Математика

Глава 6.
Дифференциальное исчисление функции одной переменной

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

Дифференциальное исчисление – раздел математики, в котором изучаются производные и дифференциалы функций и их применение к исследованию функций.

§1. Понятие производной

Пусть $y = f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности.

Придадим x_0 приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция при этом получит приращение

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) .$$

Определение. Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 *называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента* Δx, *при* $\Delta x \to 0$ *(если этот предел существует и конечен), т.е.*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначают: $y'(x_0)$, $\dfrac{dy(x_0)}{dx}$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Производной функции $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 ***справа (слева)*** *называется*

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \right)$$

(если этот предел существует и конечен).

Обозначают:

$y'_+(x_0)$, $f'_+(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 справа,

$y'_-(x_0)$, $f'_-(x_0)$ – производная $y = f(x)$ в точке x_0 слева.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие существования производной).

Функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0 $\Leftrightarrow$ в этой точке существуют и равны между собой производные функции справа и слева. Причем

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0).$$

Теорема 2 (необходимое условие существования производной функции в точке).

Если функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, то функция $f(x)$ в этой точке непрерывна.

Замечание. Непрерывность функции в точке x_0 не является достаточным условием существования в этой точке производной функции.

Например, функция $y = |\,x\,|$ непрерывна на всей области определения, но не имеет производной в точке $x_0 = 0$.

Соответствие $x_0 \to f'(x_0)$ является функцией, определенной на множестве $D_1 \subseteq \mathrm{D}(f)$.

Ее называют ***производной функции*** $y = f(x)$ и обозначают

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad f'(x), \quad \frac{df}{dx}.$$

Операцию нахождения для функции $y = f(x)$ ее производной функции называют ***дифференцированием функции*** $f(x)$.

Физический и геометрический смысл производной

1) **Физический смысл производной**.

Если функция $y = f(x)$ и ее аргумент x являются физическими величинами, то *производная* $f'(x)$ – *скорость изменения величины* y *относительно величины* x.

Примеры.

а) Пусть $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t. Тогда производная $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0.

б) Пусть $q = q(t)$ – количество электричества, протекающее через поперечное сечение проводника за время t. Тогда $q'(t_0)$ – скорость изменения количества электричества в момент времени t_0, т.е. *сила тока в момент времени* t_0.

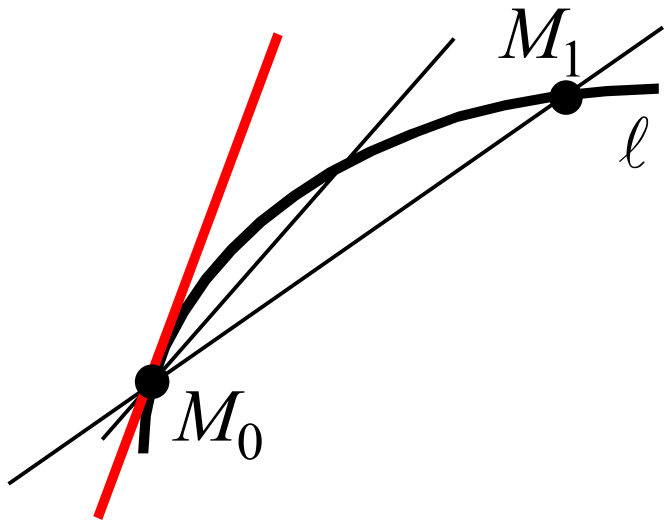
в) Пусть $m = m(x)$ – масса отрезка $[a ; x]$. Тогда $m'(x_0)$ – скорость изменения массы в точке x_0, т.е. *линейная плотность в точке* x_0.

2) Геометрический смысл производной.

Пусть ℓ – некоторая кривая, M_0 – точка на кривой ℓ.

Любая прямая, пересекающая ℓ не менее чем в двух точках, называется ***секущей****.*

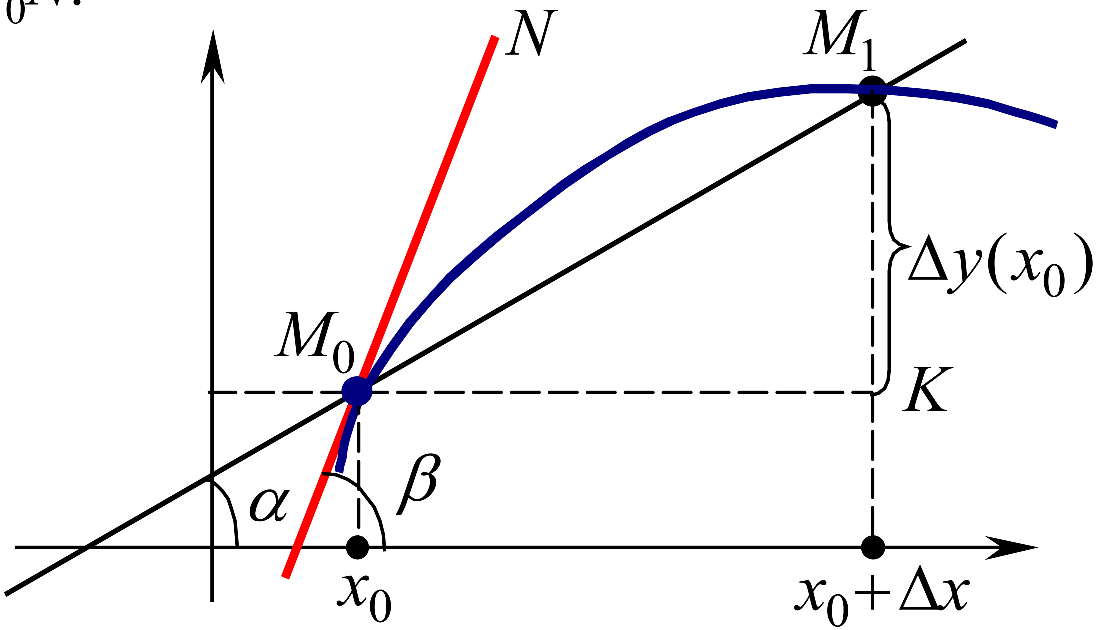
Касательной к кривой ℓ в точке M_0 *называется предельное положение секущей M_0M_1, если точка M_1 стремится к M_0, двигаясь по кривой.*



Очевидно, что если касательная к кривой в точке M_0 существует, то она единственная.

Рассмотрим кривую $y = f(x)$.

Пусть в точке $M_0(x_0\,;f(x_0))$ она имеет невертикальную касательную M_0N.



Справедливо утверждение: *$f\,'(x_0)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,;f(x_0))$.*

(геометрический смысл производной функции в точке).

$\Rightarrow$Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,;f(x_0))$ можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Замечания.

1) Прямая, проходящая через точку M_0 перпендикулярно касательной, проведенной к кривой в точке M_0, называется ***нормалью к кривой в точке*** M_0.

Т.к. для угловых коэффициентов перпендикулярных прямых справедливо равенство $k_1 \cdot k_2 = -1$, то уравнение нормали к $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)\,, \text{ если } f'(x_0) \neq 0.$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0\,; f(x_0))$ будет иметь вид

$$y = f(x_0),$$

а нормаль $$x = x_0.$$

Правила дифференцирования

1) *Производная константы равна нулю*, т.е.

$$C' = 0, \quad \text{где } C \text{ – константа.}$$

2) *Производная суммы (разности) равна сумме (разности) производных*, т.е.

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

3) *Производная произведения находится по правилу*:

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

Замечание. Формула дифференцирования произведения может быть легко обобщена на случай большего числа множителей. Например,

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w',$$

$$(u \cdot v \cdot w \cdot t)' = u' \cdot v \cdot w \cdot t + u \cdot v' \cdot w \cdot t + u \cdot v \cdot w' \cdot t + u \cdot v \cdot w \cdot t'.$$

4) $(C \cdot u)' = C \cdot u'$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак производной».

5) *Производная дроби находится по правилу*:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \qquad \left(v(x) \neq 0\right).$$

6) *Если функция* $\varphi(t)$ *имеет производную в точке* t, *а функция* $f(u)$ *имеет производную в точке* $u = \varphi(t)$, *то сложная функция* $y = f(\varphi(t))$ *имеет производную в точке* t, *причем*

$$y' = f'(u) \cdot u'$$

(правило дифференцирования сложной функции).

7) Теорема 3 (о производной обратной функции).

Пусть функция $y = f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем* $f'(x_0) \neq 0$. *Если существует обратная функция* $x = \varphi(y)$, *то она имеет производную в точке* $y_0 = f(x_0)$ *и*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Таблица производных

1. $c' = 0$, где c - константа
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a \ (a > 0,\ a \neq 1)$, $\quad (e^x)' = e^x$
4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \ (a > 0,\ a \neq 1)$, $\quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5. $(\cos x)' = -\sin x$
6. $(\sin x)' = \cos x$
7. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
8. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
13. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$
14. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$
15. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
16. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

§2. Дифференциал функции

Определение и геометрический смысл

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой в точке*** x_0 *, если ее приращение в этой точке может быть записано как сумма линейной относительно* Δx *части и бесконечно малой более высокого порядка чем* Δx , т.е.

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) , \qquad (1)$$

где A – *число*, $\beta(\Delta x)$ – *б.м. более высокого порядка чем* Δx.

Слагаемое $A \cdot \Delta x$ *в выражении* (1) (т.е. линейную относительно Δx часть $\Delta f(x_0)$) *называют* ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x_0 и обозначают: $dy(x_0)$, $df(x_0)$.

Теорема (о связи дифференцируемости с существованием производной).

Функция $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0 $\Leftrightarrow$ *она имеет в точке* x_0 *производную. При этом для ее дифференциала в точке* x_0 *справедливо равенство*

$$dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x \,. \tag{2}$$

Очевидно, что соответствие $(x_0\,; \Delta x) \to df(x_0)$ является функцией (двух переменных).

Ее называют ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ и обозначают

$$dy\,,\ df(x)\,.$$

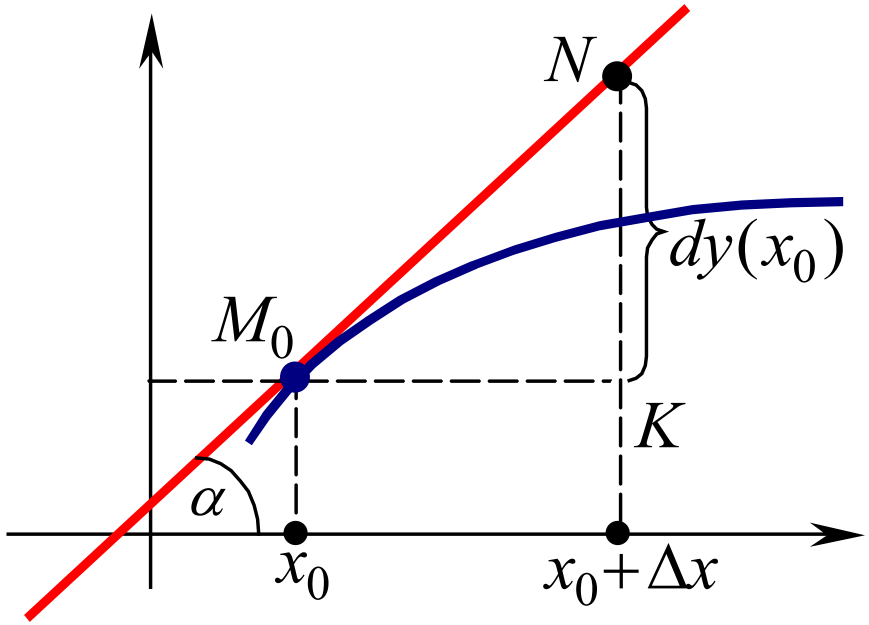
Замечание. Из теоремы 1 следует, что нахождение производной и дифференциала функции представляет собой по существу одну и ту же задачу. Поэтому операцию нахождения производной называют ***дифференцированием функции***.

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой на интервале*** $\boldsymbol{(a;b)}$ *если она дифференцируема* (т.е. имеет производную) *в каждой точке этого интервала*.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***дифференцируемой на отрезке*** $\boldsymbol{[a;b]}$ *если она дифференцируема на интервале* $(a;b)$ *и имеет соответствующие односторонние производные в точках* a *и* b.

Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график функции $y = f(x)$.
Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Тогда в x_0 функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$.
$\Rightarrow$ в точке $M_0(x_0 ; f(x_0))$ $\exists$ касательная к кривой $y = f(x)$.



Справедливо утверждение: *дифференциал функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *равен приращению ординаты точки на касательной к кривой* $y = f(x)$, *которое соответствует приращению* Δx.

Примеры.

Найти дифференциалы функций: 1) $y = x^3$; 2) $y = x$.

Замечания.

1) Так как для дифференциала функции $y = x$ справедливо

$$dy = dx = \Delta x ,$$

то говорят: «*дифференциал независимой переменной равен ее приращению*».

Учитывая этот факт, формулу (2) можно переписать в виде

$$dy = f'(x) \cdot dx . \qquad (3)$$

2) Из формулы (3) получаем, что производная $y' = f'(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, символическая дробь $\frac{dy}{dx}$ превратилась в реальную дробь.

Свойства дифференциалов

Из теоремы 1 и правил дифференцирования получаем, что справедливы следующие утверждения

1) *Дифференциал константы равна нулю*, т.е.

$$d(C) = 0\,, \quad \text{где } C \text{ – константа.}$$

2) *Дифференциал суммы (разности) равна сумме (разности) дифференциалов*, т.е. $d(u \pm v) = du \pm dv$.

3) *Дифференциал произведения находится по правилу*:

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv\,.$$

4) $d(C \cdot u) = C \cdot du$, где C – константа.
Говорят: «*константа выносится за знак дифференциала*».

5) *Дифференциал дроби находится по правилу*:

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}, \quad \left(v(x) \neq 0\right).$$

Рассмотрим дифференциал сложной функции $y = f(\varphi(t))$.

Пусть функция $x = \varphi(t)$ дифференцируема в точке t,
функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке $x = \varphi(t)$.

Тогда $\exists$ производные $x'(t)$ и $f'(x)$ и сложная функция $y = f(\varphi(t))$ имеет производную в точке t, причем

$$y'(t) = [f(\varphi(t))]' = f'(x) \cdot x'(t)$$

Следовательно, функция $y = f(\varphi(t))$ дифференцируема в точке t и ее дифференциал в этой точке равен

$$dy(t) = y'(t) \cdot dt\,,$$

$$\Rightarrow \quad dy(t) = f'(x) \cdot x'(t)dt\,,$$

$$\Rightarrow \quad dy(t) = f'(x) \cdot \underbrace{x'(t)dt}_{dx},$$

$$\Rightarrow \quad dy = f'(x) \cdot dx\,. \qquad (4)$$

Сравним формулы (3) и (4):

(3): $dy = f'(x) \cdot dx$, где x – независимая переменная;

(4): $dy = f'(x) \cdot dx$, где $x = \varphi(t)$ – функция.

Таким образом, *формула* (3) *справедлива вне зависимости от того, является ли x независимым аргументом или функцией*. Поэтому формулу (3) называют ***инвариантной формой записи дифференциала***.

Замечание. Формула

$$dy = f'(x) \cdot \Delta x \tag{2}$$

не является инвариантной.

Действительно, для сложной функции $y = f(\varphi(t))$ имеем:

$$dy(t) = y'(t) \cdot \Delta t = f'(x) \cdot x'(t) \cdot \Delta t .$$

Но $x'(t) \cdot \Delta t \neq \Delta x$, т.к.

$$\Delta x = dx + \beta(\Delta t) = x'(t) \cdot \Delta t + \beta(\Delta t) .$$

§3. Производные и дифференциалы высших порядков

Производные высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$. Тогда на X_1 определена $f'(x)$.

Функцию $f'(x)$ называют также ***первой производной функции $f(x)$*** (или ***производной первого порядка функции $f(x)$***).

Если $f'(x)$ дифференцируема на некотором множестве $X_2 \subseteq X_1$, то $(f'(x))'$ называют ***второй производной функции $y = f(x)$*** (или ***производной второго порядка функции $f(x)$***) и обозначают

$$y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \qquad f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Замечание. Значение второй производной функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают

$$y''(x_0), \quad \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2}, \qquad f''(x_0), \quad \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Если $f''(x)$ тоже дифференцируема на некотором множестве $X_3 \subseteq X_2$, то ее производную $(f''(x))'$ называют ***третьей производной функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ (или ***производной третьего порядка функции*** $\boldsymbol{f(x)}$).

Продолжая этот процесс, назовем ***n-й производной функции*** $y = f(x)$ ее производную от производной порядка $n - 1$.

Обозначают:

$$y''', \quad \frac{d^3y}{dx^3}, \quad f'''(x), \quad \frac{d^3f}{dx^3} \quad \text{– третья производная } y = f(x);$$

$$y^{(4)}, \quad \frac{d^4y}{dx^4}, \quad f^{(4)}(x), \quad \frac{d^4f}{dx^4} \quad \text{– четвертая производная } y = f(x);$$

$$y^{(n)}, \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^nf}{dx^n} \quad \text{– } n\text{-я производная } y = f(x).$$

Производные порядка $n > 1$ называют ***производными высших порядков***.

Физический смысл второй производной.

Если $S = S(t)$ – расстояние, проходимое точкой за время t,

то $S'(t_0)$ – *скорость в момент времени* t_0,

$S''(t_0)$ – *ускорение в момент времени* t_0 (скорость изменения скорости)

Справедливы следующие утверждения.

1) $(C \cdot u)^{(n)} = \mathrm{C} \cdot u^{(n)}$, где C – константа.

Говорят: «константа выносится за знак n-й производной».

2) *Производная n-го порядка суммы* (*разности*) *функций равна сумме* (*разности*) *n-х производных слагаемых*, т.е.

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)} .$$

3) *n-я производная произведения находится по формуле*:

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot u^{(n-k)} \cdot v^{(k)}, \qquad (1)$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$.

Формула (1) называется ***формулой Лейбница***.

Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема на множестве $X_1 \subseteq D(f)$.
Дифференциал $dy = f'(x) \cdot dx$ – функция двух переменных x и $dx = \Delta x$.
Зафиксируем значение dx.
Тогда dy станет функцией одной переменной x.

Дифференциал функции $dy(x)$ (если он существует) называется ***дифференциалом второго порядка функции*** $y = f(x)$ (или ***вторым дифференциалом функции*** $y = f(x)$) и обозначается d^2y, $d^2f(x)$.

d^2y – функция переменной x.
Дифференциал функции d^2y (если он существует) называют ***дифференциалом третьего порядка функции*** $y = f(x)$ (или ***третьим дифференциалом функции*** $y = f(x)$) и обозначается d^3y, $d^3f(x)$.

Продолжая далее этот процесс, определим ***дифференциал n-го порядка функции $y = f(x)$*** как дифференциал от дифференциала порядка $n - 1$. Обозначают: $d^n y$, $d^n f(x)$.

Замечание. Значение дифференциала n-го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $d^n y(x_0)$, $d^n f(x_0)$.

Дифференциалы порядка $n > 1$ называют ***дифференциалами высших порядков***.

Если функция имеет дифференциал порядка n, то ее называют ***n раз дифференцируемой***.

Теорема (о связи дифференциала n-го порядка и n-й производной).

Функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке $x_0 \Leftrightarrow$ она имеет в точке x_0 производную порядка n. При этом для $d^n y(x_0)$ справедливо равенство

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot (dx)^n \ . \qquad (2)$$

Замечания.

1) Скобки в правой части формулы (2) обычно опускают, т.е. записывают ее в виде:

$$d^n y(x_0) = f^{(n)}(x_0) \cdot dx^n \, . \qquad (3)$$

2) Из формулы (3) получаем, что n-я производная $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ является отношением 2-х дифференциалов:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

Таким образом, символическая дробь $\dfrac{d^{(n)} y}{dx^n}$ превратилась в реальную дробь.

3) Дифференциалы порядка n ($n > 1$) не обладают свойством инвариантности. Т.е. формула (3) не будет верной, если x – функция.

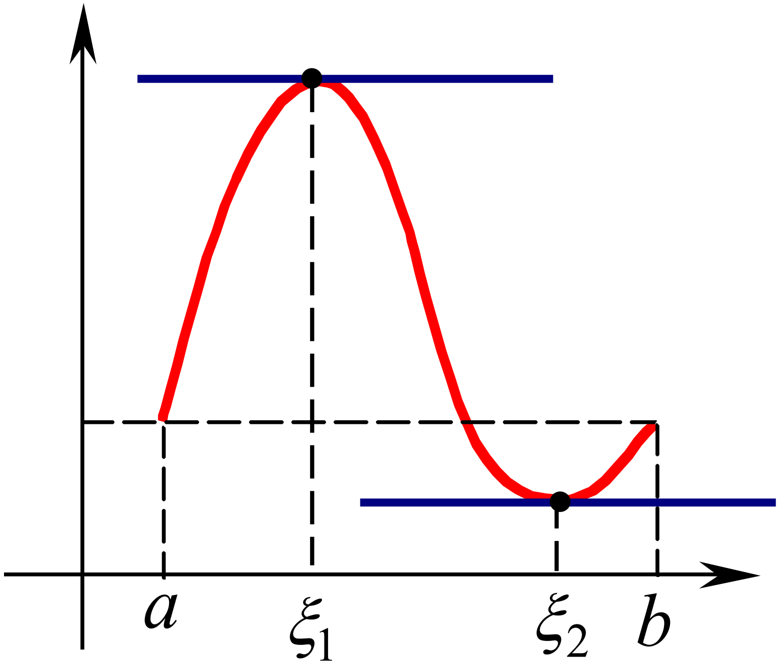
§4. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема 1 (Ролля).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Если $f(a) = f(b)$, *то существует хотя бы одна точка* $\xi \in (a; b)$ *такая, что* $f'(\xi) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля.



Если функция $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме* 1 *условиям, то на интервале* $(a;\, b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна оси* Ox.

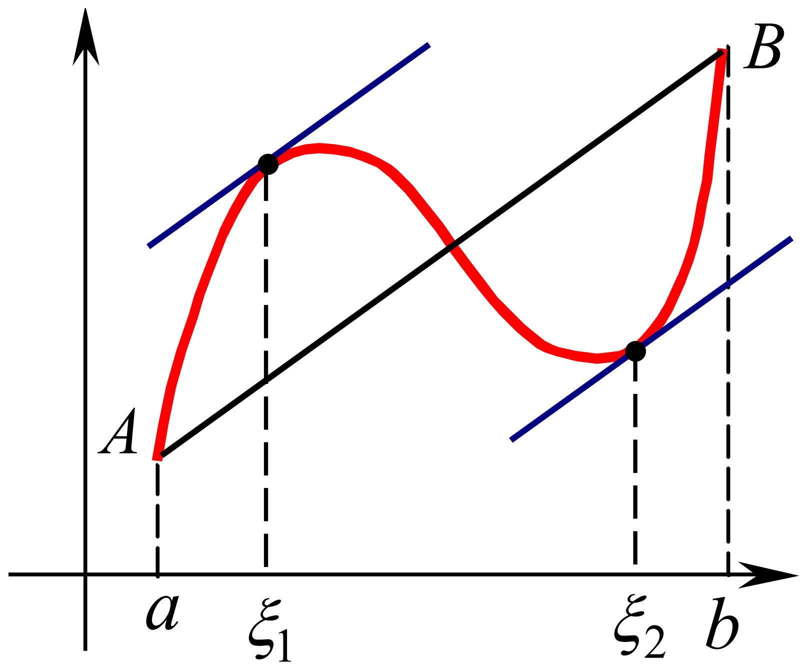
Теорема 2 (Лагранжа).

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a;\, b]$ *и дифференцируема на* $(a;\, b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a;\, b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi). \qquad (2)$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа.



Следовательно, *если функция* $y = f(x)$ *удовлетворяет указанным в теореме 2 условиям, то на интервале* $(a;\ b)$ *существует хотя бы одна точка* ξ *такая, что в соответствующей ей точке кривой* $y = f(x)$ *касательная параллельна секущей AB*.

Замечание. Формулу (2) можно переписать в виде

$$f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)\ . \qquad (3)$$

Формулу (3) называют ***формулой Лагранжа*** или ***формулой конечных приращений.***

Следствие теоремы Лагранжа.

Пусть функция $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a; b]$ *и дифференцируема на* $(a; b)$.

Функция $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *постоянное значение* C $\Leftrightarrow$ $f'(x) = 0,\ \forall x \in (a; b)$.

Теорема 3 (Коши).

Пусть функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;\ b]$ *и дифференцируемы на* $(a;\ b)$, *причем* $\varphi'(x) \neq 0,\ \forall x \in (a;\ b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $\xi \in (a;\ b)$ *такая, что*

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}.$$

§5. Использование производной при вычислении пределов

Теорема (правило Лопиталя).

Пусть $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ и выполняются следующие условия:

1) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и непрерывны в некоторой δ-окрестности x_0, за исключением возможно самой x_0;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0 \quad \left(\textit{или} \quad \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty \right)$;

3) функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в $U^*(x_0,\delta)$, причем

$$\varphi'(x) \neq 0, \quad \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ (конечный или бесконечный),

то $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, причем эти два предела будут равны. Т.е.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

Замечания.

1) Если $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ тоже являются б.м. (б.б.) при $x \to x_0$, то правило Лопиталя можно применить повторно.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя неприменимо. При этом $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать.

Пример. Найти $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

§6. Исследование функций и построение графиков

1. Возрастание и убывание функции

Определение. *Функция* $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** (***неубывающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) \le f(x_2)).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует большее значение функции.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** (***невозрастающей***) *на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \ge f(x_2)).$$

Иначе говоря, функция $y = f(x)$ называется убывающей на $(a;b)$, если большему значению аргумента из $(a;b)$ соответствует меньшее значение функции.

Интервалы возрастания и убывания функции называются ***интервалами монотонности функции***.

Замечание. Из определения $\Rightarrow$ если $f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$, то на этом интервале Δx и соответствующее ему $\Delta f(x)$ будут иметь одинаковый (разный) знак.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) функции).

Пусть $y = f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*

1) *если* $y = f(x)$ *возрастает* (*убывает*) *на* $(a;b)$, *то на этом интервале ее производная неотрицательна (неположительна)*, т.е. $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a;b)$ ($f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a;b)$);

(необходимое условие возрастания (убывания) функции)

2) *если* $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a;b)$ ($f'(x) < 0$, $\forall x \in (a;b)$), *то функция* $y = f(x)$ *на* $(a;b)$ *возрастает (убывает)*.

(достаточное условие возрастания (убывания) функции)

2. Экстремумы функции

Пусть $x_0 \in D(f)$, x_0 – внутренняя точка $D(f)$ (т.е. существует некоторая окрестность точки x_0 , целиком лежащая во множестве $D(f)$).

Определение. *Точка x_0 называется* ***точкой максимума функции*** *$f(x)$ если существует такая δ-окрестность $U(x_0,\delta)$ точки x_0, что $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in U^*(x_0,\delta)$.*

Значение функции точке максимума называется ***максимумом функции***.

Точка x_0 называется ***точкой минимума функции*** *$f(x)$ если существует такая δ-окрестность $U(x_0,\delta)$ точки x_0, что*

$$f(x) > f(x_0)\ ,\ \forall x \in U^*(x_0,\delta).$$

Значение функции точке минимума называется ***минимумом функции***.

Точки минимума и максимума функции называются ее ***точками экстремума***.

Минимумы и максимумы функции называются ее ***экстремумами***.

Замечания:

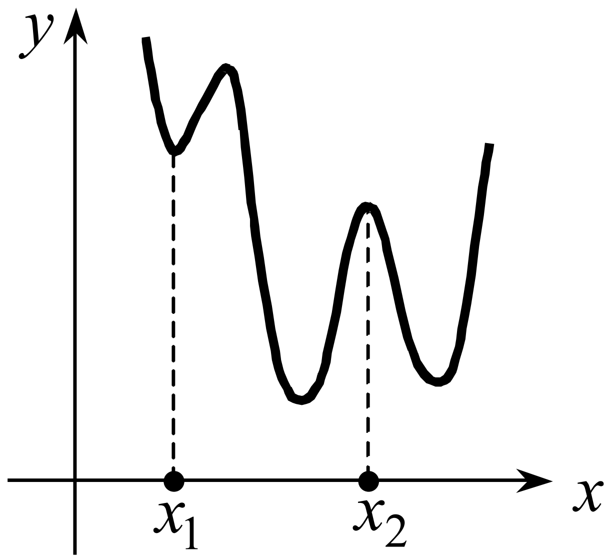
1) Понятия минимум и максимум функции близки к понятиям наименьшее и наибольшее значения функции.

Они показывают, в каком отношении находятся значение функции в точке x_0 и в других точках.

Различие – в области действия понятий. Наибольшее и наименьшее значения – понятия глобального характера, максимум и минимум – понятия локального характера.

Поэтому в некоторой литературе употребляют термины «***глобальный максимум*** (***минимум***)» вместо наибольшего (наименьшего) значения функции и «***локальный максимум*** (***минимум***)» – вместо максимум (минимум) функции.

2) Функция может иметь в своей области определения несколько точек максимума и минимума. Причем, некоторые минимумы функции могут быть больше ее максимумов.

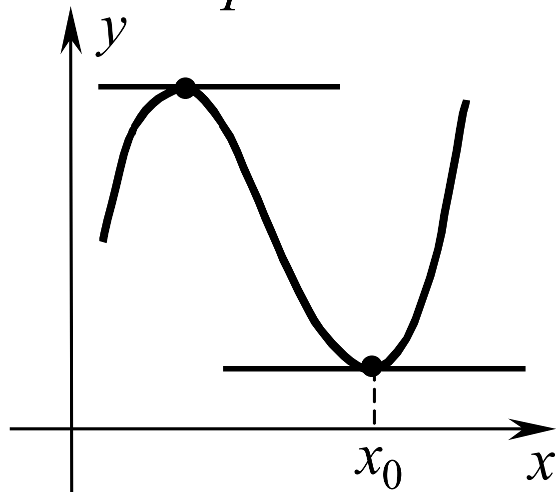


Теорема 2 (необходимое условие экстремума, теорема Ферма).

Пусть x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и* $f(x)$ *– дифференцируема в точке* x_0. *Тогда* $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы 2.

Если x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$ *и кривая* $y = f(x)$ *имеет невертикальную касательную в точке* $M_0(x_0, f(x_0))$, *то эта касательная – горизонтальная.*



Точки, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю, называются ***стационарными точками функции*** $f(x)$.

Теорема 3 (первое достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* $\mathrm{D}(f)$,

$f(x)$ *непрерывна в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$

$f(x)$ *дифференцируема в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ *или* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$.

Если при переходе через точку x_0 *производная функции* $f(x)$ *меняет знак, то* x_0 *является точкой экстремума.*

При этом, если производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 *– точка максимума, если с минуса на плюс – то* x_0 *– точка минимума.*

Замечание.

Из теоремы 3 $\Rightarrow$ точками экстремума могут быть не только стационарные точки, но и точки, в которых функция не имеет производной (точки разрыва производной).

Стационарные точки функции $f(x)$ и точки, в которых $f'(x)$ не существует, называются ***критическими точками*** I ***рода*** (***критическими точками по первой производной***).

Теорема 4 (второе достаточное условие экстремума).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* $\mathrm{D}(f)$ *и*

$f(x)$ *n раз дифференцируема в точке* x_0, *причем*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$$

Тогда:

1) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) > 0$, *то* x_0 *является точкой минимума функции* $f(x)$;
2) *если n – четное и* $f^{(n)}(x_0) < 0$, *то* x_0 *является точкой максимума функции* $f(x)$;
3) *если n – нечетное, то* x_0 *не является точкой экстремума функции* $f(x)$.

Замечание. На практике пользоваться 2-м достаточным условием экстремума менее удобно, чем 1-м. Действительно,

1) сложно вычислить $f^{(n)}(x_0)$;
2) определяются не все промежутки монотонности функции.

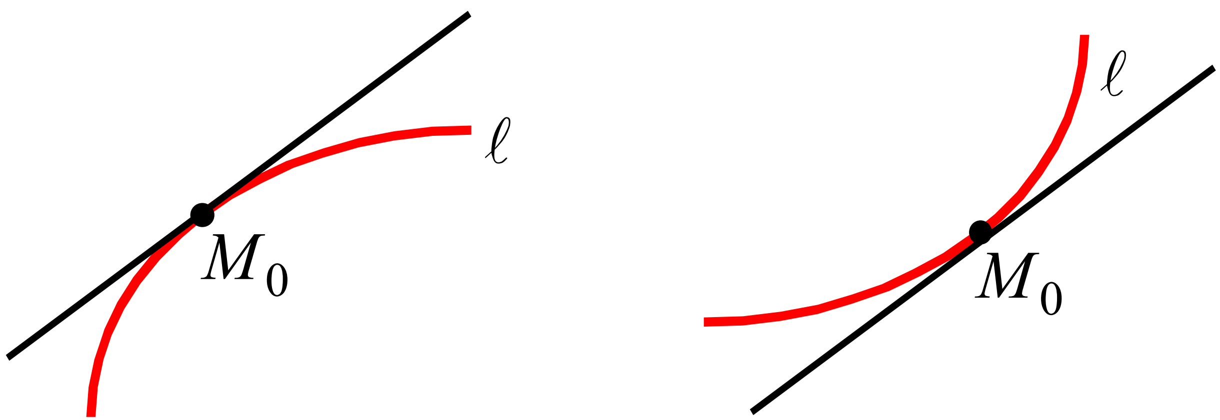
Но иногда, все же лучше применить 2-е достаточное условие. Например, если критических точек бесконечно много.

3. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Определение. *Пусть ℓ – кривая, M_0 – точка кривой, причем в M_0 существует невертикальная касательная к ℓ.*

Кривую ℓ называют ***выпуклой в точке M_0****, если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит ниже касательной, проведенной к ℓ в точке M_0.*

Кривую ℓ называют ***вогнутой в точке M_0****, если в некоторой окрестности этой точки кривая лежит выше касательной, проведенной к ℓ в точке M_0.*

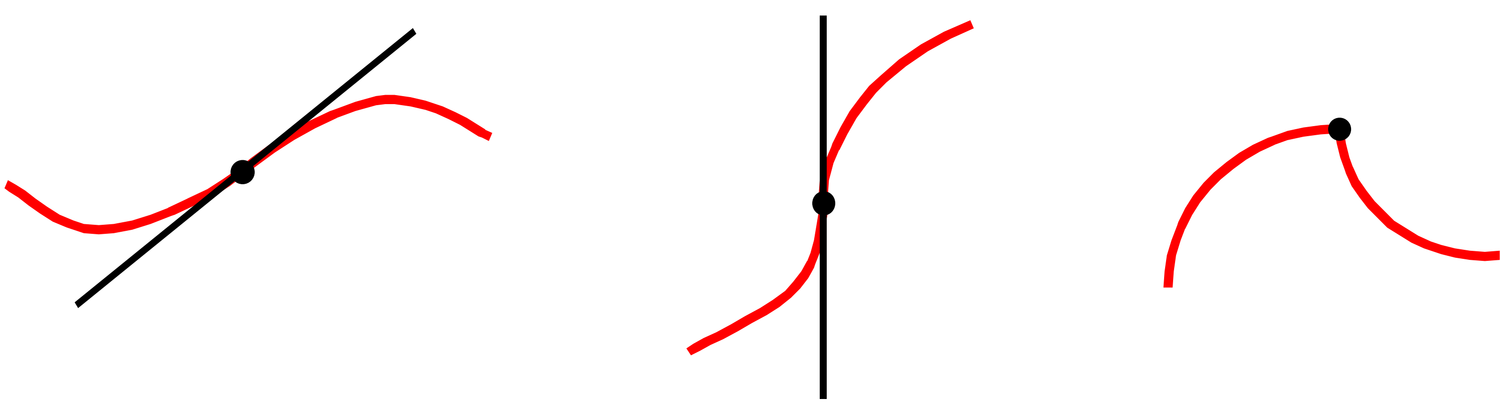


Точки кривой, которые разделяют ее выпуклые и вогнутые участки, называются ***точками перегиба*** *кривой*.

Замечания.

1) Выпуклость и вогнутость кривой в точке – локальные понятия.
Они определяют относительное расположение точек кривой и касательной вблизи точки касания.
В точках, удаленных от точки касания, кривая и касательная могут располагаться произвольным образом.

2) В точке перегиба касательная к кривой (если она существует) пересекает кривую (кривая переходит с одной стороны касательной на другую).



Определение. *Кривая $y = f(x)$ называется* ***выпуклой*** (***вогнутой***) ***на интервале $(a;b)$*** *если $\forall x \in (a;b)$ кривая выпукла* (*вогнута*) *в соответствующей точке $M(x\,;f(x))$.*

Замечания.

1) Если $M_0(x_0\,;f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то x_0 – внутренняя точка области определения функции $f(x)$.

2) Точками перегиба кривой $y = f(x)$ часто называют точки, которые разделяют интервалы выпуклости и вогнутости этой кривой (т.е. абсциссы точек перегиба кривой $y = f(x)$).

Теорема 5 (необходимое и достаточное условия выпуклости (вогнутости) графика функции).

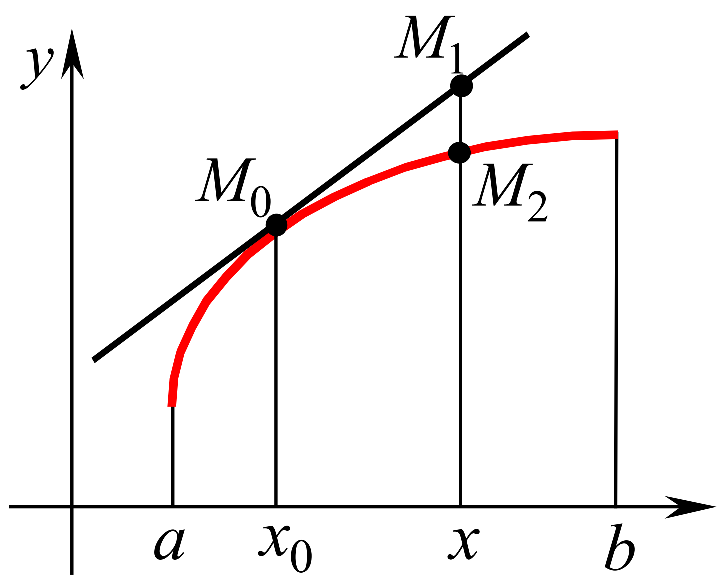
Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема на интервале* $(a;b)$. *Тогда*:

1) *если кривая* $y = f(x)$ *выпукла (вогнута) на интервале* $(a;b)$, *то* $f''(x) \le 0 \quad (f''(x) \ge 0), \quad \forall x \in (a;b)$

(необходимое условие выпуклости (вогнутости) графика);

2) *если* $f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0) \quad \forall x \in (a;b)$, *то кривая* $y = f(x)$ *выпукла (вогнута) на интервале* $(a;b)$

(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика).



Следствие 6 (необходимое условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть функция $y = f(x)$ *дважды дифференцируема в* $\mathrm{U}(x_0,\delta)$ (*или в* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$).

Если $M_0(x_0\,; f(x_0))$ *– точка перегиба кривой* $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ *или в точке* x_0 *функция* $y = f(x)$ *не имеет второй производной*.

Замечание. Точки, в которых вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль или имеет разрыв, называют иногда критическими точками II рода функции $y = f(x)$ (или критическими точками функции $y = f(x)$ по второй производной).

Теорема 7 (достаточное условие перегиба кривой $y = f(x)$).

Пусть x_0 *– внутренняя точка* $\mathrm{D}(f)$ *и функция* $f(x)$ *дважды дифференцируема в* $\mathrm{U}^*(x_0,\delta)$.

Если при переходе через точку x_0 *функция* $f''(x)$ *меняет знак, то точка* $M_0(x_0\ ;\ f(x_0))$ *является точкой перегиба кривой* $y = f(x)$.

4. Асимптоты кривой

Определение. *Прямая* ℓ *называется* ***асимптотой*** *кривой, если при неограниченном удалении точки* M *кривой от начала координат расстояние от точки* M *до прямой* ℓ *стремится к нулю.*

Замечание.

Выделяют два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

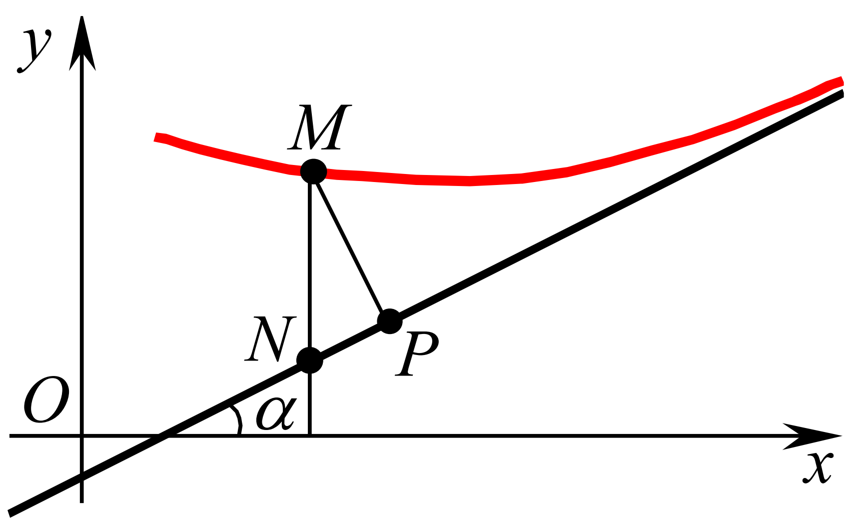
Вертикальные асимптоты кривая $y = f(x)$ не пересекает (почему?), наклонные – может пересекать.

Теорема 8 (необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой y = f(x)).

Прямая $y = kx + b$ *является наклонной асимптотой кривой* $y = f(x) \Leftrightarrow$ *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad и \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=b$$

$$\left(\text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad и \qquad \lim_{x\to-\infty}[f(x)-kx]=b\right).$$



Замечания.

1) Из теоремы 8 следует, что график функции $y = f(x)$ может иметь наклонную асимптоту только если функция определена в окрестности $+\infty$ или $-\infty$.

   Причем, наклонных асимптот у кривой $y = f(x)$ может быть не более двух: для правой ветви (т.е. при $x \to +\infty$) и для левой ветви (т.е. при $x \to -\infty$).

2) Если $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ è $\lim\limits_{x \to +(-)\infty} f(x) = b$,

   то наклонная асимптота имеет уравнение $y = b$, т.е. является горизонтальной.

Теорема 9 (необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y = f(x)$).

Прямая $x = a$ *является вертикальной асимптотой кривой* $y = f(x) \Leftrightarrow$ *точка* $x = a$ *является точкой разрыва* II *рода функции* $y = f(x)$, *причем, хотя бы один из односторонних пределов* $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ *равен бесконечности*.

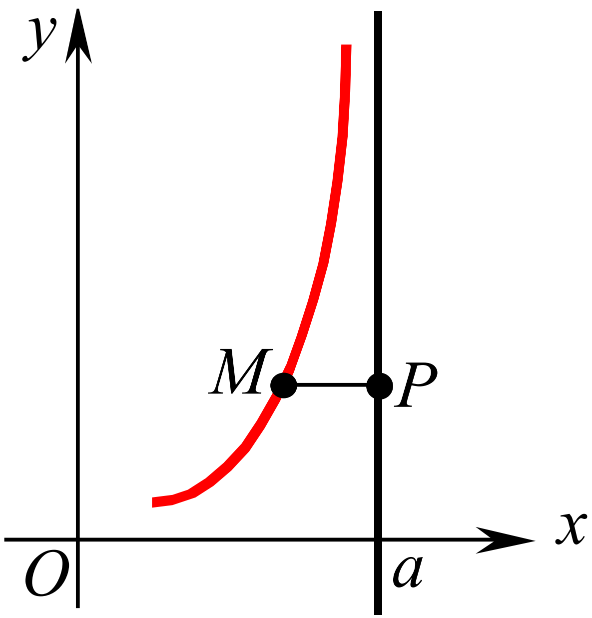


Схема исследования функции

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать четность и периодичность функции.
3. Исследовать точки разрыва, найти вертикальные асимптоты.
4. Найти наклонные асимптоты (если они существуют).
5. Найти точки пересечения графика с осями координат, промежутки знакопостоянства.
6. Найти $f'(x)$. Определить точки экстремума, интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти $f''(x)$. Определить точки перегиба графика, интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить график функции.

§7. Формула Тейлора

Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в окрестности точки x_0 .

Тогда $$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) ,$$

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м. более высокого порядка чем Δx .

Пусть $$\beta_1(\Delta x) = \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}$$

Тогда $$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x ,$$

где $\beta_1(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

$$\Rightarrow \quad f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \beta_1 \cdot \Delta x . \qquad (1)$$

Обозначим $x_0 + \Delta x = x$,

$$\Rightarrow \quad \Delta x = x - x_0$$

и формула (1) примет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_1 \cdot (x - x_0) , \qquad (2)$$

где $\beta_1(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пусть $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_1 – дифференцируема в точке x_0,

$$\beta_1(x_0) = 0 \ , \quad \beta_1'(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}$$

$\Rightarrow$ Применяя к функции β_1 формулу (2) получим

$$\beta_1(x) = \beta_1(x_0) + \beta_1'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0) =$$

$$= \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0) + \beta_2 \cdot (x - x_0)$$

где $\beta_2(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Тогда из (2) для $f(x)$ получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \beta_2(x - x_0)^2 \qquad (3)$$

Пусть $y = f(x)$ трижды дифференцируема в окрестности x_0 .

Тогда β_2 – дифференцируема в точке x_0,

$$\beta_2(x_0) = 0 \ , \quad \beta_2'(x_0) = \frac{f'''(x_0)}{2 \cdot 3}$$

$\Rightarrow$ Применяя к функции β_2 формулу (2) получим

$$\beta_2(x) = \beta_2(x_0) + \beta_2'(x_0) \cdot (x - x_0) + \beta_3 \cdot (x - x_0) =$$

$$= \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0) + \beta_3 \cdot (x - x_0)$$

где $\beta_3(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Тогда из (3) для $f(x)$ получим:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 +$$

$$+ \beta_3(x - x_0)^3$$

Если $y = f(x)$ n раз дифференцируема в окрестности точки x_0 , то применим n раз формулу (2) к функции β_i и получим (4):

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+$$

$$+\beta_n(x-x_0)^n$$

где $\beta_n(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Формулу (4) называют ***формулой Тейлора разложения функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$*** (***в окрестности точки x_0***).

Слагаемое

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

называют ***многочленом Тейлора функции $f(x)$ по степеням $(x-x_0)$.***

Слагаемое $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n$ ***называют остаточным членом формулы Тейлора***.

Остаточный член R_n можно записать в нескольких формах:

1) $R_n = \beta_n \cdot (x - x_0)^n = o((x - x_0)^n)$ – ***форма Пеано***;

2) если $y = f(x)$ $n + 1$ раз дифференцируема в окрестности точки x_0, то R_n можно записать в ***форме Лагранжа*** **:**

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

где c – точка между x_0 и x .

Если в формуле Тейлора $x_0 = 0$, то она примет вид (5):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Формулу (5) называют ***формулой Маклорена***.

Применение формулы Маклорена (Тейлора):

1) в приближенных вычислениях (значений функций, определенных интегралов и т.п.);
2) при нахождении пределов.