Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Глава 1.
Линейная алгебра

Преподаватель – доцент кафедры ВМ, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

§1. Матрицы и действия над ними

Определение. ***Матрицей*** размера $m \times n$ называется таблица, образованная из элементов некоторого множества и имеющая m строк и n столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

размер 2×3

3×2 – неправильно

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

размер 3×3

Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***, а если $m = n$ – ***квадратной*** порядка n.

Элементы, из которых составлена матрица, нумеруют двойным индексом.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

a_{21} – элемент второй строки и первого столбца

$a_{21} = 1$

a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца

$a_{13} = -4$

Основные виды матриц

1. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ ***матрица – столбец*** длины 4

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ ***матрица – строка*** длины 5

Основные виды матриц

3.

$$\mathbf{O}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

нулевая матрица

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&0&0\end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\0&a_{22}&\dots&0\\\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

диагональная матрица

! только квадратные

$$\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Основные виды матриц

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

единичная матрица

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

треугольные матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Основные виды матриц

6. Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***ступенчатой***, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

– ступенчатая

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

– не ступенчатая

Действия над матрицами

1. Сложение матриц одинакового размера.
2. Умножение матрицы на число.

Производятся поэлементно!

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 0 & 5\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ -2 & 3 & 0\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2+1 & 3+2 & -4+6\\ 1-2 & 0+3 & 5+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

1. Сложение матриц одинакового размера.

2. Умножение матрицы на число.

Производятся поэлементно!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2B = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 2 & 2\cdot 6 \\ 2\cdot(-2) & 2\cdot 3 & 2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 12 \\ -4 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

(-1)**A** – ***противоположная*** матрице **A** **-A**

Действия над матрицами

1. Сложение матриц одинакового размера.
2. Умножение матрицы на число.

Производятся поэлементно!

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A - B = A + (-1) \cdot B = \begin{pmatrix} 2-1 & 3-2 & -4-6 \\ 1-(-2) & 0-3 & 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -10 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Сложение матриц и умножение матрицы на число называют ***линейными*** операциями.

Свойства линейных операций:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$

3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$

4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$

5. $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$

6. $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$

7. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$

8. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$

3. Умножение матриц.

Возможно ТОЛЬКО тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

A	B	AB	Размерность AB	
2×3	3×4	возможно	2×4	
3×5	3×5	невозможно		
1×4	4×5	возможно	1×5	матрица-строка

$$AB \neq BA$$

а) Умножение строки на столбец такой же длины

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}=1\cdot3+4\cdot0+2\cdot5=13$$

1×3 3×1 возможно 1×1

результат – число

б) Умножение произвольных матриц

Если $C=AB$, то элемент c_{ij} (элемент строки i столбца j) является произведением строки i матрицы A на столбец j матрицы B.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 20 & 8 \\ 22 & -14 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{2\cdot 2+3\cdot 3+(-4)\cdot 4} & \boxed{2\cdot 1+3\cdot 2+(-4)\cdot(-3)} & 2\cdot 0+3\cdot 4+(-4)\cdot 1 \\ 1\cdot 2+0\cdot 3+5\cdot 4 & 1\cdot 1+0\cdot 2+5\cdot(-3) & 1\cdot 0+0\cdot 4+5\cdot 1 \end{pmatrix}$$

Свойства умножения матриц:

1. $\mathbf{AE} = \mathbf{EA} = \mathbf{A}$ $\qquad$ $\mathbf{AO} = \mathbf{OA} = \mathbf{O}$

2. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

3. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$

4. $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$

4. Транспонирование матриц.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Свойства транспонирования матриц:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
3. $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$

§2. Определители

Определитель квадратной матрицы A

– число, характеризующее квадратную матрицу

Обозначается $|A|$

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -102$$

Факториал натурального числа n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$$

$0! = 1$

Расположение n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ в любом порядке называется ***перестановкой*** этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, т.е. если $\alpha_i > \alpha_k$.

Определение. Пусть **A** – квадратная матрица порядка n. ***Определителем*** матрицы **A** (***определителем порядка*** n) называется сумма $n!$ членов, составленных следующим образом: членами определителя служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы, причём произведение берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число, в противном случае – со знаком «минус».

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Правило треугольников:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \quad - \quad \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Свойства определителей

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

3. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

4. Определитель равен нулю, если:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Если некоторая строка (столбец) может быть представлена в виде суммы других k строк, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то будем говорить, что данная строка (столбец) является линейной комбинацией указанных строк (столбцов).

4. Определитель равен нулю, если:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$ так как третья строка состоит из одних нулей

4. Определитель равен нулю, если:

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (т.е. отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

третий столбец определителя является линейной комбинацией второго и первого с коэффициентами 2 и –1:

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-4 \\ 16-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

5. Если все элементы k-той строки определителя $|\mathbf{A}|$ являются суммами двух элементов, то определитель равен сумме двух определителей $|\mathbf{A}_1|$ и $|\mathbf{A}_2|$, у которых все строки кроме k-той совпадают со строками $|\mathbf{A}|$, а k-тая строка в определителе $|\mathbf{A}_1|$ состоит из первых слагаемых, а в определителе $|\mathbf{A}_2|$ – из вторых слагаемых.

6. Определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

7. Если **A** и **B** – квадратные матрицы порядка n, то

$$|\mathbf{AB}| = |\mathbf{BA}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{B}|$$

Пусть **A** – матрица размера $m \times n$

k – некоторое число, $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$

Определение. Выберем в матрице **A** произвольно k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель M_k. Этот определитель называют ***минором k-го порядка*** матрицы **A** (ее определителя).

Определение. Пусть **A** – квадратная матрица порядка n. Выберем в **A** минор k-го порядка M_k (выберем строки с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцы с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$). Вычеркнем из матрицы **A** строки и столбцы, из элементов которых состоит минор M_k. Определитель M_k^*, составленный из оставшихся элементов, называется ***дополнительным минором*** к минору M_k.

Число $$A_k = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k} \cdot M_k^*$$
называют ***алгебраическим дополнением*** минора M_k.

a_{ij} $\quad M_{ij}$ – дополнительный минор (порядок n-1)

A_{ij} – алгебраическое дополнение: $(-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a_{21}

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

a_{13}

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -17$$

Теорема (Лапласа). Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов) (где $1 \le k \le n-1$). Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Следствие (теоремы Лапласа). Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$$

$$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

(***разложение определителя по*** i-той ***строке*** и j-тому ***столбцу*** соответственно)

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{matrix} \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{A}| = 1 \cdot A_{11} + (-1) \cdot A_{21} + (-1) \cdot A_{31} + 2 \cdot A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -102$$

§3. Обратная матрица

Определение. ***Обратной*** к матрице **A** называется матрица, обозначаемая $\mathbf{A}^{-1}$, такая, что

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{E}$$

Если A имеет обратную, то

1. **A** – квадратная.

2. Обратная матрица единственная.

3. Определитель матрицы **A** отличен от нуля.

Теорема. Пусть **A** – квадратная матрица порядка *n*. Матрица **A** имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель |**A**| отличен от нуля. Причем обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ может быть найдена по формуле:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^{T}$$

где **S** – матрица из алгебраических дополнений элементов матрицы **A**, т.е.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \quad |A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0$$

обратная матрица существует

$$A_{11}=(-1)^{1+1}4=\boxed{4} \quad A_{12}=(-1)^{1+2}3=\boxed{-3}$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}2=-2 \quad A_{22}=(-1)^{2+2}1=1$$

$$\mathbf{S}=\begin{pmatrix}\boxed{4 \quad -3}\\ -2 \quad\ \ 1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^T=\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}4\\-3\end{matrix}} & \begin{matrix}-2\\1\end{matrix}\end{pmatrix} \quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot S^T=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$$

строка записывается в столбец

§4. Ранг матрицы

Определение. ***Рангом матрицы*** называют максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля.

Базисным минором матрицы называют её отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются ***базисными***.

$$r(\mathbf{A})$$

Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть ***ступенчатой***, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$r(A) = 3$$

Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ненулевых строк в ней.

Определение. ***Элементарными преобразованиями матрицы*** называются преобразования следующего вида:

1. умножение некоторой строки (столбца) на ненулевое число;
2. прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число;
3. перестановка двух строк (столбцов);
4. вычеркивание нулевой строки (столбца).

Определение. Матрица **B** называется ***эквивалентной*** матрице **A**, если она может быть получена из **A** элементарными преобразованиями.

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$$

Теорема (*об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований*). Ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований (эквивалентные матрицы имеют равные ранги).

1) с помощью элементарных преобразований строк получаем для матрицы **A** эквивалентную матрицу **B**, имеющую ступенчатый вид;

2) определяем ранг матрицы **B** и, следовательно, матрицы **A**.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} -3 \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} -1$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

В полученной матрице 2 строки $\Rightarrow$
ранг исходной матрицы равен 2.

$S_1, S_2, \dots, S_k$ – строки (столбцы) матрицы A

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – некоторые числа

$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k$ – ***линейная комбинация***

Определение. Строки (столбцы) $S_1, S_2, \dots, S_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_k S_k = 0$ (нулевой матрице).

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{array}$$

$$2S_1 + S_2 - S_4 =$$

$$= (0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0) = \mathbf{O}$$

S_1, S_2, S_4 – линейно зависимы

$S_1, S_2, \ldots, S_k$ – строки (столбцы) матрицы A
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа

$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k$ – ***линейная комбинация***

Определение. Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что линейная комбинация $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = 0$ (нулевой матрице).

Если же равенство $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = 0$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называют ***линейно независимыми***.

Лемма *(о линейной зависимости)*. Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией других.

Теорема *(о базисном миноре)*. **1.** Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.
2. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Следствие *(критерий равенства нулю определителя)*. Определитель матрицы **A** равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.

§5. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ – числа.

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ – ***коэффициенты*** уравнения

b – ***свободный член***

Если $b = 0$, то уравнение называют ***однородным***.

Если $b \neq 0$, то уравнение называют ***неоднородным***.

Система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными,

т.е. система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \quad (*)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

основная матрица

$$\mathbf{A}^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

расширенная матрица

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Тогда система принимает вид:

$$\mathbf{AX = B}$$

Упорядоченный набор чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ называется ***решением*** системы (*), если он обращает в тождество каждое уравнение системы.

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix} \text{ – решение системы}$$

Если система линейных уравнений имеет хотя бы одно решение, то её называют ***совместной***.

Система линейных уравнений, не имеющая решений, называется ***несовместной***.

Если система совместна, то она имеет либо одно решение, либо бесконечно много решений.

Система, имеющая единственное решение, называется ***определенной***.

Система, имеющая бесконечно много решений, называется ***неопределенной***.

Теорема (Кронекера – Капелли). Система линейных уравнений (*) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*)$$

Теорема (критерий единственности решения). Система линейных уравнений (*) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы и равен числу переменных, т.е.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = n$$

1) Матричный метод

Пусть $m = n$ и $\left|\mathbf{A}\right| \neq 0.$

Системы такого вида называются ***невырожденными***.

1. $\left|\mathbf{A}\right| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(A) = n \quad \Rightarrow \quad r(A^{*}) = n \quad \Rightarrow$

$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^{*}) = n \quad \Rightarrow$ решение единственно.

2. $|\mathbf{A}| \neq 0 \quad \Rightarrow$ матрица **A** имеет обратную $\mathbf{A}^{-1}$.

$\mathbf{AX = B}$ запись системы через матрицы

Умножим это равенство на обратную матрицу слева

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}}\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$$

Но $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E} \Rightarrow \boxed{\mathbf{EX}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$

При умножении на единичную матрицу матрица не меняется $\Rightarrow$ $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$

2) Метод Крамера

Теорема (Крамера). Если в системе линейных уравнений число уравнений m и число неизвестных n совпадает и $\left|\mathbf{A}\right| \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

где $\Delta = \left|\mathbf{A}\right|$, а Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ заменой его i-го столбца на столбец свободных членов.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \boxed{-1} \\ 3x_1 + 4x_2 = \boxed{-1} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \neq 0$$

существует единственное решение

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1}{-1} = 1 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{-1} = -1$$

3) Метод Гаусса

Определение. ***Элементарными преобразованиями системы линейных уравнений*** называются преобразования следующего вида:

1. умножение обеих частей уравнения на ненулевое число;
2. прибавление к одному уравнению другого, умноженного на произвольное число;
3. перестановка двух уравнений;
4. вычеркивание одного из двух пропорциональных или одинаковых уравнений.

Определение. Две системы называются ***эквивалентными (равносильными)***, если их решения совпадают.

Схема метода Гаусса.

Прямой ход

1. Элементарными преобразованиями приводим систему к эквивалентной системе, имеющей расширенную матрицу ступенчатого вида.

2. Выясняем, будет ли система совместна, сравнивая ранги основной и расширенной матриц полученной системы.

3. Выбираем в основной матрице полученной системы базисный минор треугольного вида.

4. Переносим в правую часть системы слагаемые с неизвестными, коэффициенты которых не вошли в базисный минор. Эти неизвестные будем называть ***независимыми (свободными)***, остальные – ***зависимыми***.

Обратный ход

5. Начиная с последнего уравнения (в обратном порядке) выражаем все зависимые переменные через свободные. Система, в которой зависимые переменные выражены через свободные, называется ***общим решением*** системы.

6. Придавая свободным переменным конкретные числовые значения, получаем бесконечно много решений исходной системы. Каждое из этих решений называют ***частным решением*** системы.

$$
\begin{cases}
2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\
3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\
9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2.
\end{cases}
$$

1. $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{2} & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) -3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) -1 \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) 3 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{11} & 5 & -1 & 10 \\ 0 & -11 & -5 & 1 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 8 - 9x_2 - 4x_3 \\ x_2 \\ x_3 \\ -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}}$$

1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{-1} & 2 & 1 & \boxed{-1} & 2 \\ \boxed{0} & 11 & 5 & \boxed{-1} & 10 \end{array}\right)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ \quad\;\; + 11x_2 + 5x_3 - x_4 = 10. \end{cases}$$

2. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*) = 2 \quad \Rightarrow$ система совместна

3. $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{cases} \boxed{-x_1} - x_4 = 2 - 2x_2 - x_3, \\ \quad\;\; \boxed{-x_4} = 10 - 11x_2 - 5x_3. \end{cases}$

5. $x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3$

$x_1 = -2 + 2x_2 + x_3 - x_4 = -2 + 2x_2 + x_3 + 10 - 11x_2 - 5x_3$

$\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3 \end{cases}$ – общее решение

§6. Системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (**)$$

$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ – решение, т.е. система совместна

Это решение называют ***нулевым*** или ***тривиальным***. Другие решения называют ***нетривиальными***.

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^*)$$

Теорема (критерий существования нетривиальных решений). Система линейных однородных уравнений обладает нетривиальным решением тогда и только тогда, когда ранг её основной матрицы меньше числа неизвестных, то есть $r(\mathbf{A}) < n$.

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ – матрицы-столбцы, являющиеся решениями системы (**)

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа

$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_k C_k$ – ***линейная комбинация***

Теорема (свойство решений системы линейных однородных уравнений). Любая линейная комбинация конечного числа решений системы (**) является решением этой системы.

Теорема (существования фундаментальной системы решений). Пусть r – ранг матрицы системы (**). Если система имеет нетривиальные решения, то найдутся $n - r$ линейно независимых решений таких, что любое другое её решение будет их линейной комбинацией. Эти решения называются ***фундаментальной системой решений*** системы (**).

1. Находим общее решение системы.
2. Записываем любой отличный от нуля определитель порядка $n - r$.
3. Записываем $n - r$ решений системы, беря в качестве значений для свободных неизвестных элементы строк поочередно.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - 2x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти ***фундаментальную*** систему решений

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = x_4 \end{cases}}$$ – общее решение (метод Гаусса)

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array}$$

Δ – любой отличный от нуля определитель

1) $x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 0$

2) $x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

3) $x_3 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad x_2 = 0$

(1, 0, 1, 0, 0), (– 1, 1, 0, 1, 0), (2, 0, 0, 0, 1)

– фундаментальная система решений

Пусть система $AX = B$ совместна и $r(A) < n$.

Установим связь между решениями системы $AX = B$ и соответствующей ей системы $AX = 0$.

Теорема 1. Сумма любого решения линейной неоднородной системы и любого решения соответствующей ей однородной системы является решением неоднородной системы.

Теорема 2. Разность двух произвольных решений линейной неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы.

Теорема 3. Общее решение линейной неоднородной системы равно сумме любого частного решения этой системы и общего решения соответствующей однородной системы.