# ВАРИАНТ 1

1. ABCDEF – вершины правильного шестиугольника. Равны ли векторы
   a) $4\overline{BC}$ и $2\overline{AD}$
   b) $2\overline{DC}$ и $2\overline{AF}$
2. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q} - 3\bar{r}$ и $\bar{b} = 3\bar{p} + 4\bar{q}$ где $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ - единичные векторы, составляющие между собой попарно углы, равные $\dfrac{\pi}{3}$
3. Даны точки A(1,1,1) и B(4,5,-3). Найти проекцию $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.
4. Даны векторы $\bar{a}$={2,-1,3}, $\bar{b}$={1,-3,2}, $\bar{c}$ =3**i**+2**j**-4**k**. Найти вектор $\bar{x}$, удовлетворяющий условиям $(\bar{x},\bar{a})$=10, $(\bar{x},\bar{b})$=22, $(\bar{x},\bar{c})$=-40
5. Дано: $|\bar{a}|$=1, $|\bar{b}|$ =2, $(\widehat{\bar{a},\bar{b}}) = \dfrac{2}{3}\pi$. Вычислить: $|[2\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}]|$
6. Даны две силы $\overline{F}_1$={2,-1,1} и $\overline{F}_2$={-3,2,-1}, приложенные к точке A(-1,4,2). Определить
   a) момент равнодействующей этих сил относительно начала координат;
   b) углы, составляемые им с координатными осями
7. Дано: A(1,1,2), B(2,3,-1), C(2,-2,4) и D(-1,1,3). Найти:
   a) объем пирамиды ABCD
   b) высоту треугольника BCD, опущенную из вершины D
   c) угол между векторами $\overline{AD}$ и $[\overline{AB}, \overline{AC}]$

ВАРИАНТ 2

1. OABC – параллелограмм. E – точка пересечения его диагоналей, D – середины стороны BC. В базисе из векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$ найти координаты векторов $\overline{BE}$ и $\overline{OD}$.
2. Найти квадрат длины вектора $\overline{a} = 2\overline{p} - 3\overline{q} + 4\overline{r}$, если $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ - единичные векторы, составляющие между собой попарно углы, равные $\frac{2\pi}{3}$
3. Даны точки A(1,-1,3), B(3,-1,1) и C(-1,1,3). Найти:
   a) периметр треугольник ABC
   b) величины его углов
   c) центр тяжести треугольника
4. В плоскости yOz найти вектор $\overline{a}$, перпендикулярный вектору $\overline{b}$={2,-3,4} и имеющий одинаковую с ним длину
5. Дано: $|\overline{a}|=|\overline{b}|$=5, $(\hat{a,b}) = \frac{\pi}{4}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a} - 2\overline{b}, 3\overline{a} + 2\overline{b}$
6. Даны вершины треугольника A(3,-1,2), B(3,0,3) и C(2,-1,1). Найти:
   a) длину высоты, опущенной из вершины A
   b) синус внутреннего угла B
7. Векторы $\overline{a} =$**i**+m**j**-2**k**, $\overline{b}$=2**j**-**k** и $\overline{c} = \{3,-1,2\}$ образуют правую тройку. Объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен 6 кубическим единицам. Найти:
   a) m
   b) угол между векторами $[\overline{a}, \overline{b}]$ и $\overline{c}$
   c) $Пр_{a+b}\overline{c}$

ВАРИАНТ 3

1. Дан треугольник A(5,-4), B(-1,2), C(5,1). Найти точки, в которых его медианы делятся на три равные части.
2. Найти $|\overline{a}|$, если $\overline{a} = 2\overline{p} + \overline{q}$, $|\overline{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\overline{q}|$ =3, $(\overline{p}, \hat{\ } \overline{q}) = 135^0$.
3. Доказать, что четырехугольник с вершинами A(-3,5,6), B(1,-5,7), C(8,-3,-1), D(4,7,-2) - квадрат.
4. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a}$={1,1,2}, и $\overline{b}$=**i**+**k** образуют тупой угол с осью Oy. Найти его координаты, зная что $|\overline{x}| = 2\sqrt{3}$
5. Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\overline{a}|$=5, $|\overline{b}|$=2, вычислить $|[3\overline{a} + 2\overline{b}, \overline{a} - \overline{b}]|$
6. Сила $\overline{F}_1$= 2**i**+3**j**-**k** приложена к точке A(-2,-1,3). Найти момент этой силы, относительно точки B(3,-2,1) и направляющие косинусы момента.
7. Проверить, лежат ли точки A(1,2,-3), B(0,-1,2), C(3,2,1) и D(0,1,-3) в одной плоскости. Найти:
   a) Площадь треугольника ABC
   b) $\text{Пр}_{[\overline{AB},\overline{AC}]}\left(\overline{AC} + \overline{AD}\right)$
   c) центр тяжести треугольника ACD

ВАРИАНТ 4

1. Вектор $\overline{a}$ составляет с координатными осями Oy и Oz углы $\beta=120^0$, $\gamma=45^0$. Вычислить его координаты при условии, что $|\overline{a}|=6$.
2. Найти угол, образованный единичными векторами $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, если известно, что векторы $\overline{a}=\mathbf{e_1}+2\mathbf{e_2}$ и $\overline{b}=5\mathbf{e_1}-4\mathbf{e_2}$ перпендикулярны.
3. Даны векторы $\overline{a}=\{4,-2,-4\}$, $\overline{b}=\{6,-3,2\}$. Вычислить:

   a) $(2\overline{a}-3\overline{b},\overline{a}+2\overline{b})$

   b) $|2\overline{a}-\overline{b}|$
4. Даны векторы $\overline{a}=\{2,1,1\}$, $\overline{b}=\{1,3,1\}$, $\overline{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\overline{d}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. Найти вектор $\overline{x}$, удовлетворяющий условиям $(\overline{x},\overline{a})=2$, $(\overline{x},\overline{b})=5$, $(\overline{x},\overline{c})=-7$, $(\overline{x},\overline{d})=14$
5. Доказать, что при любых $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ векторы $\overline{a}-\overline{b}, \overline{b}-\overline{c}, \overline{c}-\overline{a}$ - компланарны.
6. Даны векторы $\overline{a}=\{-1,3,-3\}$, $\overline{b}=2\mathbf{i}+2\mathbf{k}$. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к ним, если модуль вектора $\overline{x}$ равен площади треугольника, построенного на $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
7. Точки A(-2,1,-3), B(3,4,4), C(5,6,0) и D(5,6,e) служат вершинами параллелепипеда, объем которого равен 16 куб. ед. Найти:

   a) e

   b) высоту параллелепипеда, опущенную из точки D

   c) косинус угла BAC.

# ВАРИАНТ 5

1. Проверить, являются ли точки A(-1,2,3), B(2,-1,1), C(1,-3,-1) и D(-5,3,3) вершинами трапеции
2. В треугольнике даны длины его сторон |BC|=5, |CA|=6, |AB|=7. Найти $(\overline{AB}, \overline{BC})$.
3. Найти проекцию вектора $\overline{m} = \{\sqrt{2}, -3, -5\}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox и Oz углы $\alpha=45^0$, $\gamma=60^0$, а с осью Oy острый угол $\beta$.
4. Найти вектор $\overline{x}$ зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}=\{1,-1,3\}$, $\overline{b}=\{3,-2,5\}$ и удовлетворяет условию $(\overline{x}, 2\mathbf{i}-2\mathbf{j}-\mathbf{k})= -7$.
5. Найти $|[\overline{a}, \overline{b}]|$, если $|\overline{a}|=10$, $|\overline{b}|=2$, $(\overline{a}, \overline{b}) = 12$.
6. Даны две силы $\overline{F}_1=\{1,0,1\}$ и $\overline{F}_2= -3\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, приложенные к точке A(0,1,-2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно начала координат
7. Дано: A(1,1,1), B(2,3,4), C(4,3,2) и D(-4,-3,-2). Найти:
   a) объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB}, 2\overline{BC}, \overline{CD}$
   b) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{CA}$
   c) центр тяжести треугольника ABC.

ВАРИАНТ 6

1. Отрезок AB точками C(1,2) и D(3,4) разделен на три равные части. Найти координаты точек A и B.
2. Найти $|\overline{a}|$, если $\overline{a} = 3\overline{p} + 4\overline{q}$, $|\overline{p}|$=1, $|\overline{q}|$=2, $(\widehat{p,q}) = 60^0$.
3. Даны векторы $\overline{a}$={1,-3,2}, $\overline{b}$=2**i**+**k**. Найти:
   a) $Пр_{\overline{k}}\left(2\overline{a} - \overline{b}\right)$
   b) $Cos\,(\widehat{a,b})$
   c) вектор, параллельный биссектрисе угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
4. Найти координаты вектора $\overline{x}$, коллинеарного вектору $\overline{a}$={2,1,-1}, и удовлетворяющего условию $(\overline{x},\overline{a})$=3.
5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{m} = 6\overline{a} - 3\overline{b}$, $\overline{n} = 3\overline{a} + 2\overline{b}$, если $|\overline{a}|$=3, $|\overline{b}|$=5, $(\widehat{a,b}) = \frac{\pi}{6}$.
6. Вектор $\overline{x}$, перпендикулярный к векторам $\overline{a}$={0,0,3} и $\overline{b}$={8,-15,3}, образует острый угол с осью Ox. Зная, что модуль вектора $\overline{x}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$, найти его координаты
7. Дано: A(2,2,2), B(4,3,3), C(4,5,4) и D(5,5,6). Найти:
   a) высоту пирамиды, опущенной из вершины A
   b) угол, образованный векторами $[\overline{AB},\overline{AD}]$ и $\overline{CB}$
   c) $(\overline{AB},\overline{BC}) + (\overline{AB},\overline{DB},\overline{CB})$

ВАРИАНТ 7

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(4,1), B(7,5), C(-4,7). Вычислить длину биссектрисы AD угла A.
2. Вычислить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} + \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} - 2\overline{n}$, если векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ единичные и $(m \hat{,} n) = 60^0$
3. Найти проекцию $\overline{a}$=**i**-2**j**+2**k** на ось, образующие равные острые углы с тремя координатными осями
4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$={2,3,-1} и $\overline{b}$={1,-2,3} и удовлетворяет условию ($\overline{x}$,2**i**-**j**+**k**)=-6.
5. Вычислить $|[\overline{a}, \overline{b}]|$, если $\overline{a} = 3\overline{p} - 4\overline{q}$, $\overline{a} = \overline{p} + 3\overline{q}$, $|\overline{p}| = \sqrt{2}$, $|\overline{q}|$=3, $(p \hat{,} q) = 45^0$.
6. Даны две силы $\overline{F}_1$=**i**-3**j**+2**k** и $\overline{F}_2$={1,2,-1}, приложенные к точке A(1,2,-1). Определить:
   a) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки B(0,1,1);
   b) углы, составляемые этим моментом с координатными осями
7. Дано: A(2,2,2), B(4,0,3), C(0,1,0) и D(0,6,0). Найти:
   a) высоту пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB} + \overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}$, если основанием является треугольник ABD
   b) центр тяжести треугольника ABD
   c) $Пр_{\overline{BD}}\left(\overline{AC} + \overline{BC}\right)$

ВАРИАНТ 8

1. Доказать, что векторы $\overline{a}$={3,2,1}, $\overline{b}$={4,-4,5}, $\overline{c}$={2,-3,1} линейно зависимы, и найти разложение вектора $\overline{d}$={8,-1,0} по векторам $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$
2. Найти $|\overline{a}|^2$, если $\overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q}$, $|\overline{p}|$=2, $|\overline{q}|$=5, $(\widehat{p,q}) = 120^0$.
3. Определить внутренние углы треугольника с вершинами A(1,2,3), B(3,0,4), C(2,1,3)
4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен вектору $\overline{a}$={3,9,4} и удовлетворяет условиям ($\overline{x}$,2**i**+7**j**+3**k**)=1 и ($\overline{x}$,**i**+5**j**+3**k**)=2.
5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{m} = \overline{a} + 2\overline{b}$, $\overline{n} = \overline{a} - 3\overline{b}$, если $|\overline{a}|$=4, $|\overline{b}|$=7, $(\widehat{a,b}) = 150^0$.
6. Найти координаты вектора $\overline{x}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$={4,-2,-3} и $\overline{b}$=**j**+3**k**, образует с ортом **j** тупой угол и его длина равна удвоенной площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.
7. Дано: A(0,0,1), B(2,3,5), C(6,2,3) и D(3,7,2). Доказать, что точки не лежат в одной плоскости. Найти:
   a) объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AC} + \overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AD}$
   b) высоту треугольника BDC, проведенную из вершины C.

# ВАРИАНТ 9

1. В треугольнике ABC сторона AC разделена точками $M_1$, $M_2$, $M_3$ на четыре равные части, а сторона BC – точками $N_1$, $N_2$ на три равные части. Найти вектор $\overline{N_1M_3}$, если $\overline{AB} = \overline{p},\ \overline{AC} = \overline{q}$
2. Найти $(\overline{a}, \overline{b})$, если $\overline{a} = 2\overline{p} + 3\overline{q}$, $\overline{b} = \overline{p} - \overline{q}$, $|\overline{p}| = \sqrt{2}$, $|\overline{q}| = 1$, $(\overline{p}, \hat{\ } \overline{q}) = 45^0$.
3. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC, если A(1,3,5), B(3,5,6), C(4,7,5). Вычислить внутренние углы этого треугольника.
4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$={1,-1,3} и $\overline{b}$={3,-2,5}, $|\overline{x}| = 3\sqrt{2}$, образует острый угол с осью Oy.
5. Упростить $(\overline{a} - \overline{b}, \overline{a} - \overline{b} - \overline{c}, \overline{a} + 2\overline{b} - \overline{c})$
6. Даны три вершины параллелограмма A(3,-2,4), B(4,0,3), C(7,1,5). Найти:
   a) длину его высоты, опущенной из вершины C;
   b) центр тяжести треугольника ABC
   c) четвертую вершину D
7. Показать, что векторы $\overline{a}$= **-i**+3**j**+2**k**, $\overline{b}$={-2,-3,-4}, $\overline{c}$={-3,12,6} компланарны. Найти:
   a) $\left|\left[\overline{c}, [\overline{a}, \overline{b}]\right]\right|$
   b) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{b}$ и $\overline{c}$
   c) $\left(\overline{a} + \overline{b}, \left[\overline{c}, [\overline{a} + \overline{b}]\right]\right)$

ВАРИАНТ 10

1. Даны три последовательные вершины параллелограмма A(1,1), B(2,2), C(3,-1). Найти
   a) его четвертую вершину D
   b) центр тяжести треугольника ABC
2. Какой угол образуют векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если $\overline{a} = \overline{p} + 2\overline{q}$ и $\overline{b} = 3\overline{p} - 4\overline{q}$, $|\overline{p}|=2$, $|\overline{q}|=2$, $(p\hat{,}q) = 60^0$
3. Даны векторы $\overline{a}$={4,-2,-4}, $\overline{b}$={6,-3,2}. Вычислить:
   a) $Пр_{\overline{a}+\overline{b}}\left(\overline{a} - 2\overline{b}\right)$
   b) $Cos\,(a\hat{,}b)$
4. В плоскости XoZ найти вектор, перпендикулярный вектору $\overline{a}$={3,2,7}, длина которого равна $\sqrt{58}$
5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{m} = 3\overline{a} - 2\overline{b}$, $\overline{n} = \overline{a} + 5\overline{b}$, если $|\overline{a}|$=4, $|\overline{b}|$=1, $(a\hat{,}b) = 150^0$
6. Даны две силы $\overline{F}_1$=**i**+**j**+**k** и $\overline{F}_2$={-1,0,2}, приложенные к точке A(0,2,1). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно начала координат.
7. Дано: A(1,1,2), B(2,-3,4), C(2,3,1) и D(-1,1,3). Найти:
   a) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{BC} + \overline{BD}, \overline{BC}, \overline{BD} + \overline{AC}$
   b) $Пр_{\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]}\left(\overline{AD}\right)$
   c) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B

## ВАРИАНТ 11

1. Найти числа α, β, γ, если

   $\overline{AB} = 4\overline{p} + 2\beta\overline{q} + \gamma\overline{r}$

   $\overline{CB} = \alpha\overline{p} - 9\overline{q} - 2\gamma\overline{r}$

   $\overline{CA} = 3\alpha\overline{p} + \beta\overline{q} + 6\overline{r}$

2. При каком α вектор $\overline{a} = \overline{p} + \alpha\overline{q}$ перпендикулярен вектору $\overline{b} = 5\overline{p} - 4\overline{q}$, если $|\overline{p}|=|\overline{q}|=3$, $(\widehat{p,q}) = 60^0$

3. Показать, что четырехугольник с вершинами A(4,0,8), B(5,2,6), C(3,1,4), D(2,-1,6) является квадратом.

4. Даны два вектора $\overline{a}=\{1,2,5\}$, $\overline{b}=\{3,-5,7\}$. Найти вектор $\overline{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Oz и удовлетворяет условиям $(\overline{x},\overline{a})=3$, $(\overline{x},\overline{b}) = -2$.

5. Найти $(\overline{a},\overline{b})$, если $|\overline{a}|=3$, $|\overline{b}|=26$, $|[\overline{a},\overline{b}]|=72$

6. Дано: B(6,3,3), C(6,4,2), D(4,1,4). Найти:

   a) $Пр_{\overline{BD}}[\overline{BC},\overline{CD}]$;

   b) центр тяжести треугольника BCD;

   c) высоту треугольника BCD, опущенную из вершины B

7. Дано: A(3,-2,3), B(1,2,-1), C(1,1,-3) и D(2,3,1). Найти:

   a) высоту пирамиды ABCD, опущенную из точки C

   b) синус внутреннего угла A в треугольнике ABC

   c) косинус внешнего угла B в треугольнике BDC

# ВАРИАНТ 12

1. Даны середины сторон треугольника ABC: $M_1(2,4)$, $M_2(-3,0)$, $M_3(2,1)$. Найти его вершины
2. Единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют угол φ. Найти φ, если векторы $\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $5\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$ перпендикулярны.
3. Найти единичный вектор $\overline{x}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}=\{\frac{1}{4},-2,\frac{1}{3}\}$ и оси Oy
4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}=\{3,-2,1\}$ и $\overline{b}=\{1,2,-3\}$, $|\overline{x}|=\sqrt{5}$ и образует острый угол с осью Oy.
5. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $5\overline{a}+2\overline{b}$, $3\overline{a}+\overline{b}$, если $|\overline{a}|=2$, $|\overline{b}|=\sqrt{3}$, $(a\hat{,}b)=\frac{\pi}{3}$
6. Даны три силы $\overline{F}_1=\{-2,1,0\}$, $\overline{F}_2=4\mathbf{i}-5\mathbf{j}-\mathbf{k}$ и $\overline{F}_3=\{-1,1,3\}$, приложенные к точке C(3,-2,0). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки A(0,2,1).
7. Дано: A(2,-1,-2), B(1,2,1), C(2,3,4) и D(-5,0,-6). Доказать, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Найти:
   a) $Пр_{[\overline{AC},\overline{AD}]}\left(\overline{AB}\right)$
   b) угол между векторами $\overline{AB}+\overline{AC},\overline{DA}$
   c) высоту треугольника ABC, опущенную из точки C

ВАРИАНТ 13

1. Даны две вершины треугольника ABC: A(-4,-1,2), B(3,5,-16). Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середины стороны BC на плоскости Oxz.
2. Даны векторы $\bar{a} = 3\bar{m} - \bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + \bar{n}$, $|\bar{m}|=2$, $|\bar{n}|=3$, $(\widehat{m,n}) = \dfrac{\pi}{3}$. Найти проекцию вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$.
3. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин A(-4,-4,4), B(-3,2,2), C(2,5,1), D(3,-2,2) взаимно перпендикулярны. Найти
   a) внутренний угол при вершине A
   b) периметр этого четырехугольника
4. Найти вектор $\bar{x}$, зная, что он коллинеарен вектору $\bar{a}=\{3,0,4\}$, $|\bar{x}| = 5\sqrt{3}$ образует острый угол с осью Ox.
5. Вычислить $\left|\left[\bar{a} + 2\bar{b}, \bar{b} - \bar{a}\right]\right|$, если $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=4$, $(\widehat{a,b}) = \dfrac{\pi}{2}$
6. Даны три силы $\bar{F}_1$=2**i**-**j**-3**k**, $\bar{F}_2$={3,2,-1} и $\bar{F}_3$= -4**i**+**j**+3**k**, приложенные к точке A(-1,4,2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки O(2,3,-1).
7. Дано: A(2,-1,-2), B(1,2,4), C(2,3,0) и D(5,0,-6). Показать, что точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Найти:
   a) высоту пирамиды ABCD, опущенной из вершины B
   b) угол между векторами $\left[\overline{AC}, \overline{AD}\right]$ *и* $\overline{DB}$

# ВАРИАНТ 14

1. Подобрать число α так, чтобы векторы $\overline{a} = 2\overline{p} + 3\overline{q} + \alpha\overline{r}$, $\overline{b} = \overline{p} + \alpha\overline{q} + 3\overline{r}$, $\overline{c} = \overline{p} + 9\overline{q} - 11\overline{r}$ были линейно зависимы.
2. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{m} - \overline{n}$ и $\overline{b} = \overline{m} + 3\overline{n}$, если $|\overline{m}|$=2, $|\overline{n}|$=3, $(\widehat{m,n}) = 30^0$.
3. Даны три вектора $\overline{a}$={1,-4,8}, $\overline{b}$={4,4,-2}, $\overline{c}$ = {2,3,6}. Найти
   a) проекцию вектора $(2\overline{b} + \overline{c})$ на вектор $\overline{a}$
   b) угол между векторами $2\overline{a} - \overline{b},\ 3\overline{b} - \overline{c}$
4. В плоскости YoZ найти единичный вектор, перпендикулярный вектору $\overline{a}$={-5,3,2} и образующий острый угол с осью Oy.
5. Доказать, что $(\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}) \le |\overline{a}|\ |\overline{b}|\ |\overline{c}|$. В каком случае имеет место знак равенства?
6. Дано A(-2,1,1), B(0,-3,-3), O(-2,-5,-2). Найти:
   a) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины C
   b) вектор, коллинеарный биссектрисе внутреннего угла A
7. Дано: A(1,2,3), B(9,5,4), C(3,0,4) и D(5,2,6). Найти:
   a) длину высоты пирамиды, проведенной из вершины C
   b) угол между векторами $[\overline{AB}, \overline{AC}]$ и осью Oy

ВАРИАНТ 15

1. Может ли вектор образовывать с осями координат углы $\alpha=\frac{\pi}{3}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$, $\gamma=\frac{\pi}{6}$.
2. Найти угол между векторами $\bar{a}=3\bar{m}-\bar{n}$ и $\bar{b}=\bar{m}+2\bar{n}$, если $|\bar{m}|=3$, $|\bar{n}|=2$, $(\widehat{m,n})=30^0$. Единичные векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ образуют угол $\varphi$. Найти $\varphi$, если векторы $\mathbf{e}_1+2\mathbf{e}_2$ и $5\mathbf{e}_1-4\mathbf{e}_2$ перпендикулярны.
3. Даны векторы $\bar{a}=\{2,1,2\}$, $\bar{b}=\{1,-3,2\}$, $\bar{c}=\{3,2,-1\}$. Найти:
   a) проекцию вектора $\left(2\bar{a}+\bar{b}-3\bar{c}\right)$ на вектор $\bar{a}$
   b) единичный вектор биссектрисы угла между угол между $\bar{b}$ и $\bar{c}$
4. Найти единичный вектор $\bar{x}$, перпендикулярный вектору $\bar{a}=\{3,-6,-1\}$ и оси Oy и образующий острый угол с осью Oz
5. Вычислить $\left|[\bar{a},\bar{b}+\bar{a}]\right|$ если $\bar{a}=4\bar{m}+\bar{n}$, $\bar{b}=3\bar{m}+\bar{n}$, $|\bar{m}|=1$, $|\bar{n}|=\sqrt{3}$, $(\widehat{m,n})=\frac{\pi}{3}$.
6. Дано: A(1,-3,-3), B(1,-2,-4), C(-1,-5,-2) и D(-1,1,1). Найти:
   a) косинус угла, образованного векторами $\overline{DA}$ *и* $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$;
   b) высоту треугольника ABC, опущенную из вершины B
7. Дано: A(2,-1,-1), B(5,-1,2), C(3,0,-3) и D(13,-1,-1). Найти:
   a) высоту пирамиды, опущенную на грань ABC
   b) центр тяжести треугольника ABC
   c) $(\overline{AB},\overline{AC}+\overline{AD},\overline{CD})+(\frac{1}{3}\overline{AB},\overline{BC})$

ВАРИАНТ 16

1. В треугольнике ABC точка M – середина AB, N – середина BC. Дано: $\overline{MN} = 4\overline{p} + 3\overline{q}$, $\overline{NB} = \overline{p} + 2\overline{q}$. Найти $\overline{AB}$

2. Даны векторы $\overline{a} = \overline{m} + 2\overline{n}$, $\overline{b} = \overline{m} - 3\overline{n}$, $|\overline{m}|=5$, $|\overline{n}|=2$, $(\overline{m},\hat{\ } \overline{n}) = 150^0$. Вычислить проекцию вектора $\overline{b}$ на вектор $\overline{a}$.

3. Дан треугольник с вершинами A(-1,5,1), B(1,1,-2), C(-3,3,2). Определить:
   a) внешний угол при вершине C
   b) внутренний угол при вершине A

4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он коллинеарен вектору $\overline{a}=\{-1,1,2\}$, $|\overline{x}| = 2\sqrt{3}$ образует тупой угол с осью Oy.

5. Дано $|\overline{a}|=1$, $|\overline{b}|=2$, $(\overline{a},\hat{\ }\overline{b}) = \frac{2}{3}\pi$. Вычислить $\left|[\overline{a} + 3\overline{b}, \overline{3a} - \overline{b}]\right|$.

6. Дано: A(1,2,3), B(-2,4,1), C(7,6,3) и D(4,-3,-1). Найти:
   a) площадь треугольника ABC
   b) косинус угла между векторами $\left[\overline{AB}, \overline{AC}\right]$ *и* $\overline{AD}$

7. Векторы $\overline{a}=\{-1,2,3\}$, $\overline{b}=\{0,-1,3\}$и $\overline{c} = 2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ служат ребрами пирамиды. Найти:
   a) длину ее высоты, считая, что $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в плоскости основания
   b) вектор, коллинеарный биссектрисе угла между $\overline{b}$ и $\overline{c}$
   c) синус угла между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}+\overline{c}$

# ВАРИАНТ 17

1. Проверить, лежат ли точки A(1,2,3), B(-1,0,2), C(-3,-2,1) на одной прямой.
2. Дан равносторонний треугольник ABC, длины сторон которого равны 1. Вычислить $\left(\overline{AB}, \overline{BC}\right) + \left(\overline{BC}, \overline{CA}\right) + \left(\overline{CA}, \overline{AB}\right)$.
3. Даны векторы $\overline{AB}$={2,-3,6}, $\overline{AC}$={-1,2,-2}. Найти угол $B\hat{A}C$ и единичный вектор биссектрисы этого угла
4. Найти вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$={3,-2,5} и $\overline{b}$={1,2,-3} $|\overline{x}| = \sqrt{23}$ образует с осью Ox тупой угол.
5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $2\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{a} - 2\overline{b}$, если $|\overline{a}| = \sqrt{2}$, $|\overline{b}|$=3, $(\overline{a} \hat{,} \overline{b}) = 45^o$.
6. Даны векторы: $\overline{a}$=(3,1,2), $\overline{b}$=(2,7,4), $\overline{c}$=(1,2,1) и $\overline{d}$=3**i**+2**j**+**k**.
   a) доказать, что векторы $\left[\overline{a}, \left[\overline{b}\,\overline{c}\right]\right]$ $и\, \overline{d}$ перпендикулярны
   b) найти направляющие косинусы вектора $\left[\overline{a}, \left[\overline{b}\,\overline{c}\right]\right]$
   c) $Пр_{\overline{a}}\left[\overline{b}\,\overline{c}\right]$
7. Дано: A(3,1,-1), B(2,-2,4), C(2,3,-1), D(1,1,2). Найти:
   a) Высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$
   b) угол BDC

ВАРИАНТ 18

1. Даны векторы $\overline{a}$={1,2,4}, $\overline{b}$={1,-1,1}и $\overline{c}=\{2,2,4\}$. Доказать, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют базис и найти разложение вектора $\overline{d}$={-1,-4,-2} по этому базису.
2. Зная, что $|\overline{a}|$=3, $|\overline{b}|$=1, $|\overline{c}|$=4 и $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$=0 вычислить $(\overline{a},\overline{b})+(\overline{b},\overline{c})+(\overline{c},\overline{a})$.
3. Треугольник ABC задан координатами своих вершин A(1,2,4), B(3,6,5), C(-1,-4,α). Найти все значения α, при которых треугольник прямоугольный.
4. Даны два вектора $\overline{a}$={7,3,-5} и $\overline{b}$={-4,2,7}. Найти вектор $\overline{x}$ при условии, что он перпендикулярен к оси Ox и удовлетворяет условиям $(\overline{x},\overline{a})$=13, $(\overline{x},\overline{b})$=81.
5. Найти $\left|\left[\overline{a},\overline{b}\right]\right|$, если $|\overline{a}|$=3, $|\overline{b}|$=26, $(\widehat{a,b})=30^o$
6. Дано: A(6,3,3), B(6,4,2), C(4,1,4). Найти:
   a) $Пр_{\overline{AC}}\left[\overline{AB},\overline{BC}\right]$
   b) угол, образованный с осью Oy вектором $\overline{BC}$
   c) площадь треугольника ABC.
7. Даны два вектора $\overline{a}$={8,4,1}, $\overline{b}$=2**i**-2**j**+**k**, выходящие из одной точки. Найти:
   a) вектор $\overline{c}$, исходящий из той же точки, перпендикулярный к $\overline{a}$, равный ему по длине, компланарный с $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и образующий с $\overline{b}$ острый угол.
   b) орт вектора $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$

ВАРИАНТ 19

1. Доказать, что если $\alpha\bar{a}+\beta\bar{b}+\gamma\bar{c}$=0, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарны.
2. Вычислить $\left(2\bar{a}-5\bar{b}\right)^2$, если $|\bar{a}|$=11, $|\bar{b}|$=2, $(\widehat{a,b})=\frac{2}{3}\pi$.
3. Дано: A(-1,2,1), B(1,-2,-3), C(1,-1,4). Найти:
   a) $(\widehat{AB,BC})$
   b) проекцию вектора $\overline{AB}+2\overline{BC}$ на ось Oz
   c) периметр треугольника ABC
4. В плоскости XoZ найти вектор, зная, что он перпендикулярен вектору $\bar{a}$={4,$\sqrt{11}$,-3} имеет одинаковую с ним длину и образует острый угол с осью Oz.
5. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}+2\bar{b}$, $3\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|$=1, $|\bar{b}|$=2, $(\widehat{a,b})=30^o$
6. Даны векторы $\bar{a}$=2**i**-**j**+**k**, $\bar{b}$=(1,1,0). Найти:
   a) синус угола между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$
   b) направляющие косинусы вектора $\left[\bar{a},\left[\bar{a}\,\bar{b}\right]\right]$
7. Дано: A(-3,4,-1), B(-2,3,-7), C(-1,4,-3) и D(-1,3,6). Найти:
   a) Длину высоты пирамиды ABCD, проведенной из вершины D
   b) угол между вектором $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$ и медианой в треугольнике ADC, проведенной из вершины D
   c) центр тяжести треугольника ADC

# ВАРИАНТ 20

1. Найти координаты вектора $\overline{AO}$, где O – центр тяжести треугольника ABC относительно базиса $\{\overline{AB}, \overline{AC}\}$.
2. Векторы $\overline{CA} = \overline{a}$, $\overline{CB} = \overline{b}$ совпадают с катетами равнобедренного прямоугольного треугольника. Вычислить угол, образованный медианами, проведенными из вершин острых углов.
3. Дан треугольник ABC с вершинами A(1,-1,2), B(5,-6,2), C(1,3,-1). Найти:
   a) внешние углы этого треугольника
   b) $Пр_{\overline{AB}}\left[\overline{AB} + \overline{AC}\right]$
4. Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный вектору $\overline{a}$={2,-3,1} и оси Ox, зная, что $\left|\overline{x}\right| = 2\sqrt{10}$ и он образует тупой угол с осью Oz
5. Найти $\left(\overline{a}, \overline{b}\right)$, если $|\overline{a}|$=10, $|\overline{b}|$=2, $\left| [\overline{a}, \overline{b}] \right|$ =16
6. Дано: A(4,1,1), B(4,2,0), C(2,-1,2). Найти:
   a) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$
   b) угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BA}$
7. Дано: A(1,6,3), B(4,6,5), C(3,2,1), D(0,0,1). Найти:
   a) объем параллелепипеда с вершинами в этих точках
   b) высоту пирамиды ABCD проведенной из вершины C
   c) площади всех граней

ВАРИАНТ 21

1. На векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ построен параллелепипед. Составить векторы – диагонали этого параллелепипеда.
2. Найти $\left(2\overline{a}+3\overline{b},\ 2\overline{a}-\overline{b}\right)$, если $|\overline{a}|$=11, $|\overline{b}|$=2, $(\widehat{a,b})=\dfrac{2}{3}\pi$ .
3. Дано: A(2,3,1), B(6,2,0), C(4,2,1), D(4,6,0). Найти:
   a) $Пр_{\overline{AD}+\overline{BC}}\overline{AC}$
   b) угол между векторами $\overline{AB}-2\overline{AC}$ и осью Oy
   c) единичный вектор биссектрисы угла $\llcorner$ ACB
4. В плоскости XoY найти вектор, перпендикулярен вектору $\overline{a}$={3,-4,5}, длина которого равна $5\sqrt{2}$
5. Найти $|[\overline{a},\overline{b}]|$, если $\overline{a}=10\overline{m}+\overline{n}$, $\overline{b}=3\overline{m}-2\overline{n}$, $|\overline{m}|$=4, $|\overline{n}|$=1, $(\widehat{m,n})=30^{o}$
6. Даны три силы $\overline{F}_1$=**i**+2**j**+4**k** и $\overline{F}_2$={2,-3,-1}, $\overline{F}_3$= **-i**-3**j**+2**k,** приложенные к точке A(4,-2,3). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки O(3,2,1).
7. Даны два вектора $\overline{a}$={0,3,-3} и $\overline{b}$=2**i**+2**j**-**k**, выходящие из одной точки. Найти:
   a) вектор $\overline{c}$, исходящий из той же точки, перпендикулярный к $\overline{b}$, равный ему по длине, коллинеарный с $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и образующий с $\overline{a}$ тупой угол
   b) вектор, параллельный биссектрисе угла между векторами $\left[\overline{a},\overline{b}\right]$ и $\overline{b}$

# ВАРИАНТ 22

1. В треугольнике ABC точка М (1,2,4) является серединой стороны BC. Найти координаты точки А, если $\overline{AB}$={2,4,5} и $\overline{AC}$={4,8,-7}.
2. При каком α векторы $3\bar{a}+\alpha\bar{b}$, $\bar{a}-2\bar{b}$ перпендикулярны, если $|\bar{a}|=7\sqrt{2}$, $|\bar{b}|$=4, $(\hat{a,b})=\dfrac{\pi}{4}$
3. Даны вершины треугольника: A(-1,2,0), B(0,1,-1), C(-1,0,2). Найти:
   a) внутренние углы этого треугольника
   b) длины медиан, проведенных из точек A, B, C.
4. Найти единичный вектор $\bar{x}$, перпендикулярный вектору $\bar{a}$={4,-1,-7} и оси Oz, образующий тупой угол с осью Ox
5. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, и\ \bar{d}$ связаны соотношениями $[\bar{a},\bar{b}]=[\bar{c},\bar{d}]$, $[\bar{a},\bar{c}]=[\bar{b},\bar{d}]$ Доказать коллинеарность векторов $\bar{a}-\bar{d},\bar{b}-\bar{c}$
6. Дано: A(-2,4,4), B(4,1,1), C(4,2,0), D(2,-1,2). Найти:
   a) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$
   b) площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AD}$ и $\left[\overline{AB},\overline{AC}\right]$
7. Дано: A(4,1,2), B(1,1,0), C(3,0,5), D(0,0,2). Найти:
   a) высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}+\overline{AC}$, $\overline{AC}, 2\overline{AD}$
   b) $Пр_{[\overline{AB},\overline{AC}]}\overline{AD}$
   c) синус угла A в треугольнике ADC

ВАРИАНТ 23

1. Представить вектор $\overline{d}$={8,-1,0} как линейную комбинацию векторов $\overline{a}$={3,2,1}, $\overline{b}$={4,-4,5}, $\overline{c}$={2,-3,1}.
2. При каком α вектор $\overline{a} = \alpha\overline{p} - 4\overline{q}$ перпендикулярен вектору $\overline{b} = \overline{p} + 2\overline{q}$, если $|\overline{a}|=|\overline{b}|$=4, $(\overset{\wedge}{p,q}) = 60^0$
3. Дано $\overline{a}$={1,1}, $\overline{b}$={1,-1} и $2\overline{x} + \overline{y} = \overline{a}$, $\overline{x} + 2\overline{y} = \overline{b}$ Найти:
   a) $\overline{x}$, $\overline{y}$
   b) $(\overline{x}, \overline{y})$
4. Найти единичный вектор, зная, что он коллинеарен вектору $\overline{a}$={1,-2,3} и образует острый угол с осью Ох.
5. Доказать, что векторы $\alpha\overline{a} - \beta\overline{b}$, $\gamma\overline{b} - \alpha\overline{c}$, $\beta\overline{c} - \gamma\overline{a}$ компланарны при любых α, β, γ.
6. Даны четыре вектора $\overline{a}$={-3,0,-2}, $\overline{b}$={-1,-1,3}, $\overline{c}$={-1,-1,0} и $\overline{d}$={3,4,0}. Найти:
   a) $\left|\left[\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right]\right|$
   b) $\left(\overline{d}, \left[\left[\overline{a},\overline{b}\right],\overline{c}\right]\right)$
   c) $Пр_{\overline{d}}\left[\overline{a}+\overline{b},\overline{b}\right]$
7. Дано: A(5,2,6), B(3,0,4), C(9,6,4) и D(1,2,3). Найти:
   a) высоту пирамиды, опущенную из вершины D
   b) вектор $\overline{x}$, компланарный с векторами $\overline{AB}$ *и* $\overline{AC}$, перпендикулярный вектору $\overline{AB} + 2\overline{AC}$ и $\left|\overline{x}\right| = \sqrt{27}$
   c) синус угла А в треугольнике ABC.

ВАРИАНТ 24

1. В треугольнике ABC точка $M_1(2,-3,1)$ является серединой стороны BC, а $M_2(1,2,4)$ – серединой AB. Найти координаты вектора $\overline{AC}$.
2. Найти угол, образованный векторами $\overline{a} = 2\overline{p} - \overline{q}$, $\overline{b} = 3\overline{p} + \overline{q}$, если $|\overline{p}| = 3\sqrt{3}$, $|\overline{q}|=2$, $(\widehat{p,q}) = 135^0$.
3. Даны две точки A(3,-4,-2) и B(2,5,-2). Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось, составляющую с координатными осями Ox, Oy углы $\alpha=60^0$, $\beta=120^0$, а с осью Oz – тупой угол $\gamma$.
4. В плоскости YoZ найти вектор, перпендикулярный вектору $\overline{a}=\{1,2,-2\}$, имеющий одинаковую с ним длину и образующий тупой угол с осью Oy.
5. Векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ удовлетворяют условию $\overline{a} + \overline{b} + \overline{c} = 0$. Доказать, что $[\overline{a}, \overline{b}] = [\overline{c}, \overline{a}] = [\overline{b}, \overline{c}]$.
6. Дано A(-3,3,3), B(3,0,0), C(3,1,-1), D(1,-2,1). Найти:
   a) угол, образованный векторами $\overline{BA} u [\overline{BC}, \overline{BD}]$
   b) высоту треугольника BCD, опущенную из вершины C
   c) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{BC} + \overline{BD}, \overline{BA} + \overline{BC}, \overline{BD}$
7. Даны три вектора $\overline{m}=\{-1,3,5\}$, $\overline{n}=\{1,0,-2\}$, $\overline{p}=\{3,-2,2\}$. Найти модуль вектора $\overline{a} = [\overline{m}, \overline{n} + \overline{p}] - [[\overline{m}, \overline{n}], \overline{p}]$

ВАРИАНТ 25

1. Точка О – центр тяжести треугольника АВС. Доказать, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=0$
2. Найти $\left|2\overline{a}+3\overline{b}\right|$, если $|\overline{a}|$=2, $|\overline{b}|$=3, $(\widehat{a,b})=120^0$
3. Даны три вектора $\overline{a}$= **-**2**i**+**j**+**k**, $\overline{b}$=**i**+5**j**, $\overline{c}=\{4,4,-2\}$. Вычислить
   a) $Пр_{\ddot{c}}\left(3\overline{a}-2\overline{b}\right)$
   b) вектор, коллинеарный биссектрисе угла между $\overline{a}$ и $\overline{c}$
4. Найти единичный вектор $\overline{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\overline{a}$={1,-1,3}, $\overline{b}$={3,-2,5} и образует с осью Oz тупой угол.
5. Упростить $\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c},\overline{a}-2\overline{b}+2\overline{c},4\overline{a}+\overline{b}+5\overline{c}\right)$
6. Даны три силы $\overline{F}_1$={2,-1,-3}, $\overline{F}_2$=3**i**+2**j**-**k** и $\overline{F}_3$={-4,1,3}, приложенные к точке С(-1,4,-2). Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки А(2,3,-4)
7. Дано: А(4,1,-2), В(2,3,1), С(6,3,7) и D(-5,-4,8). Найти:
   a) высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}+2\overline{AC}$
   b) угол между векторами $[\overline{AB},\overline{AC}]$ и $\overline{AD}$
   c) центр тяжести треугольника АВС