

# **Линейная алгебра и аналитическая геометрия**

## **Глава 3. Линейные пространства**

Преподаватель – доцент кафедры ВМ ТПУ, к.ф.-м.н.  
Шерстнёва Анна Игоревна

*Определение.* Множество  $L$  называется *вещественным линейным пространством*, если для любых элементов  $a, b, c \in L$  и для любых чисел  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$  выполняются условия:

1.  $a + b = b + a$ ;

2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;

3. Существует нулевой элемент  $o$ , что  $a + o = a$ ;

4. Для любого  $a \in L$  существует противоположный элемент  $-a \in L$  такой, что  $a + (-a) = o$ ;

5.  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ ;

6.  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ ;

7.  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ ;

8.  $1a = a$ .

**Лемма 1.1.** Пусть  $L$  – вещественное линейное пространство. Тогда для любых элементов  $a, b \in L$  и любых действительных чисел  $\alpha, \beta$  справедливы следующие утверждения:

1.  $0 \cdot a = o,$

2.  $\alpha \cdot o = o;$

3.  $(-\alpha) \cdot a = -\alpha a;$

4.  $\alpha \cdot (-a) = -\alpha a;$

5.  $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha a;$

6.  $\alpha \cdot (a - b) = \alpha \cdot a - \alpha \cdot b$

7.  $(\alpha - \beta) \cdot a = \alpha \cdot a - \beta \cdot a$

1.  $a + b = b + a$ ;
2.  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
3. Существует нулевой элемент  $o$ , что  $a + o = a$ ;
4. Для любого  $a \in L$  существует противоположный элемент  $-a \in L$  такой, что  $a + (-a) = o$ ;
5.  $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ ;
6.  $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$ ;
7.  $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$ ;
8.  $1a = a$ .

Пусть  $M$  – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа,

$m_1, m_2, \dots, m_k \in M$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  – числа.

Тогда  $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k$  –  
*линейная комбинация* элементов  $m_1, m_2, \dots, m_k$ .

Если  $m = \alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \dots + \alpha_k \cdot m_k$ , то говорят,  
что  $m$  *линейно выражается* через элементы  $m_1,$   
 $m_2, \dots, m_k$ .

$L$  – линейное пространство,  $a_1, a_2, \dots, a_k \in L$ .

*Определение.* Говорят, что векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$  **линейно зависимы**, если существуют числа  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ , не все равные нулю одновременно, такие, что  $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = 0$  (нулевому элементу линейного пространства  $L$ ).

Если же равенство  $\alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_k \cdot a_k = 0$  возможно только при условии  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ , то векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$  называют **линейно независимыми**.

*Лемма 2.1.* Векторы  $a_1, a_2, \dots, a_k$  линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

*Доказательство.*

Смотри лемму о линейной зависимости строк (столбцов) матрицы (§4, глава 1) или лемму 3.1 о линейной зависимости свободных векторов (§3, глава 2).

## Примеры.

$$1. \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. g_1(x) = 1, g_2(x) = x, g_3(x) = x^2, g_4(x) = (1 + x)^2.$$

$$3. \mathbf{a}_1 = (2; -3; 1), \mathbf{a}_2 = (3; -1; 5), \mathbf{a}_3 = (1; -4; 3).$$



*Определение.* Максимальная линейно независимая система векторов линейного пространства называется *базисом* этого линейного пространства.

$e_1, e_2, \dots, e_n \in L$  – базис, если

- 1)  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – линейно независимы;
- 2)  $e_1, e_2, \dots, e_n, a$  – линейно зависимы  
для любого  $a$  из  $L$ .

**Теорема 3.1.** Любые два базиса линейного пространства состоят из одного и того же числа векторов.

Если в линейном пространстве  $L$  существует базис из  $n$  векторов, то пространство называют **конечномерным**, а  $n$  называют **размерностью** линейного пространства.

$$\dim L = n$$

Если в линейном пространстве  $L$  для любого натурального  $n$  можно найти линейно независимую систему из  $n$  векторов, то пространство называют **бесконечномерным**.

$$\dim L = \infty$$

**Теорема 3.2 (о базисе).** Каждый вектор линейного пространства линейно выражается через любой его базис, причем единственным образом.

*Доказательство.*

Доказательство этой теоремы полностью совпадает с доказательством теоремы 3.6 (глава 2, §3).

Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – базис,

$a$  – произвольный вектор

$$\Rightarrow a = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \dots + \alpha_n \cdot e_n$$

Коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  называют **координатами** вектора  $a$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$

**Теорема 3.3.** 1) Если вектор  $a$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , а вектор  $b$  имеет в том же базисе координаты  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ , то вектор  $a + b$  будет иметь в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}$ .

2) Если вектор  $a$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , то для любого числа  $\lambda \in \mathbb{R}$  вектор  $\lambda a$  будет иметь в том же базисе координаты  $\{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n\}$ .

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{По условию } a &= \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n, \\ b &= \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } a + b &= (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + \\ &\quad + (\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n) = \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) e_1 + (\alpha_2 + \beta_2) e_2 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) e_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{и } \lambda a &= \lambda(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \\ &= \lambda \alpha_1 e_1 + \lambda \alpha_2 e_2 + \dots + \lambda \alpha_n e_n \end{aligned}$$

**Теорема 4.1.** Пусть  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  – два базиса линейного пространства  $L$ . Причем

$$e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_2 + \dots + t_{n1}e_n,$$

$$e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_2 + \dots + t_{n2}e_n,$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_2 + \dots + t_{nn}e_n.$$

Если вектор  $a$  имеет в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  координаты  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , а в базисе  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  – координаты  $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ , то справедливо  **$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}$** ,

где  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$  –

так называемая матрица перехода от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ .

Пусть  $L$  – вещественное линейное пространство,  $L_1$  – непустое подмножество в  $L$ .

*Определение.*  $L_1$  называется *подпространством* линейного пространства  $L$ , если оно само образует линейное пространство относительно операций, определенных на  $L$ .

***Теорема 5.1 (критерий подпространства).*** Пусть  $L$  – вещественное линейное пространство,  $L_1$  – непустое подмножество в  $L$ .  $L_1$  является подпространством линейного пространства  $L$  тогда и только тогда, когда для любых элементов  $a, b \in L_1$  и любого действительного  $\alpha$  выполняются условия:

- 1)  $a - b \in L_1$ ;
- 2)  $\alpha \cdot a \in L_1$ .

*Пример.*  $M$  – множество решений системы линейных однородных уравнений с  $n$  неизвестными.

Покажем, что  $M$  – линейное пространство.

Для этого покажем, что  $M$  – подпространство  $\mathbf{R}^n$ .

По свойству решений СЛОУ (параграф 6, глава 1) линейная комбинация решений – также решение  $\Rightarrow$

для любых  $a, b \in M$  и любого действительного  $\alpha$  :

$a - b$  и  $\alpha \cdot a$  являются решениями  $\Rightarrow$

$a - b \in M$  и  $\alpha \cdot a \in M$ .

По критерию подпространства  $M$  – подпространство  $\mathbf{R}^n$ , то есть само линейное пространство.

Базисом пространства  $M$  является ФСР.



$L^{(n)}$  – линейное пространство размерности  $n$ .

*Определение.* Отображение  $f : L^{(n)} \rightarrow L^{(n)}$  называется **линейным оператором** линейного пространства  $L^{(n)}$ , если для  $\forall x, y \in L^{(n)}$  и  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$$1) f(x + y) = f(x) + f(y),$$

$$2) f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

*Замечание.*  $f(o) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = o$

Пусть  $f$  – линейный оператор пространства  $L^{(n)}$ ,  
 $e_1, e_2, \dots, e_n$  – некоторый базис  $L^{(n)}$ .

Любой вектор линейно выражается через базис  $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ &\dots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned} \quad (7.1)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{– матрица линейного оператора в базисе } e_1, e_2, \dots, e_n$$

$$\text{Из (7.1)} \Rightarrow (f(e_1) f(e_2) \dots f(e_n)) = (e_1 e_2 \dots e_n) \cdot A \quad (7.2)$$

$\mathbb{R}^n[x]$ ,  $f$  – оператор дифференцирования

Базис  $1, x, x^2, x^3, \dots, x^{n-1}$ ,  $\dim \mathbb{R}^n[x] = n$

$$f(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$f(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

...

$$f(x^{n-1}) = (n-1)x^{n-2} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \dots + (n-1) \cdot x^{n-2} + 0 \cdot x^{n-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема 7.1.** Существует взаимно однозначное соответствие между множеством линейных операторов  $n$ -мерного линейного пространства и множеством квадратных матриц порядка  $n$ .

*Определение.* Если  $f$  – линейный оператор линейного пространства  $L^{(n)}$ , то  $f(x)$  называют **образом** вектора  $x \in L^{(n)}$ .

Пусть  $f$  – линейный оператор пространства  $L^{(n)}$ ,  
 $A$  – матрица линейного оператора  $f$ ,  
 $e_1, e_2, \dots, e_n$  – некоторый базис  $L^{(n)}$ .

**Теорема 8.1.** Если  $A$  – матрица линейного оператора  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и вектор  $x$  имеет координаты  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в этом же базисе, то координаты  $y_1, y_2, \dots, y_n$  вектора  $f(x)$  находятся следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad Y = A \cdot X.$$

$$\begin{aligned} f(e_1) &= a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n \\ f(e_2) &= a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n \\ &\quad \dots \\ f(e_n) &= a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Лемма 9.1.** Если для любого столбца  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$

имеет равенство  $AX = BX$ , где  $A$  и  $B$  – квадратные матрицы порядка  $n$ , то  $A = B$ .

**Теорема 9.2.** Если  $A$  – матрица линейного оператора  $f$  в базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , то матрица  $B$  этого линейного оператора в базисе  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  имеет вид:

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T,$$

где  $T$  – матрица перехода от базиса  $e_1, e_2, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ .

*Определение.* Ненулевой вектор  $x \in L^{(n)}$  называется **собственным вектором** линейного оператора  $f$ , если существует такое  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ , что

$$f(x) = \lambda_0 x,$$

при этом  $\lambda_0$  называют **собственным значением** линейного оператора и говорят, что собственный вектор  $x$  *относится* к собственному значению  $\lambda_0$ .

**Теорема 10.1.** Собственный вектор линейного оператора относится к единственному собственному значению.



***Теорема 10.2 (свойство собственных векторов).***

Если  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – линейно независимые собственные векторы линейного оператора, относящиеся к одному и тому же собственному значению, то любая нетривиальная линейная комбинация этих векторов является собственным вектором, относящимся к этому же собственному значению.

***Теорема 10.3.*** Собственные векторы  $x_1$  и  $x_2$  линейного оператора, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы.

***Теорема 10.4.*** Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к его попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Пусть  $f$  – линейный оператор пространства  $L^{(n)}$ ,  
 $A$  – его матрица в некотором базисе  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

*Определение.* Матрица  $\lambda E - A$  называется **характеристической матрицей** оператора  $f$ .

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

– многочлен от  $\lambda$  степени  $n$ .

*Определение.* Определитель  $|\lambda E - A|$  называется **характеристическим многочленом** оператора  $f$ .

**Теорема 11.1.** Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса, то есть является инвариантом линейного оператора.

**Определение.** Уравнение  $|\lambda E - A| = 0$  называют **характеристическим уравнением** линейного оператора, а корни этого уравнения – **характеристическими корнями** линейного оператора.

**Теорема 11.2.** 1) Любое собственное значение линейного оператора является его характеристическим корнем.

2) Любой вещественный характеристический корень линейного оператора является его собственным значением.

*Определение.* Оператор называется **диагонализируемым**, если существует базис, относительно которого его матрица диагональная.

***Теорема 12.1 (критерий диагонализируемости линейного оператора).*** Оператор является диагонализируемым тогда и только тогда, когда в пространстве существует базис, каждый вектор которого является собственным вектором этого оператора.

*Определение.* Пусть  $L^{(n)}$  – вещественное линейное пространство. Отображение, ставящее в соответствие каждой паре векторов  $x, y \in L^{(n)}$  некоторое вещественное число, обозначаемое  $(x, y)$ , называется **скалярным произведением** векторов, если для  $\forall x, y \in L^{(n)}$  и  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  выполняется:

1)  $(x, y) = (y, x)$ ;

2)  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ;

3)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ;

4)  $(x, x) \geq 0$ , причём  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

*Замечания.* 1)  $(x, \alpha y) = (\alpha y, x) = \alpha(y, x) = \alpha(x, y)$

2)  $(x, y_1 + y_2) = (y_1 + y_2, x) = (y_1, x) + (y_2, x) = (x, y_1) + (x, y_2)$

3)  $(x, o) = (x, 0 \cdot y) = 0 \cdot (x, y) = 0$

*Определение.* Вещественное линейное пространство, в котором определено скалярное произведение векторов, называется *евклидовым*.

$E^{(n)}$

*Определение.* Векторы  $x, y \in E^{(n)}$  называются *ортогональными*, если  $(x, y) = 0$ .

Система векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n \in E^{(n)}$  называется *ортогональной*, если эти векторы попарно ортогональны.

*Теорема 14.1.* Любая ортогональная система ненулевых векторов является линейно независимой.

## *Процесс ортогонализации векторов Грама – Шмидта*

Пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  – линейно независимая система векторов пространства  $E^{(n)}$ .

Построим с помощью этой системы векторов ортогональную систему ненулевых векторов  $b_1, b_2, \dots, b_n$

*Замечание.*  $b_1, b_2, \dots, b_n$  – ортогональная система ненулевых векторов  $\Rightarrow$  по теореме 14.1 является линейно независимой.

*Определение.* **Длиной** вектора  $x \in E^{(n)}$  называется

$$|x| = \sqrt{(x, x)}$$

Также говорят **модуль** вектора или **норма** вектора.

*Определение.* Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  евклидова пространства называется **ортогональным**, если  $(e_i, e_k) = 0$  при  $i \neq k$ .

Базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  евклидова пространства называется **ортонормированным**, если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$$

*Замечание.* Если  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – ортонормированный базис, то векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  – попарно ортогональны и  $|e_1| = |e_2| = \dots = |e_n| = 1$ .



**Теорема 16.1.** В любом евклидовом пространстве существуют ортонормированные базисы.

**Теорема 17.1 (неравенство Коши–Буняковского).**

Для  $\forall x, y \in E^{(n)}$   $(x, y)^2 \leq (x, x) \cdot (y, y)$ .

**Определение.** Углом между векторами  $x, y \in E^{(n)}$  называется угол, косинус которого равен

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$