Домашние задания по теме: «Линейная алгебра»

1. «Матрицы и действия над ними»

1) $A=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$. Найти $2A+5B$, $3A-2B$, $-4A-B$.

2) Произвести все возможные операции сложения и умножения матриц.

$A=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ -4 & 2 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$

Ответ:.2 сложения, 6 умножений.

3) Решить систему матричных уравнений: $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ 2X+3Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\end{cases}$.

Ответ: $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

4) Доказать, что если матрица B перестановочна с матрицей A, то она перестановочна и с матрицей $A-\lambda E$ (где λ – любое отличное от нуля число).

2. «Определители» (часть 1)

1) Вычислить определитель, используя определение:

$$\begin{vmatrix}5 & 0 & -1 & 2\\ 9 & 7 & 8 & -4\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\end{vmatrix}$$

Ответ: 14.

Вычислить определители, используя теорему Лапласа:

2) $\begin{vmatrix}5 & 2 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 7 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 7 & 5 & 3\\ 2 & 3 & 6 & 4 & 5\\ 3 & 0 & 4 & 0 & 0\end{vmatrix}$

Ответ: 10.

3) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0\\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3\\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0\\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6\\ 1 & 0 & 8 & 0 & 27 & 0\\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 10\end{vmatrix}$

Ответ: 12.

4) Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -3 & 7 & -1 & 4\\ 5 & -9 & 2 & 7\\ 4 & -6 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

Ответ: -9

3. Определители» (часть 2)

Вычислить определители, получив предварительно нули в какой-либо строке (столбце):

1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 2 & -4 \\ -3 & 4 & -5 & 3 \\ -5 & 7 & -7 & 5 \\ 8 & -8 & 5 & -6 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$

Ответ: 17. **Ответ**: -10. **Ответ**: $n!$.

Пользуясь только свойствами определителей, вычислить:

4) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$.

4. Обратная матрица. Решение систем линейных уравнений матричным методом и методом Крамера

1) Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его матричным методом:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x - 5y + 3z = 1 \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Ответ: $x=1,\ y=1,\ z=1$

3) Доказать, что система имеет единственное решение и найти его по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0 \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0 \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0 \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0 \end{cases}$$

Ответ: $x=-3$, $y=0$, $z=-1/2$, $t=2/3$. $\Delta=-252$

5. Метод Гаусса

Исследовать системы на совместность. Если система совместна, найти методом Гаусса её общее решение и одно частное решение.

1) $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_4 + 3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 6 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0 \end{cases}$ (единственное решение)

2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$ $\left(r(A) = 2\right)$

3) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 5 \end{cases}$ (система несовместна)

6. Системы линейных однородных уравнений

Выяснить, какие системы имеют нетривиальные решения. Для каждой из них найти какую-либо фундаментальную систему решений.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$ $\left(r(A) = 2\right)$

2) $\begin{cases} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 7x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$ $\left(r(A) = 2\right)$

3) $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0 \\ -x_2 + x_4 - x_6 = 0 \\ -x_3 + x_5 = 0 \\ -x_4 + x_6 = 0 \end{cases}$ $\left(r(A) = 6\right)$