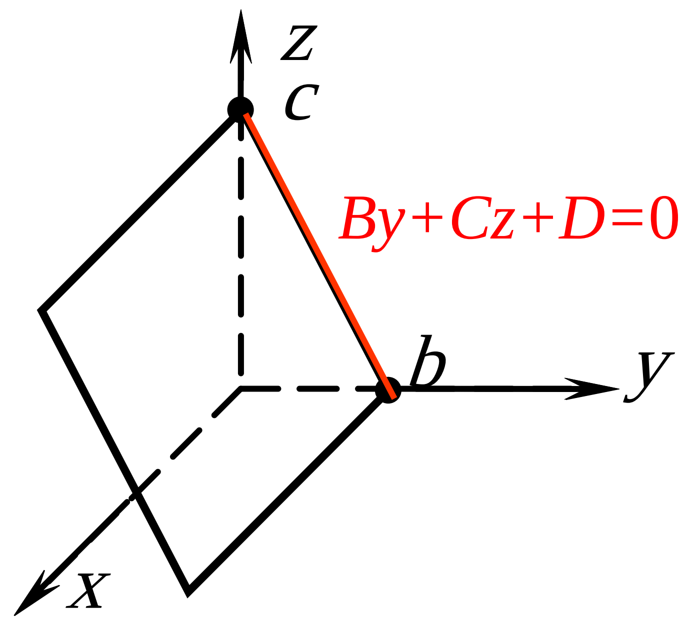
$$Ax+By+D=0 \;\Rightarrow\; Ax+By=-D \;\Rightarrow\; \frac{x}{\underbrace{-D/A}_{a}}+\frac{y}{\underbrace{-D/B}_{b}}=1$$

$\Rightarrow \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1 \;\Rightarrow$ ***плоскость отсекает на осях** Ox **и** Oy **отрезки** a **и** b **соответственно.***

Аналогично предыдущему получаем, что плоскость $Ax+Cz+D=0$ параллельна оси Oy, а плоскость $By+Cz+D=0$ параллельна оси Ox.

Также аналогично предыдущему находятся отрезки, отсекаемые этими плоскостями на соответствующих координатных осях.





3. Пусть два из коэффициентов A, B или C равны нулю, а $D \neq 0$. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

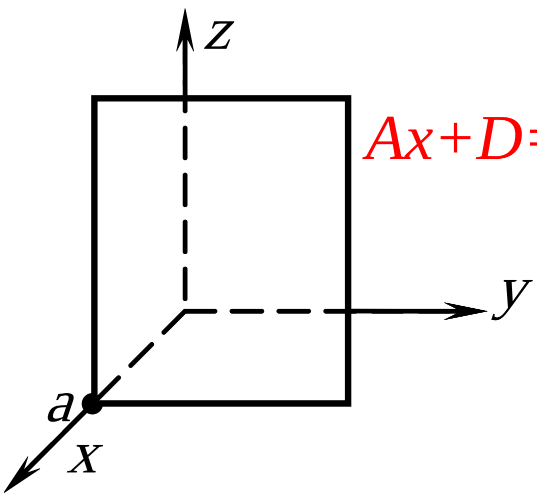
$Ax+D=0$ или $By+D=0$ или $Cz+D=0$

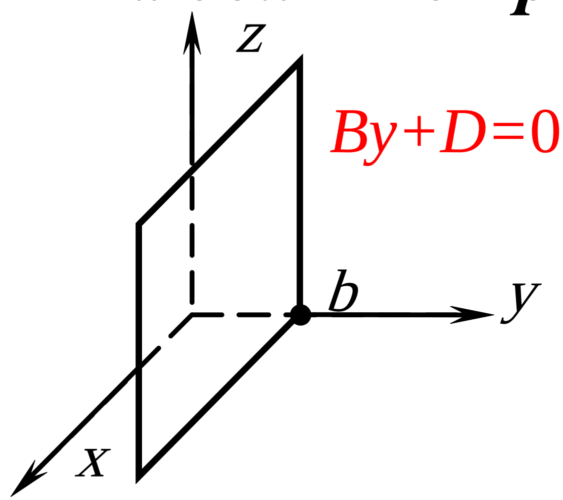
Рассмотрим плоскость $Ax+D=0$, для двух других плоскостей рассуждения аналогичные.

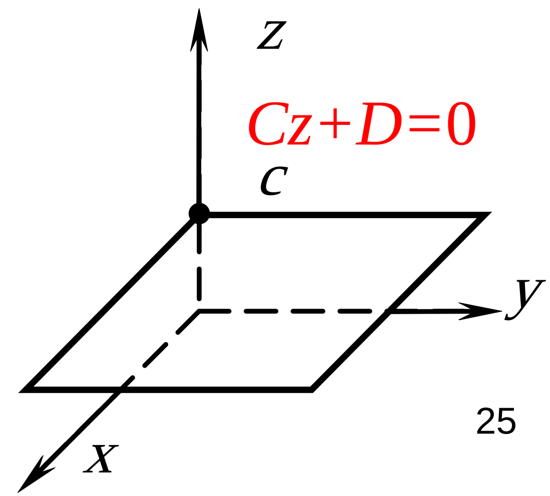
Эта плоскость параллельна оси Oy и Oz $\Rightarrow$ ***параллельна координатной плоскости*** yOz.

$$Ax+D=0 \;\Rightarrow\; Ax=-D \;\Rightarrow\; \frac{x}{-D/A}=1 \;\Rightarrow\; \frac{x}{a}=1 \;\Rightarrow$$

плоскость отсекает на оси Ox ***отрезок*** a.







4. Пусть $D = 0$ и один из коэффициентов A, B или C равен нулю. Тогда уравнение плоскости имеет вид:

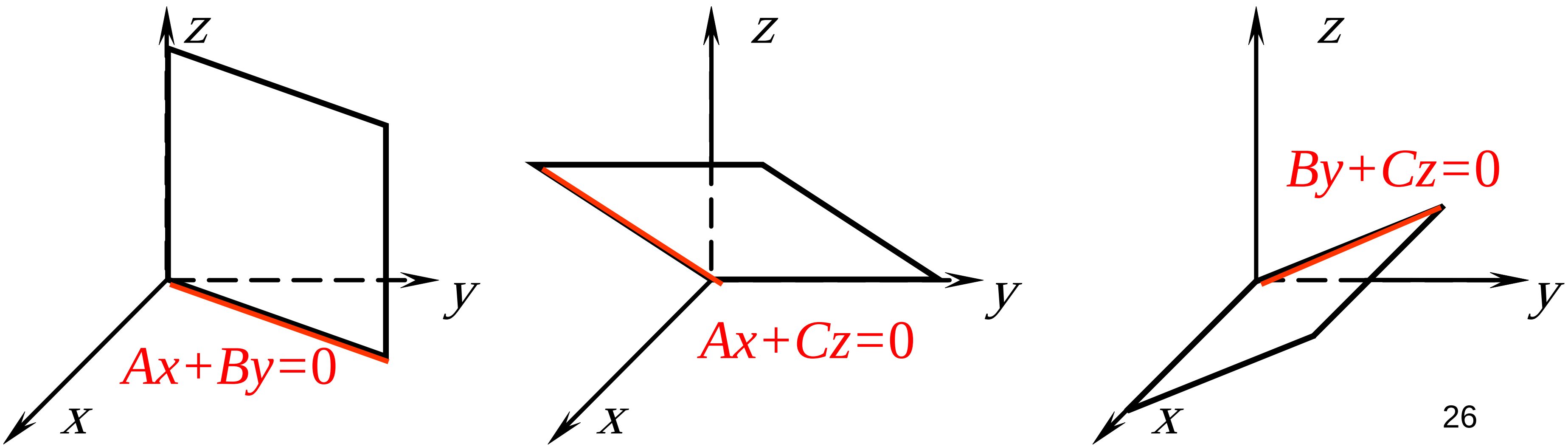
$Ax+By=0$ или $Ax+Cz=0$ или $By+Cz=0$

Рассмотрим плоскость $Ax+By=0$.

Эта плоскость параллельна оси Oz и проходит через начало координат $\Rightarrow$ ***она проходит через ось*** Oz.

Плоскость $Ax+Cz=0$ ***проходит через ось*** Oy.

Плоскость $By+Cz=0$ ***проходит через ось*** Ox.



5. Пусть три коэффициента равны нулю.
Тогда уравнение плоскости имеет вид:

$Ax=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow$ координатная плоскость yOz

$By=0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \Rightarrow$ координатная плоскость xOz

$Cz=0 \quad \Rightarrow \quad z=0 \quad \Rightarrow$ координатная плоскость xOy

1. <u>Общие уравнения прямой</u>.

Определение. ***Линией в пространстве*** называют пересечение двух поверхностей.

Прямая в пространстве – это пересечение двух плоскостей $\Rightarrow$

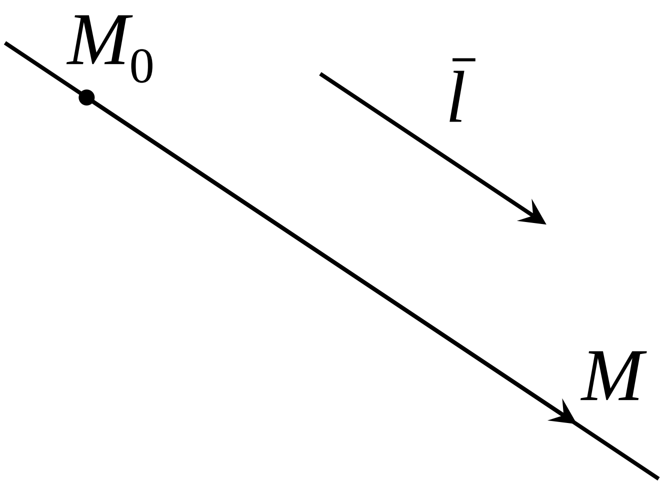
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

2. Параметрические уравнения прямой.

Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, параллельно вектору $\bar{l}=\{m, n, p\}$.

Вектор, параллельный прямой, называют ***направляющим вектором*** этой прямой.

Пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка прямой.



$$\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$$

$\overline{M_0M}$ и $\bar{l}$ – коллинеарны $\Rightarrow$

$$\overline{M_0M} = t\bar{\ell} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \\ z - z_0 = t \cdot p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + t \cdot m \\ y = y_0 + t \cdot n \\ z = z_0 + t \cdot p \end{cases}$$

3. Канонические уравнения прямой.

Пусть направляющий вектор $\bar{l} = \{m, n, p\}$ не параллелен ни одной из координатных осей (т.е. $m \neq 0$, $n \neq 0$, $p \neq 0$).

$$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot m \\ y - y_0 = t \cdot n \\ z - z_0 = t \cdot p \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}}$$

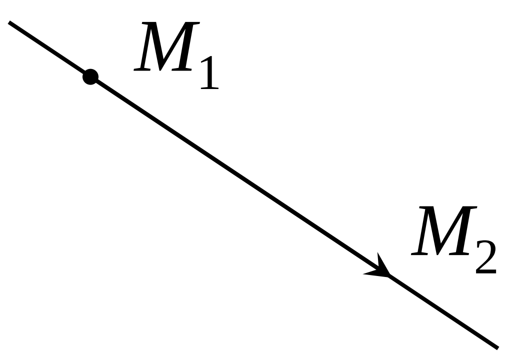
x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой точки на прямой,
m, n, p – координаты направляющего вектора прямой.

4. Уравнения прямой, проходящей через две точки.

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$

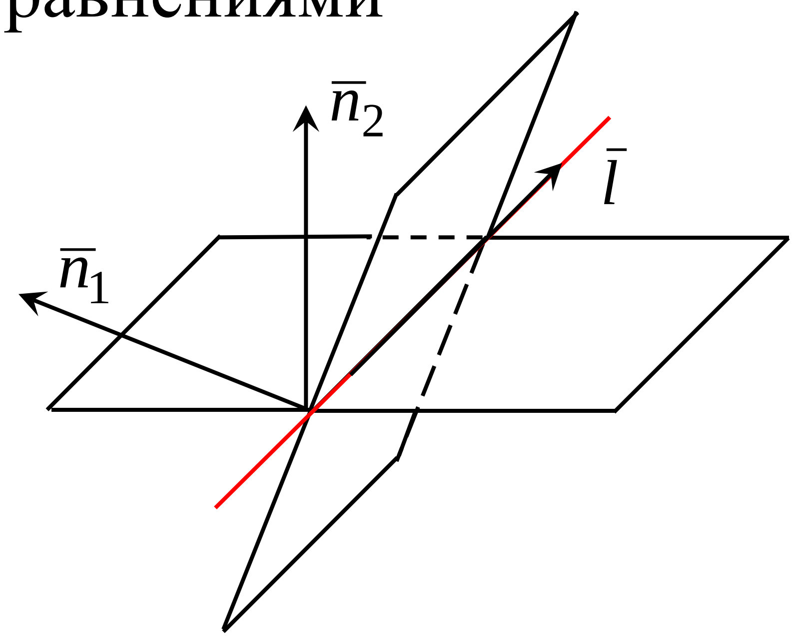
$$\bar{l} = \overline{M_1 M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}}$$



Пусть прямая задана общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



Запишем канонические уравнения этой прямой:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

x_0, y_0, z_0 – координаты некоторой точки на прямой, любое частное решение данной системы уравнений

m, n, p – координаты направляющего вектора $\bar{l}$

$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ – нормальный вектор первой плоскости

$\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ – нормальный вектор второй плоскости

$\bar{n}_1 \perp \bar{l}, \quad \bar{n}_2 \perp \bar{l} \quad \Rightarrow [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$ направлен вдоль прямой $\Rightarrow$

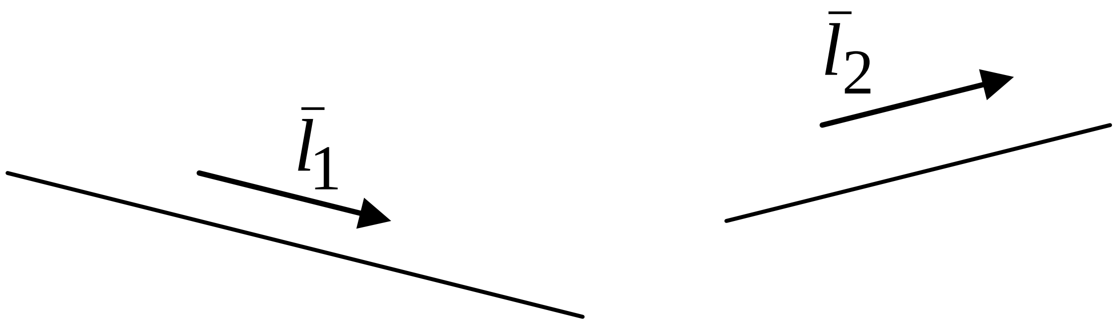
$$\bar{l} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2]$$

Пусть в пространстве даны две различные прямые $\Rightarrow$ они параллельны, или пересекаются, или скрещиваются.

Пусть уравнения прямых:

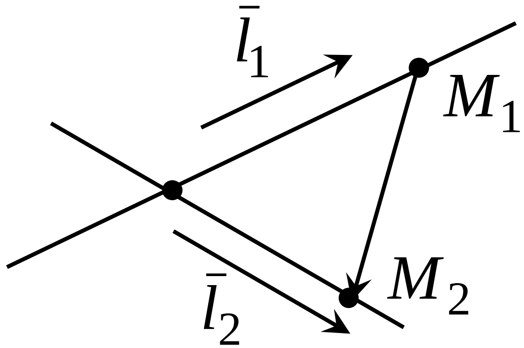
$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \bar{l}_1=\{m_1,\, n_1,\, p_1\} \\ M_1\,(x_1,\, y_1,\, z_1) \end{matrix}$$

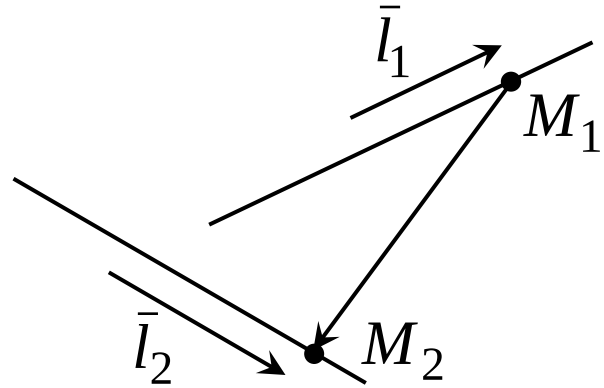
$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \bar{l}_2=\{m_2,\, n_2,\, p_2\} \\ M_2\,(x_2,\, y_2,\, z_2) \end{matrix}$$



Прямые параллельны $\Leftrightarrow \quad \bar{l}_1 \parallel \bar{l}_2$

Пусть прямые пересекаются или скрещиваются.





Проведём вектор $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$

Рассмотрим векторы $\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}$

Прямые пересекаются $\Leftrightarrow \bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}$ – компланарны $\Leftrightarrow (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}) = 0$

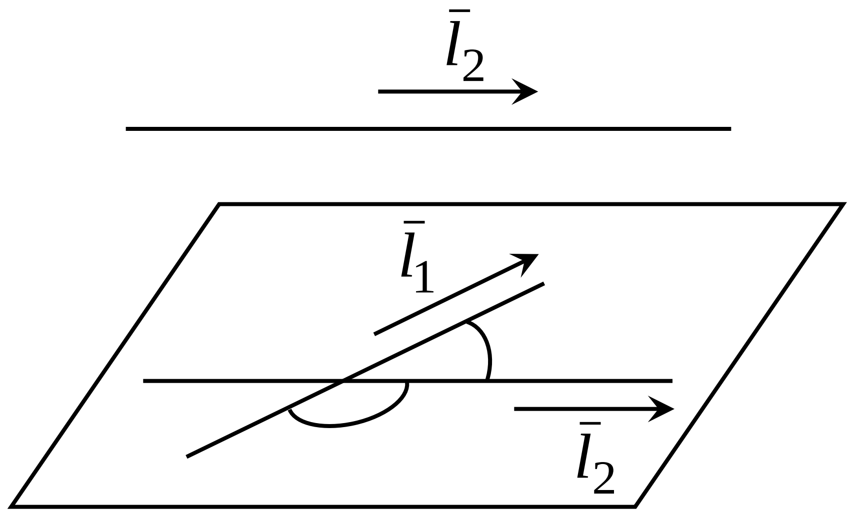
Прямые скрещиваются $\Leftrightarrow \bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}$ – не компланарны $\Leftrightarrow (\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0$

Прямые пересекаются $\Leftrightarrow$ $\bar{l}_1 \nparallel \bar{l}_2$ и $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}) = 0$

Прямые скрещиваются $\Leftrightarrow$ $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \overline{M_1M_2}) \neq 0$

Найдём угол между прямыми в пространстве.

Определение. ***Углом между двумя скрещивающимися прямыми*** называется угол между двумя пересекающимися прямыми, параллельными данным.



Угол между прямыми: $$\cos\varphi = \pm\frac{\left|(\bar{l}_1, \bar{l}_2)\right|}{\left|\bar{l}_1\right| \cdot \left|\bar{l}_2\right|}$$

Найдём расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой

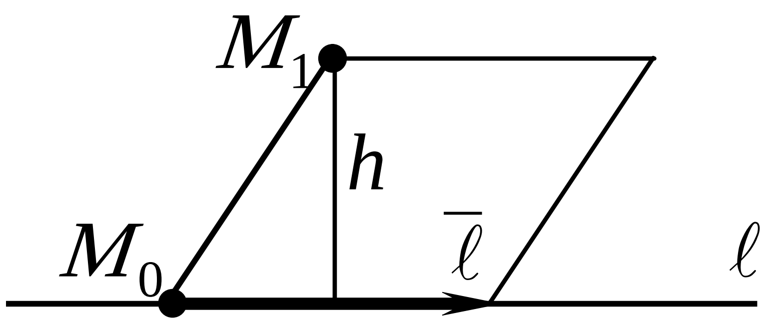
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

$\bar{l} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор

$M_0\ (x_0, y_0, z_0)$ – точка на прямой

Обозначим расстояние от точки M_1 до прямой через h.

Рассмотрим параллелограмм, построенный на векторах $\bar{l}$ и $\overline{M_0 M_1}$.



$$S = h \cdot \left|\bar{\ell}\right| = \left|\left[\bar{\ell},\ \overline{M_0 M_1}\right]\right| \Rightarrow$$

$$h = \frac{\left|\left[\bar{\ell},\ \overline{M_0 M_1}\right]\right|}{\left|\bar{\ell}\right|}$$

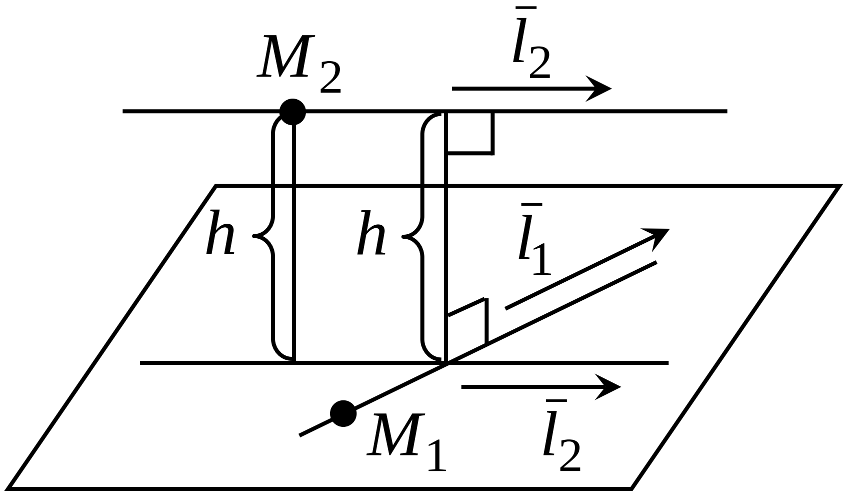
Определение. ***Расстоянием между двумя скрещивающимися прямыми*** называется длина их общего перпендикуляра.

Найдём расстояние между двумя скрещивающимися прямыми :

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{l}_1=\{m_1, n_1, p_1\} \\ M_1(x_1, y_1, z_1) \end{array}$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bar{l}_2=\{m_2, n_2, p_2\} \\ M_2(x_2, y_2, z_2) \end{array}$$

Обозначим расстояние между этими прямыми через h.



Построим плоскость, проходящую через первую прямую параллельно второй.

Тогда h – это расстояние от второй прямой до построенной плоскости $\Rightarrow$

h – это расстояние от M_2 до построенной плоскости

$$\Rightarrow h = |\text{пр}_{\bar{n}} \overline{M_1M_2}| = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{n})|}{|\bar{n}|}$$

$\bar{n}$ – нормальный вектор построенной плоскости

Найдём $\bar{n}$.

Векторы $\bar{l}_1$ и $\bar{l}_2$ параллельны построенной плоскости $\Rightarrow$ $[\bar{l}_1, \bar{l}_2]$ перпендикулярен построенной плоскости.

$$\bar{n} = [\bar{l}_1, \bar{l}_2] \Rightarrow h = \frac{|(\overline{M_1M_2}, [\bar{l}_1, \bar{l}_2])|}{|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|} \Rightarrow h = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{l}_1, \bar{l}_2)|}{|[\bar{l}_1, \bar{l}_2]|}$$

Пусть в пространстве заданы плоскость и прямая.

Возможны следующие случаи:

1. они параллельны;
2. прямая лежит в плоскости;
3. прямая и плоскость пересекаются в одной точке.

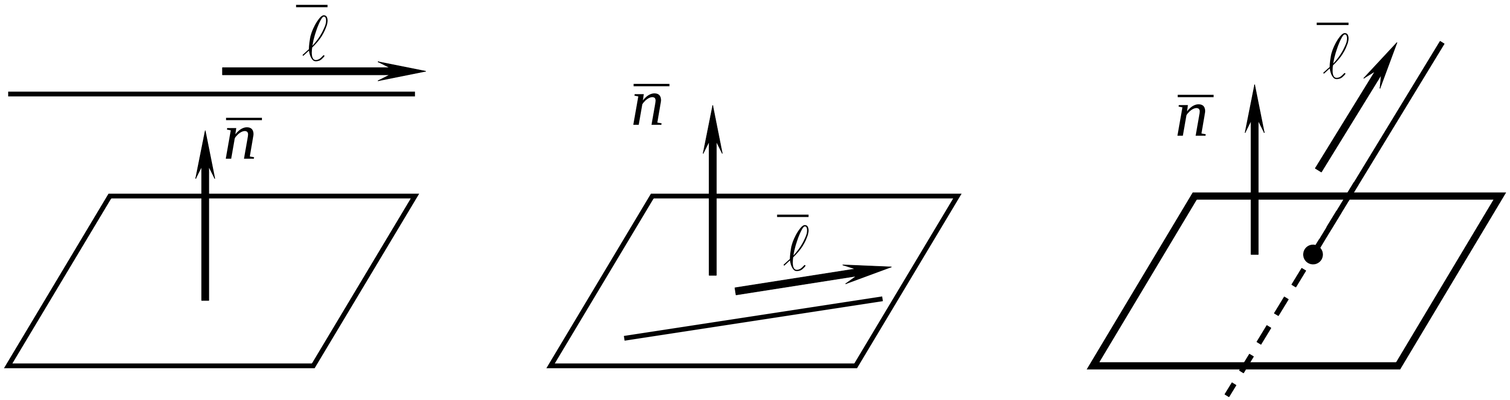
Пусть уравнения плоскости и прямой:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

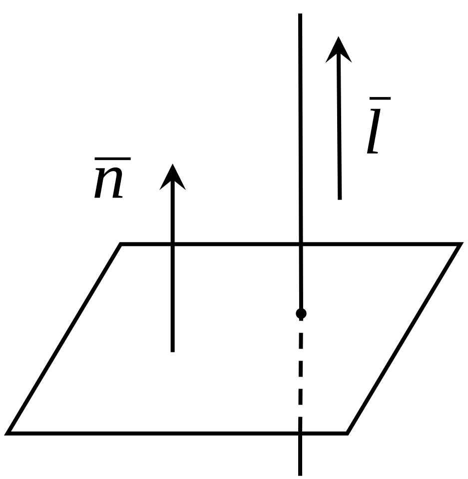
Тогда

$\bar{n} = \{A, B, C\}$ – нормальный вектор плоскости

$\bar{l} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор прямой

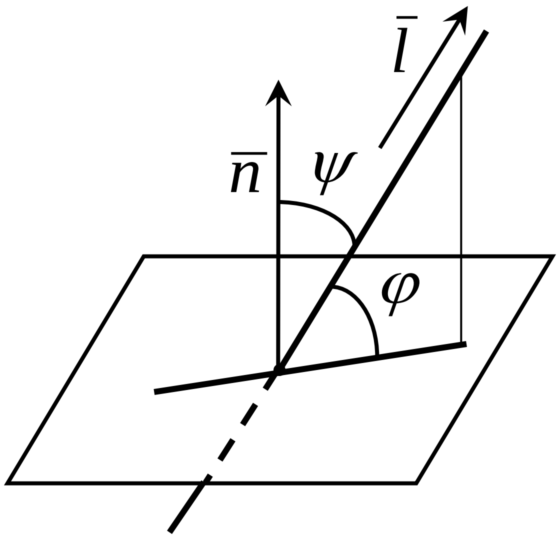


Прямая и плоскость параллельны или прямая лежит в плоскости $\Leftrightarrow \quad \overline{n} \perp \overline{l} \quad \Leftrightarrow \quad (\overline{n}, \overline{l}) = 0$



Прямая и плоскость перпендикулярны $\Leftrightarrow \quad \overline{n} \parallel \overline{l}$

Определение. ***Углом между прямой и плоскостью*** называют угол между прямой и её проекцией на плоскость.



Прямая и её проекция на плоскость образуют два смежных угла.

Найдём острый угол между прямой и плоскостью.

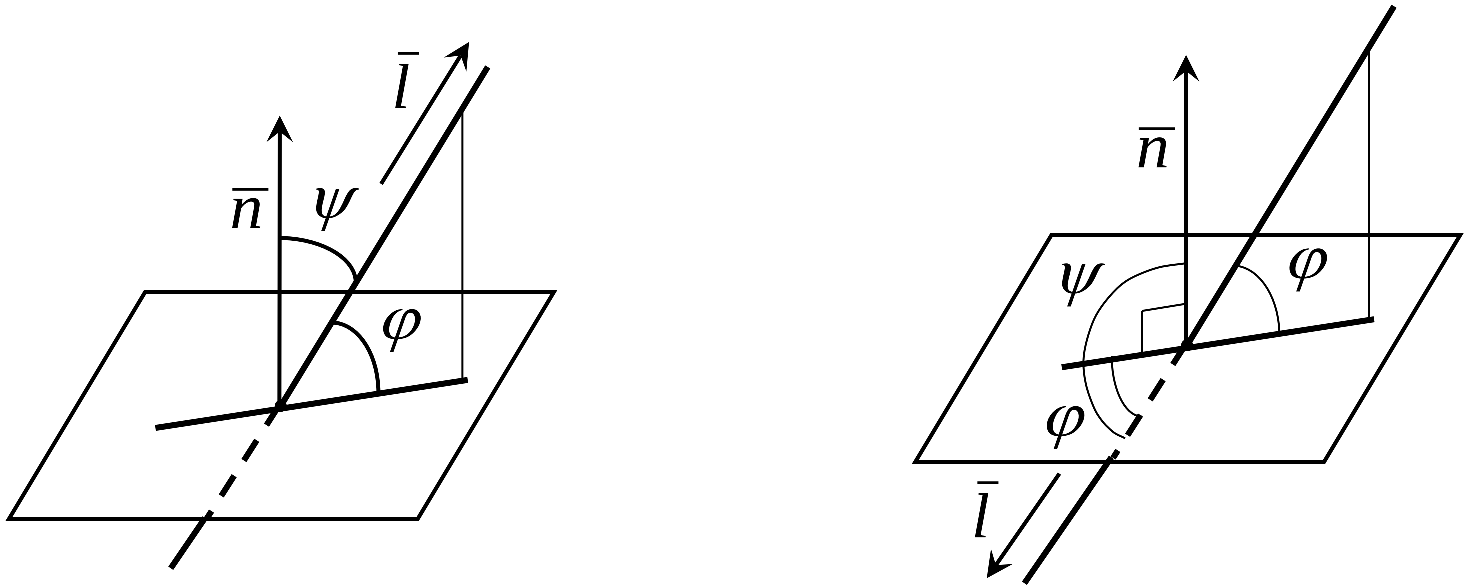
Обозначим φ – угол между прямой и плоскостью,

ψ – угол между векторами $\bar{n}$ и $\bar{l}$.

$$\cos\psi = \frac{(\bar{n}, \bar{l})}{|\bar{n}| \cdot |\bar{l}|}$$

Для нахождения угла φ рассмотрим два случая:

1) угол ψ – острый; 2) угол ψ – тупой.



1) $\psi = 90^\circ - \varphi \;\Rightarrow\; \cos\psi = \cos(90^\circ - \varphi) = \sin\varphi$

2) $\psi = 90^\circ + \varphi \;\Rightarrow\; \cos\psi = \cos(90^\circ + \varphi) = -\sin\varphi$

Тогда $\sin\varphi = |\cos\psi| \;\Rightarrow\; \sin\varphi = \dfrac{|(\bar{n}, \bar{l})|}{|\bar{n}|\cdot|\bar{l}|}$