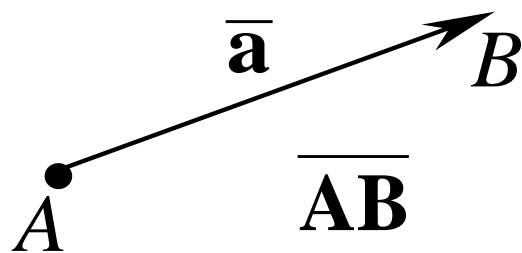


Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Глава 2. Векторная алгебра

Преподаватель – доцент кафедры ВМ ТПУ, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

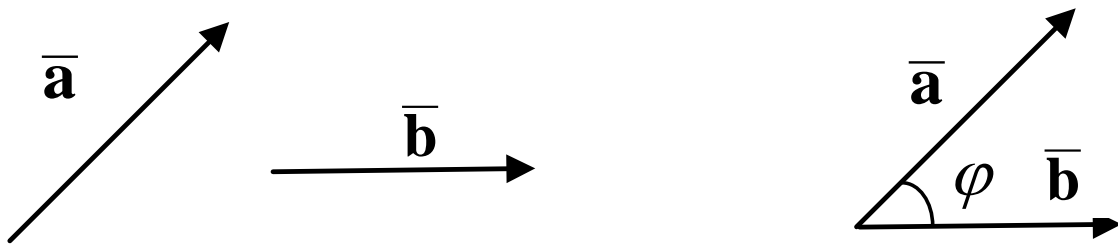
Определение. Вектором или по-другому *свободным вектором* называется направленный отрезок (т.е. отрезок, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец).



Расстояние от начала вектора до его конца называется *длиной* (*модулем*) вектора. $|\overline{AB}|$ $|\bar{a}|$

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором или *ортом*.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* и обозначается $\bar{0}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю.



Под *углом* между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ будем понимать угол, величина которого не превышает 180° .

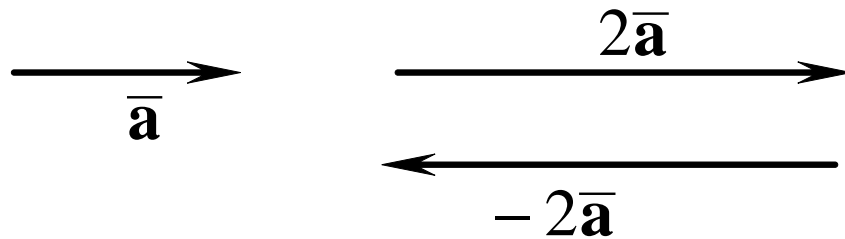
Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90° . $\bar{\mathbf{a}} \perp \bar{\mathbf{b}}$

Два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной или параллельных прямых. $\bar{\mathbf{a}} \parallel \bar{\mathbf{b}}$

Три вектора, лежащие в одной или в параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Два вектора называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину. Все нулевые векторы считаются равными.

Определение. Произведением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число $\alpha \neq 0$ называется вектор, длина которого $|\alpha| \cdot |\bar{\mathbf{a}}|$, а направление совпадает с направлением вектора $\bar{\mathbf{a}}$ при $\alpha > 0$ и противоположно ему при $\alpha < 0$. Если $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ или $\alpha = 0$, то их произведение полагают равным $\bar{\mathbf{0}}$.

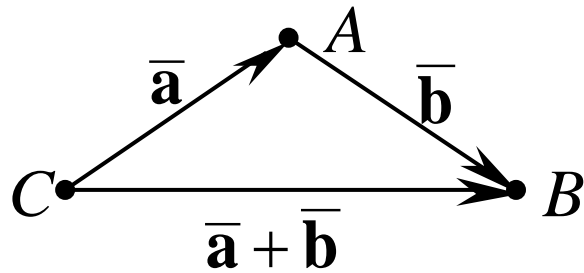


$(-1)\bar{\mathbf{a}} = -\bar{\mathbf{a}}$ *противоположный вектору $\bar{\mathbf{a}}$*

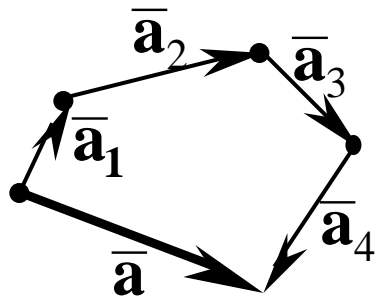
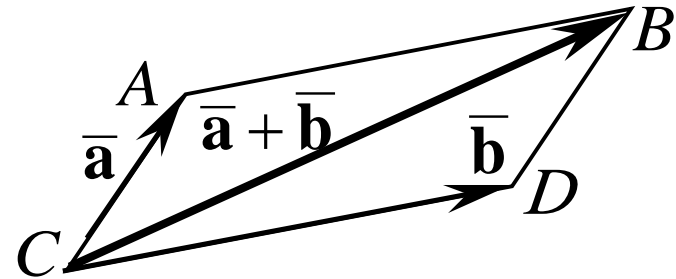
Лемма 2.1 (критерий коллинеарности векторов). Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\bar{\mathbf{a}} = \alpha \cdot \bar{\mathbf{b}}$, для некоторого числа $\alpha \neq 0$

Определение. Суммой векторов \bar{a} и \bar{b} называется вектор, соединяющий начало вектора \bar{a} с концом вектора \bar{b} , отложенного от конца вектора \bar{a}

Правило треугольника



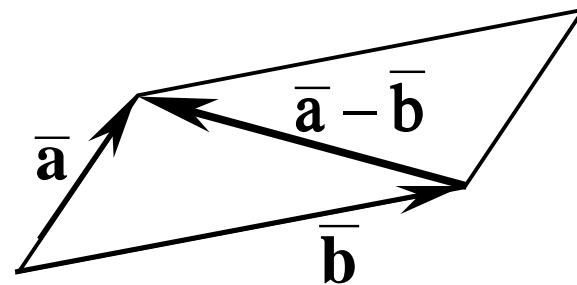
Правило параллелограмма



$$\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4$$

$$\bar{a} + (-\bar{b}) = \bar{a} - \bar{b}$$

разность векторов



Определение. Пусть даны векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. Тогда вектор $\bar{\mathbf{b}} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k$ называют *линейной комбинацией* векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$. При этом говорят, что вектор $\bar{\mathbf{b}}$ *линейно выражается* через вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$, или другими словами *разложен по векторам* $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$.

Лемма 2.2 (критерий компланарности векторов).

Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через другие (например, $\bar{\mathbf{c}} = \lambda_1 \bar{\mathbf{a}} + \lambda_2 \bar{\mathbf{b}}$).

Свойства линейных операций над векторами

1. $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{a}}$

2. $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) + \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{a}} + (\bar{\mathbf{b}} + \bar{\mathbf{c}})$

3. $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{a}}$

4. $\bar{\mathbf{a}} + (-\bar{\mathbf{a}}) = \bar{\mathbf{0}}$

5. $\alpha(\beta \bar{\mathbf{a}}) = (\alpha\beta)\bar{\mathbf{a}}$

6. $(\alpha + \beta)\bar{\mathbf{a}} = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \beta\bar{\mathbf{a}}$

7. $\alpha(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \alpha\bar{\mathbf{a}} + \alpha\bar{\mathbf{b}}$

8. $1\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}$

Определение. Говорят, что векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ **линейно зависимы**, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = 0$.

Если же равенство $\alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \bar{a}_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$, то векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ называют **линейно независимыми**.

Лемма 3.1. Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через оставшиеся.

Лемма 3.2 (критерий линейной зависимости двух векторов). Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Лемма 3.3 (критерий линейной зависимости трёх векторов). Три ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Определение. Базисом некоторой системы векторов называется любая максимальная линейно независимая подсистема этой системы векторов.

Иначе говоря $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – базис, если

- 1) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – линейно независимы;
- 2) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n, \bar{a}$ – линейно зависимы для любого вектора \bar{a} из данной системы векторов.

Базис можно выбрать не единственным образом.

Например, если $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – базис, то при $\alpha \neq 0$ $\alpha\bar{e}_1, \alpha\bar{e}_2, \dots, \alpha\bar{e}_n$ – также базис.

Теорема 3.4. Любые два базиса данной системы векторов состоят из одного и того же числа векторов.

Теорема 3.5. 1) Базисом на плоскости являются любые два неколлинеарных вектора.

2) Базисом в пространстве являются любые три некопланарных вектора.

Теорема 3.6 (о базисе). Каждый вектор линейно выражается через базис, причем единственным образом.

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ – базис, \bar{a} – произвольный вектор \Rightarrow

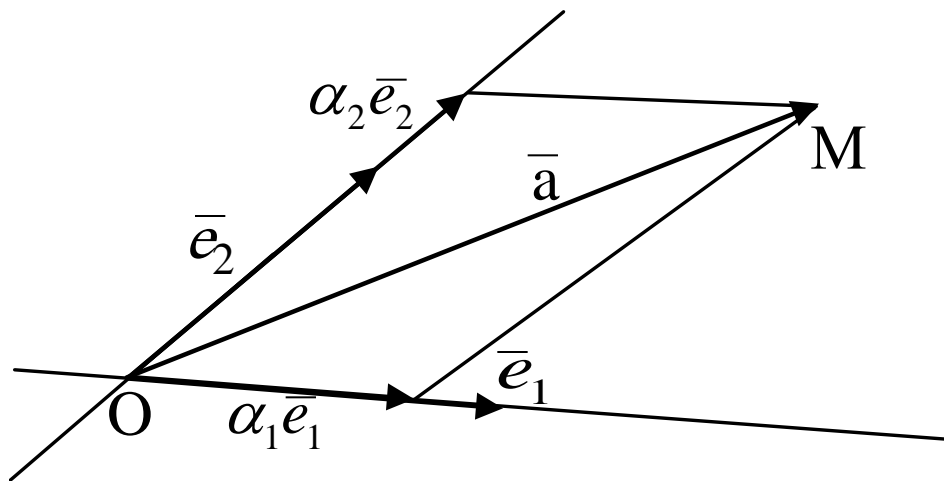
$$\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \cdot \bar{e}_n$$

При этом $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называются **координатами** вектора \bar{a} в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$

Зафиксируем произвольную точку O в пространстве и выберем некоторый базис.

Совокупность этой точки и этого базиса называется **декартовой системой координат**.

При этом точку O называют – **началом координат**.



$$\bar{\mathbf{a}} = \overline{OM} = \alpha_1 \cdot \bar{e}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{e}_2$$

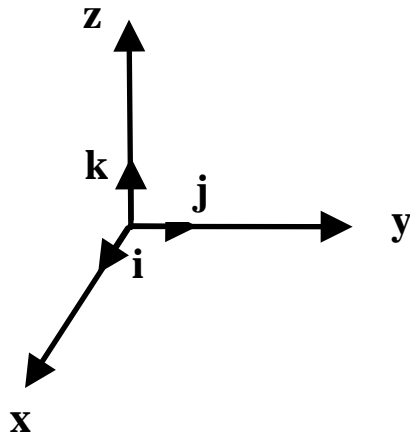
α_1 и α_2 – координаты вектора $\bar{\mathbf{a}}$ в этом базисе

Также говорят, что α_1 и α_2 – **координаты точки M** .

Координатами точки называют координаты вектора, имеющего конец в этой точке, а начало – в начале координат.

Декартовой прямоугольной системой координат в пространстве называют систему координат, базисом в которой являются единичные векторы, попарно ортогональные друг с другом.

Правая система координат, в которой векторы базиса образуют **правую тройку**, обозначают \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} :



Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ – произвольный вектор.

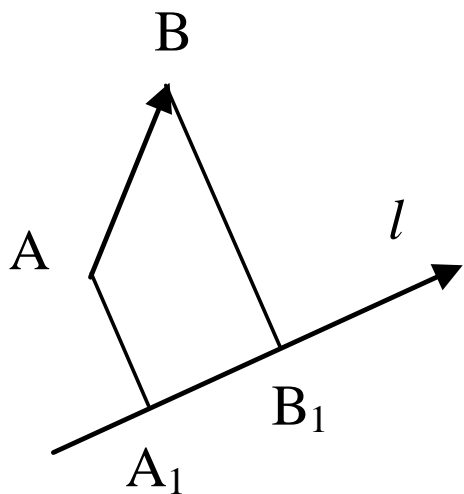
$$\text{Тогда } \bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

$$\text{или } \bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$$

Замечание. Иногда в качестве базиса берут **левую тройку** векторов $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, -\mathbf{k})$. Тогда такую систему координат называют **левой**.

Пусть в пространстве задана ось l , то есть направленная прямая, \overline{AB} – произвольный вектор.

Обозначим через A_1 и B_1 – проекции на ось l точек A и B соответственно.



Проекцией вектора \overline{AB} на ось l называется положительное число $|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены, и отрицательное число $-|\overline{A_1B_1}|$, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены.

Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора \overline{AB} равна 0.

$\text{пр}_l \overline{AB}$

Свойства проекций:

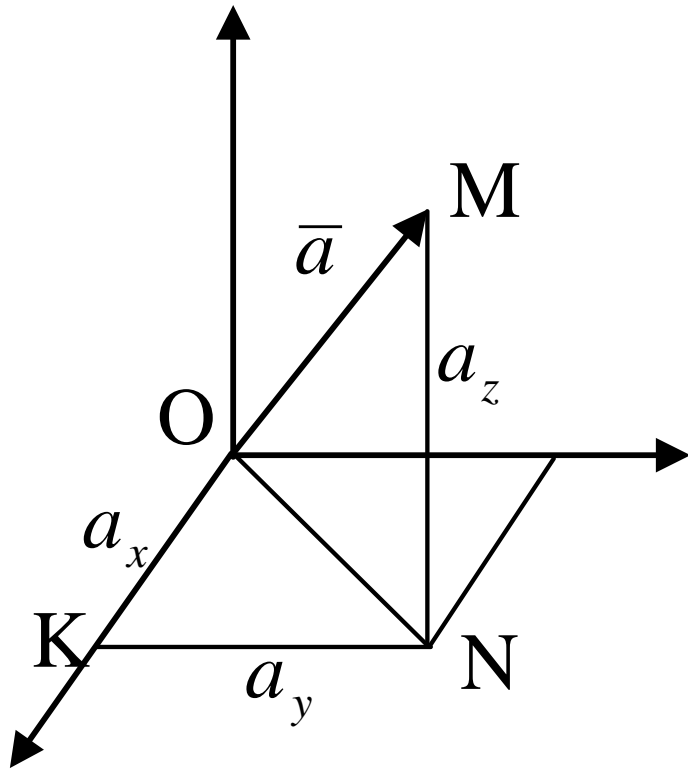
1. Проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось l равна произведению длины вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на косинус угла φ между вектором и осью: $\text{пр}_l \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi$.
2. Проекция суммы нескольких векторов на ось l равна сумме их проекций на эту ось.
3. При умножении вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на число λ его проекция на ось l также умножается на это число: $\text{пр}_l(\lambda \cdot \bar{\mathbf{a}}) = \lambda \cdot \text{пр}_l \bar{\mathbf{a}}$.

$$\bar{\mathbf{a}} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

координата a_x – это проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Ox

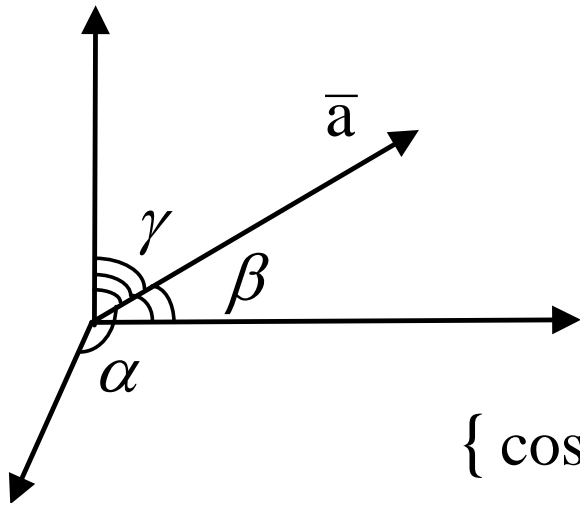
координата a_y – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oy

координата a_z – проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось Oz .



$$|\bar{\mathbf{a}}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$\bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$ Рассмотрим вектор $\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$.



$$a_x = \text{пр}_{Ox} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \alpha$$

(по свойству 1 проекций)

$$a_y = \text{пр}_{Oy} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \beta$$

$$a_z = \text{пр}_{Oz} \bar{\mathbf{a}} = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \gamma \quad \Rightarrow$$

$$\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \} = \frac{a_x}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{i} + \frac{a_y}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{j} + \frac{a_z}{|\bar{\mathbf{a}}|} \mathbf{k} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{a}}|} \bar{\mathbf{a}},$$

то есть вектор $\{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ – единичный и направлен также, как и $\bar{\mathbf{a}}$. Этот вектор называют **ортом вектора $\bar{\mathbf{a}}$** .

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – **направляющие косинусы** вектора $\bar{\mathbf{a}}$

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ – **свойство** направляющих косинусов.

Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{ b_x, b_y, b_z \}$.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) + (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} + (a_z + b_z) \mathbf{k} = \\ &= \{ a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} &= \alpha \cdot (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) = \\ &= (\alpha \cdot a_x) \mathbf{i} + (\alpha \cdot a_y) \mathbf{j} + (\alpha \cdot a_z) \mathbf{k} = \\ &= \{ \alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z \}\end{aligned}$$

Теорема 4.1. Если $\bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{ b_x, b_y, b_z \}$, то

1) $\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}} = \{ a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z \}$,

2) $\alpha \cdot \bar{\mathbf{a}} = \{ \alpha \cdot a_x, \alpha \cdot a_y, \alpha \cdot a_z \}$.

Лемма 4.2 (критерий коллинеарности векторов в координатной форме). Два ненулевых вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

Пример

$$\bar{\mathbf{a}} = \{2, 4, 0\} \quad 2 = \alpha \cdot 1$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \{1, 2, 0\} \quad 4 = \alpha \cdot 2$$

$$0 = \alpha \cdot 0$$

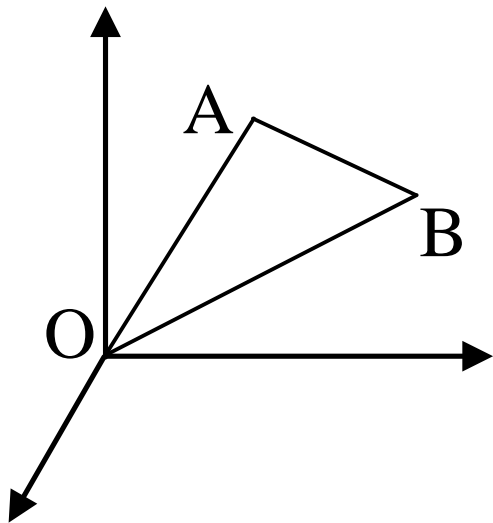
$\Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$ векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарны

$$a_x = \alpha \cdot b_x, \quad a_y = \alpha \cdot b_y, \quad a_z = \alpha \cdot b_z \quad \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{a_x}{b_x}, \quad \alpha = \frac{a_y}{b_y}, \quad \alpha = \frac{a_z}{b_z} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$$

$\mathbf{A} (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{B} (x_2, y_2, z_2)$. Найдём координаты $\overline{\mathbf{AB}}$.



Вектор $\overline{\mathbf{AB}} = \overline{\mathbf{OB}} - \overline{\mathbf{OA}}$.

Так как $\overline{\mathbf{OB}} = \{x_2, y_2, z_2\}$,

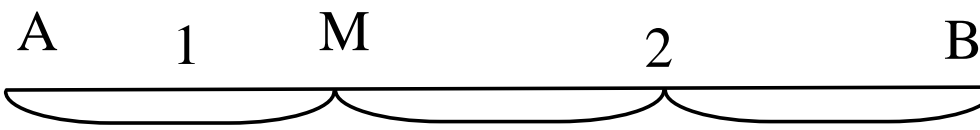
$\overline{\mathbf{OA}} = \{x_1, y_1, z_1\}$,

то $\overline{\mathbf{AB}} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Лемма 4.3. Если \mathbf{A} имеет координаты (x_1, y_1, z_1) , точка \mathbf{B} – координаты (x_2, y_2, z_2) , то вектор $\overline{\mathbf{AB}}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$.

Разделим отрезок **АВ** в отношении λ , то есть на прямой, проходящей через точки **А** и **В**, найдём такую точку **М**, что $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$.

1) $\lambda = 1/2$, $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{MB}$.



2) $\lambda = -2$, $\overline{AM} = -2 \overline{MB}$.



3) $\lambda = -1$, то есть $\overline{AM} = -\overline{MB}$ — НЕВОЗМОЖНО

$\lambda > 0 \Rightarrow \overline{AM}$ и \overline{MB} одинаково направлены
 \Rightarrow точка **М** лежит внутри отрезка **АВ**

$\lambda < 0 \Rightarrow \overline{AM}$ и \overline{MB} противоположно направлены
 \Rightarrow точка **М** лежит вне отрезка **АВ**

Пусть $\mathbf{A} (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{B} (x_2, y_2, z_2)$.

Обозначим координаты точки $\mathbf{M} (x, y, z)$.

Тогда $\overline{AM} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\overline{MB} = \{x_2-x, y_2-y, z_2-z\}$.

Так как $\overline{AM} = \lambda \overline{MB}$, то

$$x - x_1 = \lambda (x_2 - x), \quad y - y_1 = \lambda (y_2 - y), \quad z - z_1 = \lambda (z_2 - z).$$

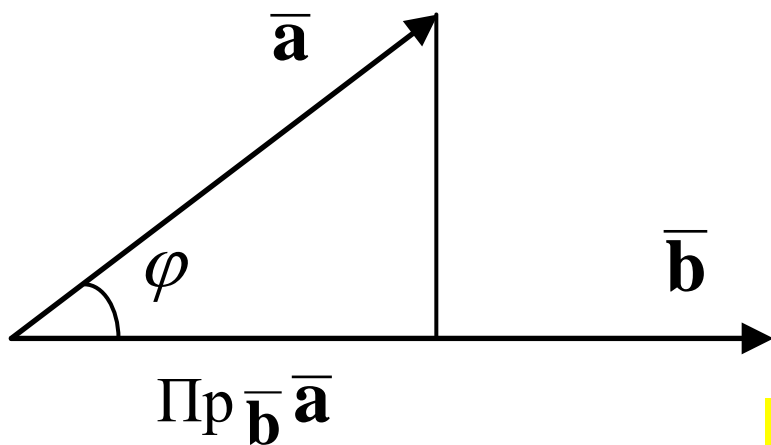
Откуда получаем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Определение. **Скалярным произведением** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Записывают $\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$ или $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi$$

Если один из двух векторов является нулевым, их скалярное произведение считается равным нулю.



$$\begin{aligned} \text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}} &= |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \\ (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) &= |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} &= |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \\ (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) &= |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{a}}} \bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{пр}_{\bar{\mathbf{b}}} \bar{\mathbf{a}}$$

Свойства скалярного произведения

1. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$

2. $(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$

3. $(\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$

4. $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$

Лемма 5.1 (критерий ортогональности векторов).

Два ненулевых вектора ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Лемма 5.2. Скалярное произведение векторов равно сумме произведений соответствующих координат:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Найдем угол между $\bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$ и $\bar{\mathbf{b}} = \{ b_x, b_y, b_z \}$.

Имеем $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \cos \varphi$, следовательно,

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{|\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}|}$$

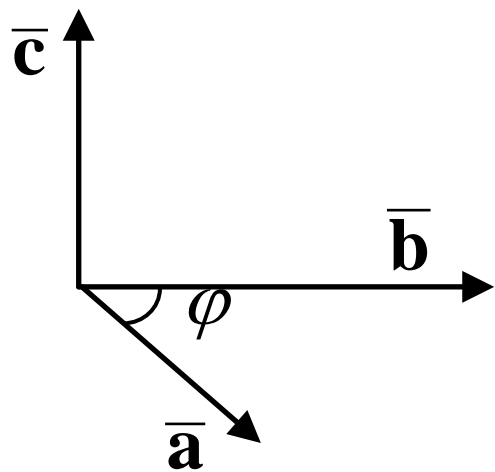
Определение. **Векторным произведением** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, для которого выполняются следующие условия:

1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi$,

2) $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$,

3) $\bar{\mathbf{c}}$ направлен так, что тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}$ – правая, то есть ориентирована одинаково с базисной тройкой \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} .

$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$



Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают, что векторное произведение равно нулевому вектору.

$$[\mathbf{i}, \mathbf{j}] = \mathbf{k} \quad [\mathbf{j}, \mathbf{i}] = -\mathbf{k}$$

$$[\mathbf{j}, \mathbf{k}] = \mathbf{i} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{j}] = -\mathbf{i}$$

$$[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = -\mathbf{j} \quad [\mathbf{k}, \mathbf{i}] = \mathbf{j}$$

Свойства векторного произведения

1. $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}]$

2. $[\alpha\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \alpha\bar{\mathbf{b}}] = \alpha[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$

3. $[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}]$

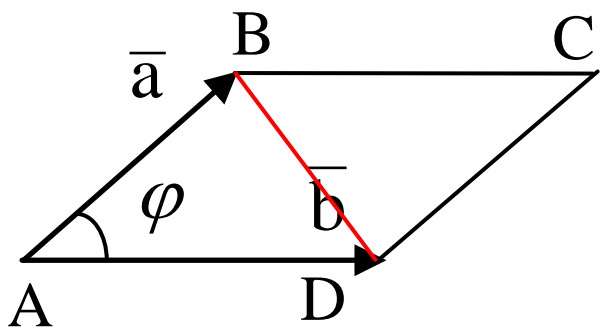
4. $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}] = \bar{\mathbf{0}}$

Лемма 6.1. Векторное произведение двух ненулевых векторов есть нулевой вектор тогда и только тогда, когда сомножители коллинеарны.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Лемма 6.2. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные вектора. Тогда площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна модулю векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$: $S = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.



Пусть ABCD – параллелограмм, где $\overline{AB} = \bar{\mathbf{a}}$, $\overline{AD} = \bar{\mathbf{b}}$.

$$S = AB \cdot AD \cdot \sin \varphi$$

$$\text{Но } AB = |\bar{\mathbf{a}}|, AD = |\bar{\mathbf{b}}| \Rightarrow S = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin \varphi = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|.$$

Следствие 6.3. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ – неколлинеарные вектора. Тогда площадь треугольника, построенного на этих векторах, равна половине модуля векторного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$:

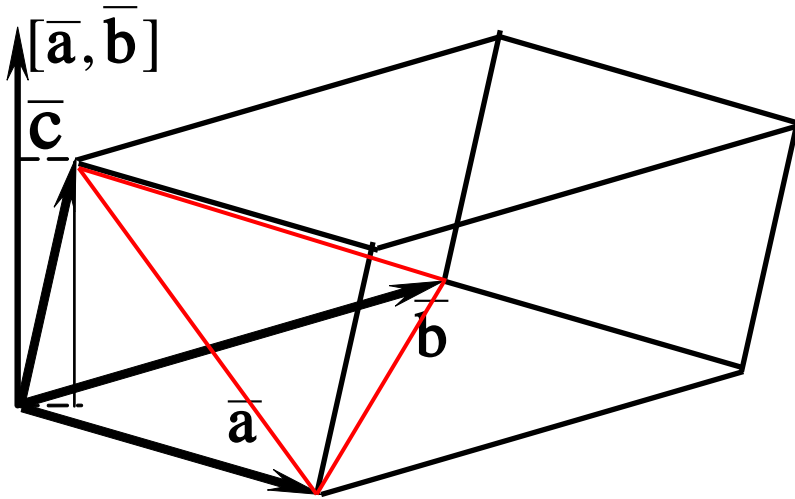
$$S = \frac{1}{2} \cdot |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|.$$

Определение. **Смешанным произведением** трёх векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, получаемое следующим образом: векторное произведение $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ умножаем скалярно на $\bar{\mathbf{c}}$:

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}).$$

Лемма 7.1. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некопланарные вектора. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$



$$V = S_{осн} \cdot H$$

Основание параллелепипеда – параллелограмм, построенный на векторах $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.

По лемме 6.2 $S_{осн} = |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]|$.

Высота параллелепипеда $H = |\text{Пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}}|$.

$$V = S_{осн} \cdot H = \left| |[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]| \cdot \text{Пр}_{[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]} \bar{\mathbf{c}} \right| = |([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})| = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|$$

Лемма 7.1. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некопланарные вектора. Тогда объём параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен модулю смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

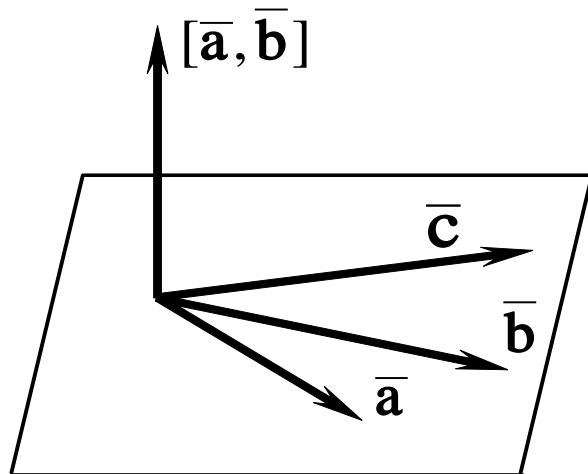
Следствие 7.2. Пусть $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – некопланарные вектора. Тогда объём пирамиды, построенной на этих векторах, равен одной шестой модуля смешанного произведения векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})|.$$

Свойства смешанного произведения

1. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = -([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{c}})$
2. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}], \bar{\mathbf{a}}) = ([\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}], \bar{\mathbf{b}})$
3. $([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}])$

Лемма 7.3 (критерий компланарности векторов через смешанное произведение). Три ненулевых вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю.



Пусть $\bar{\mathbf{a}} = \{ a_x, a_y, a_z \}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{ b_x, b_y, b_z \}$, $\bar{\mathbf{c}} = \{ c_x, c_y, c_z \}$.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = ([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}})$$

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

$$([\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}], \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot c_z$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$