4.2.3. Индивидуальное задание №2

Вариант 1

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = (2-x)^2$, $x_0=1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} tg\left(x^3 + x^2 \sin\frac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x \cdot \ln(x+1)$; 2.2. $y = 1 - \sin x + (1-x^2)^3$;

2.3. $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}}$; 2.4. $y = \dfrac{3x^5 - 2x^4 + 4}{\sqrt{x^2-1}}$;

2.5. $y = 2\sqrt[3]{x+3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^2+x+1}}$; 2.6. $y = \cos^3(1-5x^2)$;

2.7. $y = \ln(2x + \sqrt{2^x - \sqrt{x} + 1})$; 2.8. $y = arctg(tg^2 x + \sqrt{1-\sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $tg(xy) = e^{x^2+y^3}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^3 - 3t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

6.1. $y = \dfrac{4x - x^2}{4}$, $x_0 = 2$; 6.2. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t, \end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{a}{8}; a\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x^2 \cdot e^{\sqrt{x^2+x+1}}$; 7.2. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{7.76}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \ln(1 - \cos 2x)$ в точке $x_0=\pi/2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\pi/x}{ctg(\pi x/2)}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}(ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x_0=1$; *б*) $y=x\cdot\sin x^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}-2x+1$; *б*) $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$; *в*) $y=x-2\ln x$.

13 Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x+\sqrt{x}$, $[0;4]$; *б*) $y=\dfrac{x+3}{x^2+7}$, $[-3;7]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$ *б*) $y=x\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;4)\cup(4;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=4$.
3) Горизонтальные асимптоты: $y=0$ $(x\to+\infty)$.
4) Наклонные асимптоты: $y=x$ $(x\to-\infty)$.
5) Стационарные точки: 1; 2.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –2; 0.
7) Интервалы монотонности:
   - *а*) возрастания: $(-\infty;-2),(-2;-1),(0;2),(2;4)$
   - *б*) убывания: $(-1;0),(4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   - *а*) выпуклости: $(-2;0),(0;2)$
   - *б*) вогнутости: $(-\infty;-2),(2;4),(4;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-2)=0$, $y(-1)=2$, $y(0)=0$, $y(2)=3$, $y(5)=2$.

Вариант 2

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(2+x)^2$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} arctg\left(x\cos\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(x+1)\cdot\ln x$; 2.2. $y=2-\cos x+(1-x^2)^4$;

   2.3. $y=x^3\cdot e^{\sqrt{x^2-x+1}}$; 2.4. $y=\dfrac{2x^3-2x+1}{\sqrt{1-x^2}}$;

   2.5. $y=\sqrt[4]{x+3}-\dfrac{3}{(x^2+x+1)^2}$; 2.6. $y=\cos^2(1-5x^3)$;

   2.7. $y=\ln(x-\sqrt{3^x-\sqrt{x}+1})$; 2.8. $y=arcctg(tg^3x+\sqrt{1+\sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\cos x)^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $ctg(xy)=e^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=t^2-2t,\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=1+x-x^2$, $x_0=2$; 6.2. $\begin{cases} x=\sin^2 t,\\ y=\cos^2 t,\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=x^2\cdot e^{x^2+1}$; 7.2. $\begin{cases} x=2\cos^2 t,\\ y=3\sin t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt[4]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y=\sqrt[4]{16.06}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\ln(1-\sin 2x)$ в точке $x_0=\pi/8$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^n\cdot\sin\dfrac{a}{x}\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)^{\cos(\pi x/2)}$;

    в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(b+x)(c+x)}-x\right)$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; *б*) $y = x \cdot e^{-6x^2}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = \dfrac{2}{3}x^2 \cdot \sqrt[3]{6x-7}$; *б*) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$; *в*) $y = \ln x + \dfrac{1}{x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^4 - 2x^2 + 3, \ [-3;2]$; *б*) $y = \dfrac{x-5}{x^2+11}, \ [-3;7]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = x + \ln(x^2 - 4)$; *б*) $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-2;+\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = -2$.
3) Горизонтальные асимптоты: $y = 2 \ (x \to +\infty)$.
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –1; 1.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0; 2.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-1;0), (1;2), (2;\infty)$
   б) убывания: $(-2;-1), (0;1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(2;\infty)$
   б) вогнутости: $(-2;0), (0;2)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-1)= -2$, $y(0)=0$, $y(1)= -2$, $y(2)=0$.

Вариант 3

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(1+x)^3$, $x_0=1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} arctg\left(x^2\cos\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^2\cdot\ln x$; 2.2. $y=2-\cos x+x^2$;

   2.3. $y=x^3\cdot e^{\sqrt[3]{x^2-x+1}}$; 2.4. $y=\dfrac{x^3+2x^2-11}{\sqrt{1-x^3}}$;

   2.5. $y=\sqrt[4]{3x-1}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2+x+1}}$; 2.6. $y=tg^2(1+5x^3)$;

   2.7. $y=\log_3(x-\sqrt{3^x-\sqrt{x}})$; 2.8. $y=\arcsin(tg^2x+\sqrt{1-\sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin(1+x))^{x^2}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $tg(x+y)=e^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=1+x^3-2x^5$, $x_0=-1$; 6.2. $\begin{cases} x=2\sin^3 t, \\ y=2\cos^3 t, \end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{4};\dfrac{1}{4}\right)$.

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

   7.1. $y=x\cdot e^{x^2-1}$; 7.2. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t}, \\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\dfrac{x+\sqrt{5-x^2}}{2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.98)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x\cdot e^{x^2-1}$; в точке $x_0=1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^n\cdot e^{-x}\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(ctgx-\dfrac{1}{x}\right)$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$; *б*) $y = \dfrac{\ln(1-3x)}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x \cdot \sqrt{2 - x^2}$; *б*) $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$; *в*) $y = (x-1)^4$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^5 - \dfrac{5}{3}x^3 + 2$, $[-\dfrac{1}{2};3]$; *б*) $y = \dfrac{x-4}{x^2+9}$, $[-4;6]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$ *б*) $y = x^3 \cdot e^x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;2) \cup (2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$.
3) Горизонтальные асимптоты: $y = 3$ $(x \to +\infty)$, $y = 0$ $(x \to -\infty)$.
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –2; 1; 3.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-2;0), (3;\infty)$
   б) убывания: $(-\infty;-2), (0;1), (1;2), (2;3)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3), (1;2), (4;\infty)$
   б) вогнутости: $(-3;0), (0;1), (2;4)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-3)=-1$, $y(-2)=-2$, $y(0)=3$, $y(1)=1$, $y(3)=2$, $y(4)=2{,}5$.

Вариант 4

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=(1-x)^3$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\arcsin\left(x^2\cos\dfrac{1}{3x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=(1-x^2)\cdot\ln x$;

2.2. $y=2x^2-tgx+2$;

2.3. $y=x\cdot e^{\sqrt[5]{x-x^2+1}}$;

2.4. $y=\dfrac{\sin(2x^2-11)}{\sqrt{x^3-1}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{x-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x^3+x+1}}$;

2.6. $y=ctg^2(1-5x^3)$;

2.7. $y=\log_2(3x-\sqrt{4^x-\sqrt{2x}})$;

2.8. $y=\arccos(\ln x+\sqrt{1-e^x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x}{y}=2^{x^2+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=\dfrac{1}{t}.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\, y_0)$:

6.1. $y=2x^3-x^2,\ x_0=-1$; 6.2. $\begin{cases}x=\sqrt{3}\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(x^2-1)\cdot e^{x^2-1}$; 7.2. $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=\dfrac{1}{t}.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt[3]{x^3+7x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y=\sqrt[3]{1.012}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x^2-1)\cdot e^{x^2-1}$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln x\cdot\ln(x-1)\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{tgx}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \ln x,\ x_0 = e$; *б*) $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{1+x^4}}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = (1+x)\cdot e^x$; *б*) $y = \dfrac{4\sqrt{x}}{x+2}$; *в*) $y = 2x^3 - 3x^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2,\ \ [-3;1]$; *б*) $y = \dfrac{x-2}{x^2+5},\ \ [-2;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = x + \dfrac{2x}{x^2-1}$; *б*) $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-3;0) \cup (0;2)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = -3$, $x = 2$.
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –2; –1; 1.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: $0\ (x \to \pm 0)$.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-3;-2), (-1;0), (0;1), (1;2)$;
   б) убывания: $(-2;-1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-3;-\frac{3}{2}), (0;1)$;
   б) вогнутости: $(-\frac{3}{2};0), (1;2)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-1)= 1$, $y(-0)= 2$, $y(+0)=0$, $y(1)=1$.

Вариант 5

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x) = 1 + x + x^2$, $x_0 = -1$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} \ln\left(1 + x^2 \sin\dfrac{2}{x}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y = (1-x)\cdot\ln(1-x)$; 2.2. $y = 2x^5 - arctgx + 1$;

   2.3. $y = x^2 \cdot 7^{\sqrt{1-x^2+x}}$; 2.4. $y = \dfrac{\ln(2x^2 - 11)}{e^{x^3-1}}$;

   2.5. $y = \sqrt[3]{x+3} - \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$; 2.6. $y = \sin^2(1 + x^3)$;

   2.7. $y = \log_2(3 - \sqrt{4^x - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}})$; 2.8. $y = \arccos(\cos x + \sqrt{e^x - 1})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x+1}{y} = \sin(x^2 + y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0\,(x_0; y_0)$:

   6.1. $y = x^5 - 2x^3$, $x_0 = 1$; 6.2. $\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{2\pi}{3} - \sqrt{3}; 1\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y = (x^2 - 1)\cdot e^{1-x^2}$; 7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - \sin 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала $y = \sqrt[3]{27.54}$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = (x^2 - 1)\cdot e^{1-x^2}$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot\ln(1-x)}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0} (ctgx)^{\sin x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left[\dfrac{x}{ctgx} - \dfrac{\pi}{2\cos x}\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \ln(2 + x),\ x_0 = -1$; *б*) $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x^3$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; *б*) $y = (1 + x) \cdot e^{-x}$; *в*) $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{8}{x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 3x + 1,\ [\frac{1}{2};2]$; *б*) $y = \dfrac{4 - x^2}{4 + x^2},\quad [-1;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = 2x - \arcsin x$; *б*) $y = \ln\dfrac{x-1}{x+2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: –

3) Горизонтальные асимптоты: $y=0,\ (x \to -\infty)$.

4) Наклонные асимптоты: $y=x-2\ (x \to \infty)$.

5) Стационарные точки: –1; 1; 3.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0; 2.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty;-1), (0;1), (3;\infty)$,

б) убывания: $(-1;0); (1;2); (2;3)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-2;0), (0;2)$

б) вогнутости: $(-\infty;-2), (2;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках: $y(-2)= 1$, $y(-1)= 2$, $y(0)= 0$, $y(1)=4$, $y(2)=3$, $y(3)= 2$.

Вариант 6

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=1-x^2$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-x^2\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(1+x)\cdot\ln(x^2-1)$; 2.2. $y=\dfrac{1}{x}-5^x-10$;

   2.3. $y=(1-x)^2\cdot e^{\sqrt[3]{1-x^2+x}}$; 2.4. $y=\dfrac{\sin(2-x^3)}{e^{\sqrt{x}-1}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{x^2+3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3+x}}$; 2.6. $y=\cos^2(1+x^3)$;

   2.7. $y=\log_3(3-\sqrt{4^x-\sqrt{2x}})$; 2.8. $y=\arcsin(\cos(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(1+x)^{\sin x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x\cdot y=arctg(x^2+y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\cos 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

   6.1. $y=1+\sin x-\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=3t-t^3,\end{cases}$ $M_0(1;\,2)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(x^2-1)\cdot\ln(1-x^2)$; 7.2. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\cos 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2+x+1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.016)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x^2-1)\cdot\ln(1-x^2)$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x^3}{\sin^6 2x}$; *б*) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tgx)^{2x-\pi}$; *в*) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\arcsin x\cdot ctgx\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

    а) $y=\sqrt{2+x},\ x_0=-1$; *б*) $y=\dfrac{1-e^{-3x}}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 12x$; *б*) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 3}$; *в*) $y = x^3(x+2)^2$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 12x + 7$, $[0;3]$; *б*) $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $(0;\infty)$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}$; *б*) $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = x$ $(x \to \pm\infty)$.
5) Стационарные точки: –2; 2; 3.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 0.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-2;0), (2;3)$,
   б) убывания: $(-\infty;-2); (0;2); (3;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(2.5;3.5)$
   б) вогнутости: $(-\infty;0), (0;2.5), (3.5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-2) = 3$, $y(0) = 5$, $y(2) = -3$, $y(3) = -1$, $y(5) = -4.5$.

Вариант 7

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=1+x^2$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-\dfrac{3\sin x^2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x\cdot\ln(x^2-1)$; 2.2. $y=\sqrt{x}-2^x-3$;

2.3. $y=(1-\sqrt{x})^3\cdot e^{\sin^4 x}$; 2.4. $y=\dfrac{2-x^3+x^5}{e^{x-1}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{3-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^3}+x}$; 2.6. $y=\cos^2(1-x^4)$;

2.7. $y=\log_3(\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}})$; 2.8. $y=\arccos(\sin(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(1-x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\sin(x\cdot y)=x^2+y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\,y_0)$:

6.1. $y=1+\sin x-\cos 2x,\ x_0=-\dfrac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3},\\ y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3},\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(x^2-1)\cdot\ln(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\arcsin x$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.08)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x^2-1)\cdot\ln(x^2-1)$ в точке $x_0=2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-6x+6\sin x}{x^5}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0^+}(x)^{\frac{6}{1+2\ln x}}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[3]{3+x},\ x_0=-2$; *б)* $y=\sin(100x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$; *б*) $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}$; *в*) $y = 2x^2 - x^4$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 18x^2 + 96x, \ [0;9]$; *б*) $y = \dfrac{(x+2)^2}{x-1}, \ [-4;0]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{2}{x^2-4}$; *б*) $y = xe^{-x}$).

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –1
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x - 1$.
5) Стационарные точки: 0; –3.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-3), (-1;\infty)$,
   б) убывания: $(-3;-1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-1), (-1;0)$
   б) вогнутости: $(0;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3) = -\dfrac{27}{8}$, $y(-2) = -4$, $y(0) = 0$, $y(2) = \dfrac{4}{3}$.

Вариант 8

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=2+x^3$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x}, & x\neq 0;\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^4\cdot\ln(x-1)$; 2.2. $y=\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}-3$;

   2.3. $y=(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x})\cdot e^{\cos^4 x}$; 2.4. $y=\dfrac{2+x^3-x^5}{e^{x+1}}$;

   2.5. $y=\sqrt{3x-x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}+x}$; 2.6. $y=\cos^3(1-x^4)$;

   2.7. $y=4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}}$; 2.8. $y=arctg(\sin(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tgx)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции y=y(x): $x\cdot y=arctg\dfrac{x}{y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой y=y(x) в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 (x_0; y_0):

   6.1. $y=x+\sin x+\cos 2x,\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{3t}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^2},\end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{12}{5}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1-x^2)\cdot\ln(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt[3]{x^2+2x+5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$ в точке $t_0=\pi/3$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)\cdot tgx$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$; *в*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=e^{2+x}$, $x_0=-2$; *б*) $y=\cos(100x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2+3$; *б*) $y=\sqrt{2x-x^2}$; *в*) $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-12x+7$, $[-3;0]$; *б*) $y=\frac{x^3+16}{x}$, $[1;4]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=(x+4)e^{2x}$; *б*) $y=x-\ln(x+1)$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=1$.
3) Горизонтальные асимптоты: $y=0$.
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: 0; 3.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(0;1),(1;3)$,
   б) убывания: $(-\infty;0),(3;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-0.5),(1;4)$;
   б) вогнутости: $(-0.5;1),(4;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-0.5)=-0.5$, $y(0)=-1$, $y(0.5)=0$, $y(1.5)=0$, $y(3)=2$, $y(4)=1$.

Вариант 9

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=2-x^3$, $x_0=-1$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}2arctg\,\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0;\\ \pi, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^4\cdot\ln(1-x)$; 2.2. $y=e^x-\dfrac{1}{x}-3x$;

   2.3. $y=(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{3-x})\cdot 5^{\cos^4 x}$; 2.4. $y=\dfrac{2+x-x^4}{e^{x+1}}$;

   2.5. $y=\sqrt[4]{3x-x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}-2x}$; 2.6. $y=tg^3(1-x-x^4)$;

   2.7. $y=4^{\sqrt{3}-\sqrt{4^x-\sqrt{1-x}}}$; 2.8. $y=arctg(\sin(x+\sqrt{e^x-1}))$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tg^2x)^{\ln x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x+y=arctg(x^2\cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t^2-2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=x+\sin x-\cos 2x,\ x_0=\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{1}{4}t^4,\\ y=\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{3}t^3,\end{cases}$ $M_0(0;0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=\sqrt{x^2-1}\cdot\ln(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t^2-2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x^2+x+3}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x+\sin x-\cos 2x$ в точке $x_0=\pi$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-tgx)$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\ln x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{2-x}$, $x_0 = 2$; *б*) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{64 - x^3}}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 3 - 2x^2 - x^4$; *б*) $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x-4}}$; *в*) $y = e^x + e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$, $[-2;0.5]$; *б*) $y = \sqrt[3]{2x^2+1}$, $[-2;1]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; *б*) $y = x^2 e^x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = x - 1$.
5) Стационарные точки: –2; 0; 2.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: 1.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-2), (1;\infty)$;
   б) убывания: $(-2;-1), (-1;0), (0;1)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-1), (0;1), (1;2)$;
   б) вогнутости: $(-1;0), (2;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-2) = -3.5$, $y(0) = 0$, $y(1) = -2$, $y(2) = 2$.

Вариант 10

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(2+x)^2$, $x_0=3$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\ln\left(1-x^3\sin\dfrac{2}{x}\right), & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(x+1)^4\cdot\ln(x)$; 2.2. $y=2^x-\sqrt{x}-3x$;

   2.3. $y=(\dfrac{1}{\sqrt{x-4}}-\sqrt{x+4})\cdot 5^{\sin^4 3x}$; 2.4. $y=\dfrac{2x-3x^2-x^3}{x^2+1}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3-x-x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{1+3x}-4x^2}$; 2.6. $y=tg^5(1+4x-x^4)$;

   2.7. $y=\log_5(\sqrt{3}-\sqrt{4^x-x^4})$; 2.8. $y=arctg(\ln x+\sqrt{1-e^x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tgx)^{\ln^2 x}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{y}{x}=arctg(x+y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=1+e^{-3x}$, $x_0=0$; 6.2. $\begin{cases}x=t\cos t,\\ y=t\sin t,\end{cases}$ $M_0\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1-x)^2\cdot e^{x^2-1}$; 7.2. $\begin{cases}x=t^2-2t,\\ y=t-\cos t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^{11}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.021)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(1-x)^2\cdot e^{x^2-1}$ в точке $x_0=2$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\cdot e^{(x/2)}}{x+e^x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\pi/2}(tgx)^{tg2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

   а) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{2x-1}}$, $x_0=1$; *б)* $y=\dfrac{1-e^{-x^2}}{x^2}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{1}{3}x^3-x^4$; *б*) $y=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$; *в*) $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=2x^3+3x^2-12x+1,\ \ [-3;0]$; *б*) $y=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2,\ \ [-3;0]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\ln(x^2-4x+8)$; *б*) $y=(x-1)e^{3x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-2$, $x=2$
3) Горизонтальные асимптоты: $y=0$ $(x\to\infty)$, $y=-1$ $(x\to-\infty)$
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –4; 0; 4.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-4),(-2;2),(4;\infty)$;
   б) убывания: $(-4;-2),(2;4)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-5;-2),(-2;0),(5;\infty)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-5),(0;2),(2;5)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-5)=0$, $y(-4)=1$, $y(-3)=0$, $y(0)=0$, $y(3)=-1$, $y(4)=-2$, $y(5)=-1$.

Вариант 11

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(1+x)^2$, $x_0=4$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} arctgx\cdot\sin\frac{7}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x^4\cdot e^{x+1}$; 2.2. $y=3^x-\sqrt{1+x}-x^3$;

   2.3. $y=(\frac{1}{\sqrt{4-x}}-\sqrt{\ln x+4})\cdot 5^{\sin^2 3x}$; 2.4. $y=\frac{2-3x^3+x^4}{\sqrt{1-x}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3+x-2x^3}-\frac{1}{\cos(1-x)-4x^2}$; 2.6. $y=ctg^5(1-x^4)$;

   2.7. $y=\log_5(\sqrt{3}-\sin 4x+\cos^4 x)$; 2.8. $y=arctg\sqrt{1-e^x}$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(tgx)^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x}=\sin(x\cdot y)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=t^2-2t, \\ y=\sin t-t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

   6.1. $y=1+\ln(x-1)-x^2,\ x_0=2$; 6.2. $\begin{cases} x=\frac{1+t}{t^2}, \\ y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}, \end{cases}$ $M_0\left(\frac{3}{4};\frac{11}{8}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1-x)^2\cdot\sin(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases} x=t^2-2t, \\ y=\sin t-t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^{21}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.998)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(1-x)^2\cdot\sin(x^2-1)$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{tg\left(\pi x/2\right)}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-\left(e^x+e^{-x}\right)\cdot\cos x}{x^4}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{4}$; *б*) $y=\dfrac{1}{\sqrt[4]{16+x^4}}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x-\ln(1+x^2)$; *б*) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$; *в*) $y=x-\sqrt[3]{x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=arctg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right),\quad [0;1]$; *б*) $y=\dfrac{x-3}{x^2+7},\quad [2;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x^3\ln x$; *б*) $y=\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: –

3) Горизонтальные асимптоты: –

4) Наклонные асимптоты: $y=-0.5x$. –

5) Стационарные точки: 0; 4.

6) Точки, где $(y'=\infty)$: –3; 3.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-3;0),(3;4)$;

б) убывания: $(-\infty;-3),(0;3),(4;\infty)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-\infty;-3),(-3;3),(3;5)$;

б) вогнутости: $(5;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-4)=0$, $y(-3)=-4$, $y(-2)=0$, $y(0)=4$, $y(2)=0$, $y(3)=-4$, $y(4)=0$, $y(5)=2$.

Вариант 12

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=x^2$, $x_0=-3$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1+\ln\left(1+x^2\right)\cos\frac{1}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=(1-x)^2\cdot 2^{x+1}$; 2.2. $y=\ln x+\frac{1}{x}-\cos x$;

   2.3. $y=(\frac{1}{9-x^2}-\sqrt{e^x+x^3})\cdot tg^2 3x$; 2.4. $y=\frac{2+3x^2+5x^4}{\sqrt{1+x}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3-2x^3}-\frac{1}{\sin\,(1-x)-4x^2}$; 2.6. $y=ctg^4(1+x^5)$;

   2.7. $y=\log_2(\sqrt{3}-\cos 4x+\sin^4 x)$; 2.8. $y=arcctg\sqrt{1-e^x}$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin x)^{\sqrt{1-x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\frac{y}{x}=x\sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2-t},\\ y=t+t^2.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\,y_0)$:

   6.1. $y=1+tg^2x,\ x_0=\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=1+\sin t,\\ y=1-\cos 2t,\end{cases}$ $M_0\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\frac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(x-1)^2\cdot\cos(x^2-1)$; 7.2. $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2+t},\\ y=t+t^2.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^6$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=(x-1)^2\cdot\cos(x^2-1)$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(e^x-x^2\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(x-1\right)^{\frac{a}{\ln 2(x-1)}}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\pi-arctgx}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sin^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{4}$; *б)* $y = x\cdot\ln(1-2x^2)$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=\frac{x^3}{3}-x^2-3x$; *б)* $y=\frac{x}{1+x^2}$; *в)* $y=x\cdot e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^4+4x,\ \ [-2;2]$; *б)* $y=\sqrt{100-x^2},\ \ [-6;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\frac{x^3+16}{x}$; *б)* $y=x^2-2\ln x$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;3)\cup(3;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 3$.
3) Горизонтальные асимптоты: $y = 0$.
4) Наклонные асимптоты: – –
5) Стационарные точки: –2; 2; 5.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: 0.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-2),(0;2),(2;3),(3;5)$;
   б) убывания: $(-2;0),(5;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-3;0),(0;2),(3;6)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-3),(2;3),(6;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)=1, y(-2)=2, y(0)=-4, y(2)=1, y(5)=2, y(6)=1$.

Вариант 13

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x$, $x_0 = 10$; 1.2. $f(x) = \begin{cases} 3^{\frac{\sin x^2}{x}} - 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = x^4 \cdot \ln(1-x)$; 2.2. $y = 2^x - ctgx + x^2$;

2.3. $y = (1-x)^3 \cdot e^{\sqrt[5]{x-1}}$; 2.4. $y = \dfrac{3x^4 + 2x^3 - 1}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y = \sqrt{3x^2 - 1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 1}}$; 2.6. $y = tg^2(1-x^3)$;

2.7. $y = \ln(1 - \sqrt{5^x - \sqrt{x}})$; 2.8. $y = arctg(tg^2 x + \sqrt{1 - \sin x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sin x)^{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}$

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{y}{x} = y \sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tgt. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = 10 + x(3 - 2x^3)$, $x_0 = -1$; 6.2. $\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t}, \\ y = \dfrac{t-1}{t}, \end{cases}$ $M_0(0;\, 2)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x-1)^2 \cdot \cos(1-x^2)$; 7.2. $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 1 - tgt. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.03)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = x^2 \cdot \cos(1 - x^2)$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \alpha} \dfrac{ctg(x-\alpha)}{\ln(x-\alpha)}$; *б*) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1} \right)$; *в*) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(tgx \right)^{tg 2x}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}$, $x_0=1$; *б*) $y=x\cdot\sin 25x^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=2x+3\cdot\sqrt[3]{x^2}$; *б*) $y=\frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$; *в*) $y=x\cdot\ln x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=81x-x^4$, $[-1;4]$; *б*) $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$, $[-1;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x^{\frac{2}{3}}\cdot e^{-x}$; *б*) $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-1$, $x=1$.
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y=x$ $(x\to\pm\infty)$. –
5) Стационарные точки: –2; 0; 2.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: –3, 3.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-3),(-2;-1),(1;2),(3;\infty)$;
   б) убывания: $(-3;-2),(-1;1),(2;3)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(0;1),(1;3),(3;\infty)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-3),(-3;-1),(-1;0)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)=-1$, $y(-2)=-3$, $y(0)=0$, $y(2)=3$, $y(3)=1$.

Вариант 14

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=(2+x)^2$, $x_0=8$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}10^{\frac{\arcsin x^2}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=x\cdot\ln(1-x^2)$; 2.2. $y=7^x-\arccos x+x^7$;

   2.3. $y=(1-x^3)\cdot e^{\sqrt{x-1}}$; 2.4. $y=\dfrac{x-2x^3+3}{\sqrt{1-x^3}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{1-3x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-x}}$; 2.6. $y=\sin^3(1-x^2)$;

   2.7. $y=\ln(x^2+\sqrt{5^x-\sqrt{x}})$; 2.8. $y=arctg(\cos^2 x+\sqrt{1-tgx})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin\sqrt{x})^x$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x}{y}=x\sin y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=tg\,2t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\, y_0)$:

   6.1. $y=x+\sin\dfrac{x}{2}-2\cos\dfrac{x}{4}$, $x_0=2\pi$; 6.2. $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3,\end{cases}$ $M_0(-3;\,-6)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=x^3\cdot\ln^2 x$; 7.2. $\begin{cases}x=tg\,2t,\\ y=1-\sin 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{4x-1}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.56)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x^3\cdot\ln^2(x+1)$ в точке $x_0=0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x(x-1)}}+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right)$; *б*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$;

    в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{2x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[3]{x}$, $x_0=-1$; *б*) $y=x^3\cdot e^{-2x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^2(x-12)^2$; *б*) $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}$; *в*) $y=\sqrt{x}\cdot\ln x$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^3-3x+1,\ \ [0;2]$; *б*) $y=\dfrac{x^2}{x^2-4},\ \ (-2;3]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$; *б*) $y=\ln(2x^2+3)$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;-1)\cup(-1;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=-1$.
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. –
5) Стационарные точки: –2; 0; 2.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: 1.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-2;-1),(1;2)$;
   б) убывания: $(-\infty;-2),(-1;1),(2;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3),(0;1),(1;3)$;
   б) вогнутости: $(-3;-1),(-1;0),(3;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)=1$, $y(-2)=0$, $y(0)=0$, $y(1)=-2$, $y(2)=1$, $y(3)=0$.

Вариант 15

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=x^3$, $x_0=-2$; 1.2. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{4arctg^2 x}{x}}-1, & x\neq 0; \\ 0, & x=0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x+1+\ln(1-x)$; 2.2. $y=2^{x+1}-tgx+x^3$;

2.3. $y=(1-x^2)^3\cdot e^{\sqrt[5]{x-1}}$; 2.4. $y=\dfrac{3+x^4-2x^3}{\sqrt{1-x^3}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{3x^2-x}-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+x-1}}$; 2.6. $y=ctg^2(1-2x^3)$;

2.7. $y=\ln(5^x-\sqrt{1-\sqrt{x}})$; 2.8. $y=arctg(\sin^4 x+\sqrt{1-\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin\sqrt{x})^{\sqrt{x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $\dfrac{x}{y}=y\sin x$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=t-e^{-t}. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y=1+x^3+x^5$, $x_0=-1$; 6.2. $\begin{cases} x=t(1-\sin t), \\ y=t\cos t, \end{cases}$ $M_0(0;0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y=(1-x)^3\cdot\ln^2(x-1)$; 7.2. $\begin{cases} x=t+e^t, \\ y=t-e^{-t}. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=x^7$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(2.002)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=x\cdot\ln^2(x+1)$ в точке $x_0=1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\sqrt{\cos x}}{x^2}$; *в)* $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^x\right)^{tg\frac{2}{x}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\sqrt[4]{2-x}$, $x_0=1$; *б)* $y=x^4+\sin x^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

$a)\ y = x^3 + x^2 + 3$; $\quad б)\ y = \dfrac{x^2 + 6x + 13}{x - 3}$; $\quad в)\ y = x^2 \cdot e^{-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

$a)\ y = x^3(8 - x),\ \ [0;7]$; $\quad б)\ y = \dfrac{3 - x}{x^2 + 7},\ \ [-3;2]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

$a)\ y = \dfrac{x^3 - 1}{4x^2}$; $\quad б)\ y = e^{3x - x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: –
3) Горизонтальные асимптоты: $y = -1$ $(x \to +\infty)$, $y = 0$ $(x \to -\infty)$.
4) Наклонные асимптоты: – –
5) Стационарные точки: –4; –2; 0; 2; 4.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –1; 1.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-\infty;-4), (-2;-1), (0;1), (2;4)$;
   б) убывания: $(-4;-2), (-1;0), (1;2), (4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-5;-3), (3;5)$;
   б) вогнутости: $(-\infty;-5), (-3;-1), (-1;1), (1;3)$.
9) Значение функции в некоторых точках: $y(-5) = ½$, $y(-4) = 1$, $y(-3) = 0$, $y(-2) = -1$, $y(-1) = 2$, $y(0) = 1$, $y(2) = -2$, $y(3) = -1$, $y(4) = 0$, $y(5) = -½$.

Вариант 16

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

   1.1. $f(x)=2+x$, $x_0=11$; 1.2. $f(x)=\begin{cases}3^{x\sin\frac{1}{x}}-1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

   2.1. $y=1-x+\ln(1+x)$; 2.2. $y=3^{x+1}-\cos x+(x+1)^3$;

   2.3. $y=(1+2x^3)^2\cdot e^{\sqrt{1-x}}$; 2.4. $y=\dfrac{3x^4+x^3-3}{\sqrt{1-2x^2}}$;

   2.5. $y=\sqrt[3]{3x-3}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{10-x^4+x}}$; 2.6. $y=tg^3(1-2x)^2$;

   2.7. $y=\ln(2^x-\sqrt{x-\sqrt{2x}})$; 2.8. $y=arctg(\sin 4x+\sqrt{\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sin\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$.
4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x-3y=x\ln y$.
5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=t-\sin 2t.\end{cases}$
6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке $M_0\,(x_0;\,y_0)$:

   6.1. $y=\sin^3 x+\cos^2 x,\ x_0=\dfrac{\pi}{6}$; 6.2. $\begin{cases}x=\dfrac{1+t^3}{t^2-1},\\ y=\dfrac{t}{t^2-1},\end{cases}$ $M_0\left(3;\,\dfrac{2}{3}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

   7.1. $y=(1+x)^3\cdot\ln^2(x+1)$; 7.2. $\begin{cases}x=t+\sin t,\\ y=t-\sin 2t.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt[3]{2x+\cos x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.
9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\dfrac{x^3}{x+1}$ в точке $x_0=1$.
10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

    а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{tgx}-e^x}{tg2x-2x}$; *б)* $\lim\limits_{x\to 0}\left(tgx\right)^{2tg2x}$; *в)* $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+x)^{1+x}}{x^2}-\dfrac{1}{x}\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

    а) $y=\ln(2-x),\ x_0=1$; *б)* $y=\sin(5x/2)^2$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 + x^2 - x + 2$; *б*) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$; *в*) $y = \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}$, $[-2;2]$; *б*) $y = \dfrac{x-2}{x^2+5}$, $[2;8]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = e^{2x - x^2}$; *б*) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$, $x = 1$

3) Горизонтальные асимптоты: –

4) Наклонные асимптоты: $y = \dfrac{1}{2}x$.

5) Стационарные точки: $-2\frac{1}{2}$; 0; $2\frac{1}{2}$.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: –4.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty;-4), (-2\,{}^1\!/_2;-1), (-1;1), (2\,{}^1\!/_2;\infty)$;

б) убывания: $(-4;-2\,{}^1\!/_2), (1;2\,{}^1\!/_2)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-1;0), (4;\infty)$;

б) вогнутости: $(-\infty;-4), (-4;-1), (0;1), (1;4)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-4) = 0$, $y(-2\frac{1}{2}) = -2$, $y(0) = 0$, $y(2\frac{1}{2}) = 0$, $y(4) = 1$.

Вариант 17

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 1 + x - x^2$, $x_0 = 1$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{x^2} - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = 1 - x^2 + \ln(1-x)$;

2.2. $y = 3^x - \log_3 x + x^3$;

2.3. $y = (1+2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1-x}}$;

2.4. $y = \dfrac{3x^2 - 3}{\sqrt{2 - x^2}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{3x^3 - x} - \dfrac{1}{\sqrt{10 - x^2 + x^4}}$;

2.6. $y = \sin^4(x - 2x^2)$;

2.7. $y = \ln(3^x - \sqrt{2x - \sqrt{2+x}})$;

2.8. $y = \cos(arctg 4x + \sqrt{tg\, x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{x})^{\frac{1}{\sin x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $2x - 3y = x\ln(y^2)$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = x - x^3 - 2x^5$, $x_0 = 1$;

6.2. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$ $M_0\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}; 2\sqrt{2}\right)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = (x-1)^3 \cdot \ln^2(1-x)$;

7.2. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t - t^2. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt{1 + x + \sin x}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(0.01)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0 = 0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^{2x} - 1}\right]$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3} - 1 - x^3}{tg^6 \dfrac{x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = \ln(3-x)$, $x_0 = 2$;

б) $y = (x^2 - 1)\cdot e^{x^2}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 14x - x^4$; *б*) $y = x - arctgx$; *в*) $y = x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^3 - 3x + 1, \quad [-1; \frac{1}{2}]$; *б*) $y = \frac{x+6}{x^2+13}, \quad [-5;5]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x}$; *б*) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-2) \cup (-2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 2$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = -\frac{1}{2}x - 1$.
5) Стационарные точки: –4; 0; 4.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –2.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-4;-2), (2;4)$;
   б) убывания: $(-\infty;-4), (-2;2), (4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-5), (0;2), (2;5)$;
   б) вогнутости: $(-5;-2), (-2;0), (5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-5)= 0$, $y(-4)= -2$, $y(-2)= 4$, $y(0)=0$, $y(4)= -1$,$y(5)= -2$.

Вариант 18

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = 2 + x + x^2$, $x_0 = 1$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^x - 4^x}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = 1 - 2x + \ln(1 - 2x)$;

2.2. $y = 4^x - \log_4 x + x^4$;

2.3. $y = (1 - 2x)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{1+x}}$;

2.4. $y = \dfrac{3x^2 + 3}{\sqrt{2 + x^2}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{3x^3 + x} - \dfrac{1}{\sqrt{10 + x^2 - x^4}}$;

2.6. $y = \sin^3(x + 2x^2)$;

2.7. $y = \ln(3^x + \sqrt{2x + \sqrt{2 - x}})$;

2.8. $y = \cos(arctg 4x - \sqrt{ctg\, x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = x^{\frac{1}{\cos x}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x^2 - 3y = e^x \cdot y$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = arctg x - 2,\ x_0 = 0$;

6.2. $\begin{cases} x = 1 - t^4, \\ y = t^2 - t^3, \end{cases}$ $M_0(0; 0)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x \cdot \ln^3 x$;

7.2. $\begin{cases} x = t^2 - 3, \\ y = 3 + \ln 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \sqrt[4]{2x - \sin(\pi x / 2)}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.02)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ в точке $x_0 = 0$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to 1} (x)^{\frac{m}{x^2 - 1}}$;

б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\cos x \cdot \ln(x - a)}{\ln(e^x - e^a)}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)} \right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y=\ln(3+x),\ x_0=-2$; *б*) $y=\dfrac{x+\ln(1-x)}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y=x^3-6x^2+9x$; *б*) $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$; *в*) $y=x\cdot\sqrt{1-x}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y=x^5-\dfrac{5}{3}x^3+2,\ \ [0;2]$; *б*) $y=\dfrac{x-3}{x^2+16},\ \ [-5;5]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y=x+\dfrac{1}{x}$; *б*) $y=x^3\cdot e^{-x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X\in(-\infty;2)\cup(2;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x=2$
3) Горизонтальные асимптоты: $y=1\ (x\to+\infty), y=0\ (x\to-\infty)$
4) Наклонные асимптоты: –
5) Стационарные точки: –1; 1; 4.
6) Точки, где $(y'=\infty)$: 0.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-1;0),(1;2),(2;4)$;
   б) убывания: $(-\infty;-1),(0;1),(4;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-2),(2;5)$;
   б) вогнутости: $(-2;0),(0;2),(5;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-2)=-½$, $y(-1)=-1$, $y(0)=3$, $y(3)=1.5$, $y(4)=2$, $y(5)=1.5$.

Вариант 19

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x)=x^2-x$, $x_0=-1$;

1.2. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3^{x^2}-4^{x^2}}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x_0=0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y=x-x^3+\ln(1+2x)$;

2.2. $y=2^x+\log_2 x-x^2$;

2.3. $y=(1+2x^2)\cdot e^{\sqrt[4]{1-x}}$;

2.4. $y=\dfrac{x^2-x}{\sqrt{2-x^3}}$;

2.5. $y=\sqrt[3]{x^3-2x}-\dfrac{1}{\sqrt{10+3x^4}}$;

2.6. $y=\cos^4(x-2x^2)$;

2.7. $y=\ln(5^x-\sqrt{2x+\sqrt{2-5x}})$;

2.8. $y=\sin(arctg 4x+\sqrt{tg\,x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y=(\sqrt{1-x})^{\frac{1}{x^2}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x(x+y)=e^{x-y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{t}},\\ y=\sqrt{t}-2\cdot t^{\frac{3}{2}}.\end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0;\, y_0)$:

6.1. $y=arctg\dfrac{1}{x}$, $x_0=1$;

6.2. $\begin{cases}x=t^3+1,\\ y=t^2+t+1,\end{cases}$ $M_0(2;\ 3)$.

7. Найти производную второго порядка y''_{xx} для функций:

7.1. $y=x^3\cdot\ln x$;

7.2. $\begin{cases}x=\dfrac{2}{\sqrt{t}},\\ y=\sqrt{t}-2\cdot t^{\frac{3}{2}}.\end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{x^2+5}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.97)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ в точке $x_0=-1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2 \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$; *б*) $\lim\limits_{x\to 2a}\left(3-\frac{x}{a}\right)^{tg\frac{\pi x}{4a}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(\pi - 2arctgx)\cdot \ln x\right]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{3-x}$, $x_0 = 2$; *б*) $y = \frac{\ln(1-3x^3)}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x$; *б*) $y = (x-5)\cdot e^x$;

в) $y = \frac{x^3}{(x-2)(x+3)}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2,\ \ [-2;0]$; *б*) $y = \frac{1+x^2}{1+x^4},\ \ [-0.1;4]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = e^{-x^2}$; *б*) $y = \frac{4x}{1+x^2}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;-1) \cup (-1;\infty)$.

2) Вертикальные асимптоты: $x = -1$

3) Горизонтальные асимптоты: –

4) Наклонные асимптоты: $y = x$.

5) Стационарные точки: –2; 0.

6) Точки, где $(y' = \infty)$: –3.

7) Интервалы монотонности:

а) возрастания: $(-\infty;-3), (-2;-1), (1;\infty)$;

б) убывания: $(-3;-2)$.

8) Интервалы выпуклости и вогнутости:

а) выпуклости: $(-1;0)$;

б) вогнутости: $(-\infty;-3), (-3;-1), (0;\infty)$.

9) Значение функции в некоторых точках:

$y(-3) = -1$, $y(-2) = -3.5$, $y(0) = 1$.

Вариант 20

1. Исходя из определения производной, найти $f'(x_0)$ для функций:

1.1. $f(x) = x + x^2$, $x_0 = 2$;

1.2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3^{x^2} - 1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ $x_0 = 0$.

2. Найти производную функций:

2.1. $y = (1 + x)^2 + \ln(1 + x)$;

2.2. $y = 6^x - \log_3 x + x^6$;

2.3. $y = (1 - x)^3 \cdot e^{\sqrt[3]{1+2x}}$;

2.4. $y = \dfrac{3x - 1}{\sqrt{2 - x}}$;

2.5. $y = \sqrt[3]{x^3 - x} - \dfrac{1}{\sqrt{1 - 3x^2 + x^4}}$;

2.6. $y = \sin^2(2x - x^2)$;

2.7. $y = \ln(5^x + 3 \cdot \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}})$;

2.8. $y = ctg(arctg 4x + \sqrt{\cos x})$.

3. Найти производную степенно-показательной функции $y = (\sqrt{1 - x})^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$.

4. Найти производную неявной функции $y=y(x)$: $x \cdot y = e^{x+y}$.

5. Найти производную параметрической функции: $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

6. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=y(x)$ в точке x_0 и составить уравнение касательной и нормали в точке M_0 $(x_0; y_0)$:

6.1. $y = arctg \dfrac{2}{x}$, $x_0 = -2$;

6.2. $\begin{cases} x = t^3 + 1, \\ y = t^2, \end{cases}$ $M_0(-7; 4)$.

7. Найти производную второго порядка $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$ для функций:

7.1. $y = x \cdot e^{x^3}$;

7.2. $\begin{cases} x = \sin^2 t, \\ y = 1 - \sin^3 2t. \end{cases}$

8. Найти дифференциал функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x + 1}}$ и вычислить приближенно с помощью дифференциала значение функции $y(1.58)$.

9. Найти дифференциал второго порядка функции $y = \dfrac{x + 1}{x - 1}$ в точке $x_0 = -1$.

10. Вычислить указанные пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(1 + e^x)}{1 - xe^x}$;

б) $\lim\limits_{x \to 0} (ctgx)^{\frac{1}{\ln x}}$;

в) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} [tgx - \sec x]$.

11. Записать формулу Тейлора для функции $y=f(x)$ в окрестности точки x_0:

а) $y = e^{x-4}$, $x_0 = 1$; *б*) $y = \dfrac{x - \ln(1+x)}{x}$, $x_0=0$.

12. Найти экстремумы функций:

а) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$; *б*) $y = \dfrac{4x}{x^2+4}$; *в*) $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значение функций в указанных интервалах:

а) $y = 3x^4 - 16x^3 + 2$, $[0;4]$; *б*) $y = \dfrac{x-3}{x^2+16}$, $[3;10]$.

14. Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \dfrac{4x}{(1+x^2)^2}$; *б*) $y = \dfrac{2^x}{x}$.

15. Построить эскиз графика по известным результатам аналитического исследования:

1) Область определения: $X \in (-\infty;0) \cup (0;\infty)$.
2) Вертикальные асимптоты: $x = 0$
3) Горизонтальные асимптоты: –
4) Наклонные асимптоты: $y = -\dfrac{1}{2}x$.
5) Стационарные точки: –2; –1; 1.
6) Точки, где $(y' = \infty)$: –3; 2.
7) Интервалы монотонности:
   а) возрастания: $(-3;-2), (-1;0), (1;2)$;
   б) убывания: $(-\infty;-3), (-2;-1), (0;1), (2;\infty)$.
8) Интервалы выпуклости и вогнутости:
   а) выпуклости: $(-\infty;-3), (-3;-3/2)$;
   б) вогнутости: $(-3/2;0), (0;2), (2;\infty)$.
9) Значение функции в некоторых точках:
   $y(-3)= 0$, $y(-2)= 3$, $y(-1.5)= 2$, $y(-1)= 1.5$, $y(1)= -2$, $y(2)= 0$.