Математика

Глава 5.
Введение в математический анализ

Преподаватель – доцент, к.ф.-м.н.
Шерстнёва Анна Игоревна

§1. Понятие функции

Пусть X и Y – множества произвольной природы.

*Определение. Если $\forall x \in X$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция** (**отображение**) с множеством значений Y.*

Записывают: $f\colon X \to Y, \quad y = f(x)$

(где f – закон, осуществляющий соответствие)

Называют: X – область (множество) определения функции

x $(x \in X)$ – аргумент (независимая переменная)

Y – область (множество) значений

y $(y \in Y)$ – зависимая переменная (функция)

Способы задания функции:

1) словесный;

2) табличный;

3) графический;

Определение. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ *называется все точки плоскости с координатами* $(x; f(x))$.
График функции $y = f(x)$ будем также называть «кривой $y = f(x)$».

4) аналитический:
а) явное задание (т.е. формулой $y = f(x)$)
б) неявное задание (т.е. с помощью уравнения $F(x,y)=0$).

Определение. Пусть заданы две функции:

$$f : X \to Y\ ,\ f(x) = y$$

и

$$\varphi : Y \to Z\ ,\ \varphi(y) = z.$$

Функция $\psi : X \to Z\ ,\ \psi(x) = z$ *называется* ***композицией функций*** φ и f *или* ***сложной функцией***.

ОБОЗНАЧАЮТ: $\varphi \circ f$ или φf.

Итак, по определению,

$$\varphi f(x) = z = \varphi(y) = \varphi(f(x))$$

Поэтому сложную функцию называют еще ***функцией от функции***. При этом функцию φ называют ***внешней***, функцию f – ***внутренней***.

Пусть задана функция $f: X \to Y$, $f(x) = y$ и $y_0 \in Y$.
Возможны два случая:

а) существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$;

б) существуют $x_1, x_2, \ldots \in X$ такие, что $f(x_i) = y_0$.

Определение. Если $\forall y_0 \in Y$ существует единственный $x_0 \in X$ такой, что $f(x_0) = y_0$, то функцию $f(x)$ называют ***биекцией*** (или ***взаимно однозначной***).

Если $y = f(x)$ – биекция, то можно определить функцию

$$\varphi : Y \to X,\ \varphi(y_0) = x_0 .$$

Эту функцию называют ***обратной к функции** f* и в общем случае обозначают f^{-1}.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ выражают одну и ту же связь между переменными x и y.
Поэтому *графики функции* $y = f(x)$ *и ее обратной функции* $x = f^{-1}(y)$ *совпадают*.

Для удобства, обратную функцию записывают в виде $y = f^{-1}(x)$ (т.е. переобозначают переменные).
Графики функций $y = f(x)$ *и* $y = f^{-1}(x)$ *симметричны относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатного угла* (т.к. при переобозначении переменных оси Ox и Oy меняются местами).

Определение. ***Элементарной функцией*** *называется функция, которая может быть задана одной формулой* $y = f(x)$, *где* $f(x)$ *– выражение, составленное из основных элементарных функций и действительных чисел с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции.*

Основные элементарные функции:

1) степенные: $y = x^r \ (r \in \mathbb{R})$
2) показательные: $y = a^x \ (a > 0, a \neq 1)$
3) логарифмические: $y = \log_a x \ \ (a > 0, a \neq 1)$
4) тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$
5) обратные тригонометрические: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$

Основные характеристики поведения функции

1) Четность функции

Функция $y = f(x)$ *называется* ***четной***, *если :*

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция $y = f(x)$ *называется* ***нечетной***, *если :*

а) *область определения функции* $\mathrm{D}(f)$ *симметрична относительно начала координат;*

б) $f(-x) = -f(x),\ \forall x \in \mathrm{D}(f)$.

Функция, не являющаяся четной или нечетной, называется ***функцией общего вида***.

График четной функции симметричен относительно оси Oy.

График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2) Периодичность функции

Функция $y = f(x) \not\equiv \text{const}$ *называется* ***периодической***, *если* $\exists t \neq 0$ *такое, что*

а) $x + t,\ x - t \in D(f),\ \forall x \in D(f)$;

б) $f(x \pm t) = f(x)$.

Число t *при этом называют* ***периодом функции***.

Если $y = f(x)$ – периодическая, то ее наименьший положительный период T называют ***основным периодом***.

$\Rightarrow$ любой период функции имеет вид kT , где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$

График периодической функции состоит из повторяющихся фрагментов.

3) Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ *называется* ***возрастающей*** *(**неубывающей**) на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad (f(x_1) \leq f(x_2)).$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***убывающей*** *(**невозрастающей**) на интервале* $(a;b)$ *если* $\forall x_1, x_2 \in (a;b)$ *таких, что* $x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$f(x_1) > f(x_2) \quad (f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными***.

4) Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной снизу***, *если* $\exists a \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$a \le f(x)\ ,\ \ \forall x \in D(f\,).$$

Функция $y = f(x)$ *называется* ***ограниченной сверху***, *если* $\exists b \in \mathbb{R}$ *такое, что*

$$f(x) \le b\ ,\ \ \forall x \in D(f\,).$$

Функция, ограниченная сверху и снизу, называется ***ограниченной***.

$\Rightarrow$ Функция ограниченная, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$a \le f(x) \le b\ ,\ \ \forall x \in D(f\,).$$

Функция $y = f(x)$ ограничена $\Leftrightarrow$ $\exists M > 0$ такое, что

$$|\,f(x)\,| \le M\ ,\ \ \forall x \in D(f\,).$$

§2. Числовые последовательности

Определение 1. ***Последовательностью*** *называется перенумерованное множество*
(чисел – числовая последовательность,
функций – функциональная последовательность и т.д.)

Определение 2. ***Последовательностью*** *называется функция, заданная на множестве натуральных чисел.*

$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ – развернутая запись;
$\{ x_n \}$ – короткая запись (где x_n – общий член)

Определение. Числовая последовательность $\{ x_n \}$ называется

- ***ограниченной снизу***, если $\exists a \in \mathbb{R}$ такое, что $a \leq x_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- ***ограниченной сверху***, если $\exists b \in \mathbb{R}$ такое, что $x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- ***ограниченной***, если $\exists a, b \in \mathbb{R}$ такие, что $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$
- ***возрастающей*** (***неубывающей***), если

$$x_n < x_{n+1} \ (x_n \leq x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N};$$

- ***убывающей*** (***невозрастающей***), если

$$x_n > x_{n+1} \ (x_n \geq x_{n+1}), \ \forall n \in \mathbb{N};$$

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются ***монотонными***.

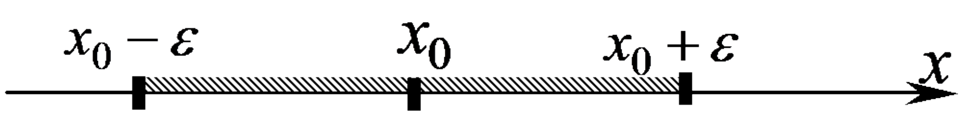
Определение. *Число* $a \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$ *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \forall n > N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ или $x_n \to a$

Говорят: последовательность $\{x_n\}$ сходится (стремится) к a.

Последовательность, имеющую предел, называют ***сходящейся*** (***сходящейся к*** a), не имеющую предела – ***расходящейся***.



Интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ называют ***ε-окрестностью точки*** x_0.

Будем обозначать: $U(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$

Если $\{x_n\} \to a$, то в любой ε-окрестности точки a находятся все члены последовательности $\{x_n\}$, за исключением может быть конечного их числа.

Свойства сходящихся последовательностей

1) Две последовательности, отличающиеся на конечное число членов, ведут себя одинаково относительно сходимости.

2) Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

3) Если $\{ x_n \} \to a$, то $\{ |x_n| \} \to |a|$.

4) Сходящаяся последовательность ограничена.

Определение. *Последовательность, сходящуюся к нулю, называют* ***бесконечно малой***.

5) *Лемма* (о роли б.м. последовательностей). *Число* $a \in \mathbb{R}$ *является пределом последовательности* $\{x_n\} \Leftrightarrow x_n = a + \alpha_n$, *где* $\{\alpha_n\}$ – *бесконечно малая.*

6) Пусть $\{x_n\}$ – ограничена, $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая. Тогда $\{x_n \cdot \alpha_n\}$ – бесконечно малая.

7) Пусть $\{ x_n \}$ и $\{ y_n \}$ – сходящиеся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\quad \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже являются сходящимися последовательностями, причем

$a)\quad \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$

$b)\quad \lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$

$c)\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_n}{y_n} \right) = \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$

$d)\quad \lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n = ca$

8) Пусть $\{x_n\} \to a$ и $x_n \geq 0$ (или $x_n > 0$), $\forall n \in \mathbb{N}$.

Тогда $a \geq 0$.

9) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – сходящиеся последовательности и

$$x_n \leq y_n \ (x_n < y_n)\ ), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

10) Лемма о двух милиционерах.

Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и $\forall n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$x_n \leq z_n \leq y_n \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

Бесконечно большие последовательности

Определение. *Числовая последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***бесконечно большой***, *если* $\forall M>0\ \exists N\in\mathbb{N}$ *такое, что*

$$|x_n|>M,\ \forall n>N.$$

Записывают: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ или $x_n \to \infty$

Частные случаи бесконечно больших последовательностей:

1) $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $x_n \geq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = x_n > M$, $\forall n>N$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty, \quad x_n \to +\infty$$

2) $\{ x_n \}$ – бесконечно большая и $x_n \leq 0$, $\forall n$.

Тогда $|x_n| = -x_n > M$, $\forall n>N$

$$\Rightarrow\ x_n < -M,\ \forall n>N$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty, \quad x_n \to -\infty$$

Свойства бесконечно больших последовательностей

1) Если $\{x_{\mathrm{n}}\}$ – б.б., то последовательность $\{1/x_{\mathrm{n}}\}$ – б.м.
Если последовательность $\{\alpha_{\mathrm{n}}\}$ – б.м, то $\{1/\alpha_{\mathrm{n}}\}$ – б.б.

2) Если $\{\mathrm{x_n}\}$ и $\{\mathrm{y_n}\}$ – б.б. последовательности одного знака, то их сумма $\{\mathrm{x_n} + \mathrm{y_n}\}$ – б.б. того же знака.

3) Если $\{x_{\mathrm{n}}\}$ – б.б., а $\{y_{\mathrm{n}}\}$ – ограниченна, то их сумма $\{x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}\}$ – б.б. последовательность.

4) Если $\{x_{\mathrm{n}}\}$ и $\{y_{\mathrm{n}}\}$ – б.б., то их произведение $\{x_{\mathrm{n}} \cdot y_{\mathrm{n}}\}$ – б.б. последовательность.

5) Пусть $\{x_{\mathrm{n}}\}$ – б.б., $\{y_{\mathrm{n}}\}$ – сходящаяся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a \neq 0$
Тогда их произведение $\{x_{\mathrm{n}} \cdot y_{\mathrm{n}}\}$ – б.б. последовательность.

6) Если последовательность $\{x_n\}$ – б.б. и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$|x_n| < |y_n| \quad (|x_n| \le |y_n|),$$

то последовательность $\{y_n\}$ тоже является б.б.

7) Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ – б.б. одного знака и для любого $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $x_n \le z_n \le y_n$.

Тогда последовательность $\{z_n\}$ тоже является б.б. того же знака.

(лемма о двух милиционерах для б.б. последовательностей)

Замечание.

Рассмотрим сумму б.б. разных знаков. Результат будет зависеть от вида последовательностей. Например:

а) $\{x_n\} = \{n^2 + n\}$, $\{y_n\} = \{-n^2\}$.

$$\Rightarrow \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty .$$

б) $\{x_n\} = \{n^2\}$, $\{y_n\} = \{-n^2 + 5\}$.

$$\Rightarrow \{x_n + y_n\} = \{5\} \to 5 .$$

в) $\{x_n\} = \{n^2\}$, $\{y_n\} = \{-n^2 + (-1)^n\}$.

$$\Rightarrow \{x_n + y_n\} = \{(-1)^n\} \text{ – предела не имеет .}$$

В случаях, когда результат нельзя указать заранее, говорят, что «имеет место неопределенность».

Сумму б.б. разных знаков называют «неопределенностью вида $\infty - \infty$».

Другие виды неопределенностей:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 0 \cdot \infty,\ \frac{\infty}{\infty - \infty},\ \frac{\infty - \infty}{\infty - \infty},\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0},\ldots$$

«Раскрыть неопределенность» означает найти предел в данном конкретном случае.

Теорема Вейерштрасса

Пусть $X \subseteq \mathbb{R}$.

Число $b \in \mathbb{R}$ $(a \in \mathbb{R})$ называется ***верхней*** (***нижней***) ***границей множества X***, если

$$x \le b \ (a \le x), \quad \forall x \in X .$$

Если b является верхней границей множества X , то $\forall b_1 \ge b$ тоже является его верхней границей.

Если a является нижней границей множества X , то $\forall a_1 \le a$ тоже является его нижней границей.

Наименьшая верхняя граница множества X называется его ***точной верхней границей*** (***супремумом***). Обозначают: $\sup X$

Наибольшая нижняя граница множества X называется его ***точной нижней границей*** (***инфимумом***). Обозначают: $\inf X$

Очевидно, что

а) $M = \sup X \Leftrightarrow$ если $c < M$, то $\exists x_1 \in X$ такой, что $c \le x_1 \le M$;

б) $m = \inf X \Leftrightarrow$ если $c > m$, то $\exists x_2 \in X$ такой, что $m \le x_2 \le c$.

Теорема.

Всякое ограниченное сверху множество имеет супремум.

Всякое ограниченное снизу множество имеет инфимум.

Теорема (Вейерштрасса). *Монотонная и ограниченная числовая последовательность сходится.*

Пример. Последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится.

Её предел принято обозначать буквой e.

Число e – иррациональное. Доказано

$$e \approx 2{,}718281828459045 .$$

§3. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

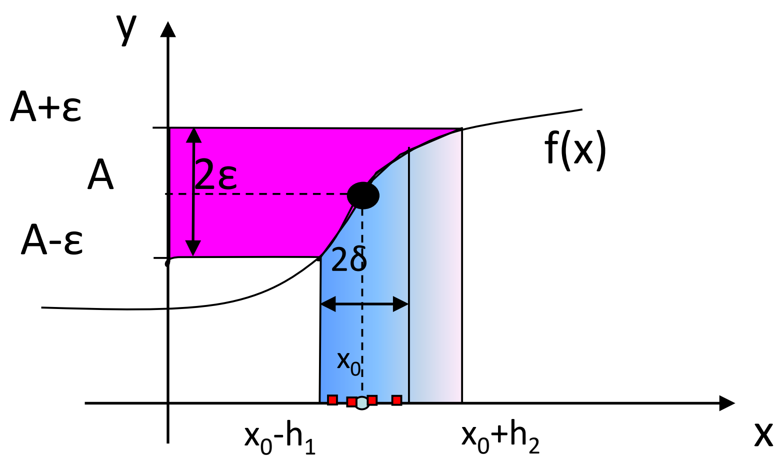
$U^*(x_0, \delta) = U(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$ – ***проколотая окрестность точки*** x_0.

Определение 1 (по Коши, на языке ε-δ).

Число $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** x ***стремящемся к*** x_0 (пределом функции $f(x)$ в точке x_0), *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что*

если $x \in U^*(x_0, \delta)$, *то* $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \ |x - x_0| < \delta \ |f(x) - A| < \varepsilon$$



Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0 .

Определение 2 (по Гейне, на языке последовательностей). *Число $A \in \mathbb{R}$ называется* ***пределом функции f(x) при x стремящемся к x_0****, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A .*

Теорема 1. *Определение предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.*

Обозначают: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$f(x) \to A$ при $x \to x_0$

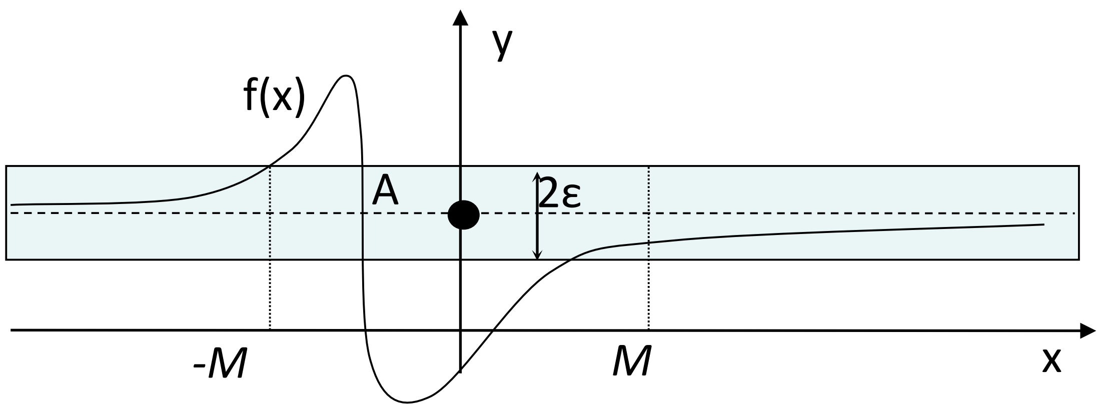
Говорят: «$f(x)$ стремится к A при x стремящемся к x_0» .

Предел функции при x → ∞

Определение. *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при*** $x \to \infty$, *если для* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists M > 0$ *такое, что*

если $|x| > M$, *то* $f(x) \in U(A, \varepsilon)$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x \quad |x| > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon$$



Обозначают: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Аналогично определяются $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Далее при $x \to x_0$ будем считать, что $x_0 \in \mathbb{R}$ или $x_0 = \infty$.

Свойства пределов

Из свойств сходящихся последовательностей и определения предела функции по Гейне получаем следующие утверждения:

1) Если функция имеет предел при $x \to x_0$, то он единственный.

2) Если $f(x) \to A$, то $|f(x)| \to |A|$.

3) Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (говорят: ***функция локально ограничена***)

Определение. *Функция* $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой при*** $\boldsymbol{x \to x_0}$ *, если* $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$

4) ***Лемма (о роли бесконечно малых функций).***

Число $A \in \mathbb{R}$ является пределом функции $f(x)$ при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

5) Пусть $f(x)$ – ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

6) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют предел при $x \to x_0$.
Тогда их сумма, разность, произведение и частное тоже имеют предел при $x \to x_0$, причем

$$a) \quad \lim_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$b) \quad \lim_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$c) \quad \lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad \left(\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0\right)$$

$$d) \quad \lim_{x\to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

7) Пусть $f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$ и $f(x) \geq 0$ для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq 0$

8) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют пределы при $x \to x_0$ и $f(x) \geq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0.

Тогда $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \geq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

9) ***Лемма (о двух милиционерах).***

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковый предел при $x \to x_0$ и $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$ для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0.

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

10) Пусть $f\colon X \to Y$, $\varphi\colon Y \to Z$ и существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \qquad \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$$

Тогда сложная функция $\varphi(f(x))$ имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} \varphi(f(x)) = \lim_{y \to y_0} \varphi(y) = z_0$$

Эта формула называется ***формулой замены переменной в пределе.***

Бесконечно большие функции

Определение (на языке последовательностей).

Функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой при $x \to x_0$***, *если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, стремящейся к x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ стремится к* ∞ .

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad f(x) \to \infty \ \text{при} \ x \to x_0$$

Частные случаи бесконечно больших функций:

1) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

2) 2) $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и $f(x) \leq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Свойства бесконечно больших функций

1) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то функция $1/f(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.
Если $\alpha(x)$ – б.м. при $x \to x_0$, то функция $1/\alpha(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.
(связь бесконечно больших и бесконечно малых)

2) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б функции одного знака, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. того же знака.

3) Если $f(x)$ – б.б при $x \to x_0$, $g(x)$ – ограниченна в некоторой проколотой окрестности x_0, то их сумма $f(x) + g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

4) Если $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – тоже б.б. при $x \to x_0$.

5) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, $g(x)$ – имеет предел при $x \to x_0$, причем

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a \neq 0$$

то их произведение $f(x) \cdot g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$.

6) Если $f(x)$ – б.б. при $x \to x_0$ и для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0 $|f(x)| < |g(x)|$ $(|f(x)| \leq |g(x)|)$, то функция $g(x)$ тоже является б.б. при $x \to x_0$.

7) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. одного знака при $x \to x_0$ и для всех x из некоторой проколотой окрестности x_0

$$f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x) .$$

Тогда функция $\varphi(x)$ тоже является б.б. того же знака при $x \to x_0$.

(лемма о двух милиционерах для б.б. функций)

Односторонние пределы.

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$, кроме, может быть, самой точки x_0.

1) *Число* $A \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при x, стремящемся к*** x_0 ***слева*** (***в точке*** x_0 ***слева***), *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x_0 - x < \delta, \quad \text{то} \quad f(x) \in U(A, \varepsilon) .$$

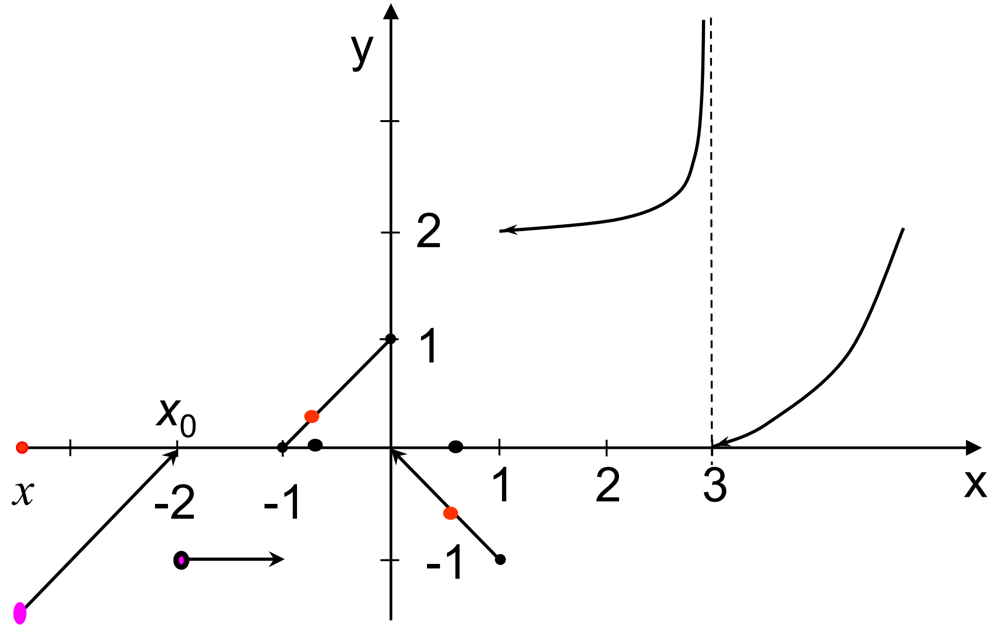
$$f(x_0 - 0) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x)$$

2) *Число* $B \in \mathbb{R}$ *называется* ***пределом функции*** $f(x)$ ***при x, стремящемся к*** x_0 ***справа***, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *такое, что если x удовлетворяет условию*

$$0 < x - x_0 < \delta, \quad \text{то} \quad f(x) \in U(B, \varepsilon).$$

$$f(x_0 + 0) \quad \text{или} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

Дана функция



$f(-2) = -1$ $\quad f(-1) = 0$ $\quad f(0) = 1$ $\quad f(1) = -1$ $\quad f(3) = \nexists$

$\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = -1$ $\quad \lim\limits_{x \to -0} f(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = -1$ $\quad \lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = -1$ $\quad \lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2$ $\quad \lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = 0$

Теорема (необходимое и достаточное условие существования предела f(x) при $x \to x_0$ и $x_0 \in \mathbb{R}$).

Функция $f(x)$ имеет предел (конечный) при $x \to x_0$ $\Leftrightarrow$ существуют конечные и равные между собой односторонние пределы функции $f(x)$ при $x \to x_0$. При этом

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

Замечания.

1) Определение одностороннего предела дано на языке ε-δ. Определение одностороннего предела на языке последовательностей дается так же как и предела при $x \to x_0$ с той лишь разницей, что рассматриваются только $\{x_n\} \to x_0$, $x_n < x_0$ в случае левого предела и $\{x_n\} \to x_0$, $x_n > x_0$ в случае правого предела.
2) Все свойства пределов и бесконечно больших остаются справедливыми и для односторонних пределов.

Замечательные пределы

Название ***замечательных пределов*** в математическом анализе получили следующие два утверждения:

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$ – ***первый замечательный предел***;

$$2)\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$ – ***второй замечательный предел***.

***Следствия первого замечательного предела*:**

$$1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1$$

$$2)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2/2}=1$$

$$3)\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1$$

$$4)\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1$$

Следствия второго замечательного предела

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x/\ln a}=1$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x\ln a}=1$

Замечание. Из формулы замены переменной $\Rightarrow$ 1-й и 2-й замечательный пределы и их следствия остаются верными, если вместо x будет стоять любая б.м. функция $\alpha(x)$.

Сравнение б.м. и б.б. функций

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – б.м. при $x \to x_0$.

1) $\alpha(x)$ *называется* ***бесконечно малой более высокого порядка чем*** $\boldsymbol{\beta(x)}$ *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$$

Записывают: $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

2) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***бесконечно малыми одного порядка***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C, \quad \text{где } C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0 .$$

3) $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются* ***эквивалентными***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

Записывают: $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

4) $\alpha(x)$ ***называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой*** $\boldsymbol{\beta(x)}$, *если бесконечно малые* $\alpha(x)$ *и* $(\beta(x))^{k}$ *имеют один порядок, т.е. если*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\left(\beta(x)\right)^k}=C\,,\quad \text{где } C\in\mathbb{R} \text{ и } C\neq 0\,.$$

Теорема (о замене бесконечно малых на эквивалентные).

Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\alpha_1(x)$, $\beta_1(x)$ *– б.м. при* $x\to x_0$. *Если*

$$\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \ \beta(x)\sim\beta_1(x),$$

то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

Теорема (о главной части бесконечно малой).

Пусть $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *– б.м. при* $x\to x_0$, *причем* $\beta(x)$ *– б.м. более высокого порядка чем* $\alpha(x)$. *Тогда*

$$\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)\sim\alpha(x)\,.$$

Б.м. $\alpha(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно малой*** $\boldsymbol{\gamma(x)}$.

Замечание. Из 1-го и 2-го замечательных пределов и их следствий $\Rightarrow$ **если $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$**, то

$$\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\operatorname{tg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \alpha(x)$$
$$\ln\big(1+\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$$
$$\log_a\big(1+\alpha(x)\big) \sim \frac{\alpha(x)}{\ln a}$$
$$e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$$
$$a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)\cdot\ln a$$
$$1-\cos\alpha(x) \sim \frac{\big(\alpha(x)\big)^2}{2}$$

(таблица эквивалентных бесконечно малых)

Аналогично бесконечно малым сравниваются и бесконечно большие функции.

А именно, если $f(x)$ и $g(x)$ – бесконечно большие при $x \to x_0$, то

1) $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой более высокого порядка чем g(x)*** *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

2) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***бесконечно большими одного порядка***, *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = C, \quad где\ C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0;$$

3) $f(x)$ *и* $g(x)$ *называются* ***эквивалентными бесконечно большими*** (записывают: $f(x) \sim g(x)$), *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

4) $f(x)$ *называется* ***бесконечно большой порядка k относительно бесконечно большой g(x),*** *если*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(g(x))^k} = C, \quad где\ C \in \mathbb{R} \text{ и } C \neq 0.$$

Теорема (о замене бесконечно больших на эквивалентные).

Пусть $f(x)$, $g(x)$, $f_1(x)$, $g_1(x)$ – б.б. при $x \to x_0$. Если

$$f(x) \sim f_1(x)\ ,\ g(x) \sim g_1(x),$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Теорема (о главной части бесконечно большой).

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – б.б. при $x \to x_0$, причем $g(x)$ – бесконечно большая более высокого порядка чем $f(x)$. Тогда

$$z(x) = f(x) + g(x) \sim g(x)\ .$$

Б.б. $g(x)$ называют в этом случае ***главной частью бесконечно большой*** $z(x)$.

§4. Непрерывность функции

Основные определения

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется* ***непрерывной в точке x_0****,* *если справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

Замечания.

1) Равенство (1) можно записать в виде

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Условие (2) – *определение непрерывности функции в точке на языке односторонних пределов.*

2) Равенство (1) можно также записать в виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right)$$

Говорят: «если функция непрерывна в точке x_0, то знак предела и функцию можно поменять местами».

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[x_0\,;\, x_0+\delta)$ (на промежутке $(x_0-\delta;\, x_0]$).

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной в точке x_0 справа*** (***слева***), *если справедливо равенство*

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \right)$$

Очевидно, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0 справа и слева.

Определение. *Функция* $f(x)$ *называется* ***непрерывной на интервале*** ***(a; b)*** *если она непрерывна в каждой точке этого интервала.*

Функция $f(x)$ ***называется непрерывной на отрезке [a; b]*** *если она непрерывна на интервале* $(a;\ b)$ *и имеет одностороннюю непрерывность в граничных точках* (т.е. непрерывна в точке a справа, в точке b – слева).

Свойства непрерывных функций

Пусть $X = \{x_0\}$ или $X = (a; b)$ или $X = [a; b]$.

1) *Сумма, разность и произведение конечного числа непрерывных на множестве X функций является функцией непрерывной на X.*

2) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на X и $g(x) \neq 0$, $\forall x \in X$, то частное $f(x)/g(x)$ – непрерывная на множестве X функция.*

3) *Пусть $f: X \to Y$, $\varphi: Y \to Z$. Если $f(x)$ непрерывна на X, $\varphi(x)$ – непрерывна на Y, то сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна на X.*

Свойства 1, 2, 3, следуют из свойств пределов функций.

Если функция непрерывна всюду в области определения, то ее называют ***непрерывной***.

4) *Элементарные функции непрерывны*

Точки разрыва и их классификация

Определение. *Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, но не является непрерывной в этой точке, то* ***$f(x)$ называют разрывной в точке x_0****, а саму точку* ***x_0 называют точкой разрыва*** *функции $f(x)$.*

Замечания.

1) $f(x)$ может быть определена в неполной окрестности точки x_0.
   Тогда рассматривают соответствующую одностороннюю непрерывность функции.

2) Из определения $\Rightarrow$ точка x_0 является точкой разрыва функции $f(x)$ в двух случаях:

   а) $U(x_0, \delta)\in D(f)$, но для $f(x)$ не выполняется равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$$

   б) $U^*(x_0, \delta)\in D(f)$.

   Для элементарных функций возможен только случай б).

Пусть x_0 – точка разрыва функции $f(x)$.

Определение. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва I рода*** *если функция* $f(x)$ *имеет в этой точке конечные пределы слева и справа.*

Если при этом эти пределы равны, то точка x_0 *называется* ***точкой устранимого разрыва****, в противном случае –* ***точкой скачка****.*

Определение. *Точка* x_0 *называется* ***точкой разрыва II рода*** *если хотя бы один из односторонних пределов функции* $f(x)$ *в этой точке равен* ∞ *или не существует.*

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема (Вейерштрасса).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$. *Тогда*

1) $f(x)$ – *ограничена на* $[a; b]$;
2) $f(x)$ *принимает на* $[a; b]$ *свое наибольшее и наименьшее значения.*

Определение.

Значение функции $m = f(x_1)$ *называется* ***наименьшим***, *если*

$$m \le f(x),\ \forall x \in D(f).$$

Значение функции $M = f(x_2)$ *называется* ***наибольшим***, *если*

$$M \ge f(x),\ \forall x \in D(f).$$

Замечание. Наименьшее (наибольшее) значение функция может принимать в нескольких точках отрезка.

Теорема (Коши, о промежуточных значениях).

Пусть функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и* γ *– число, заключенное между* $f(a)$ *и* $f(b)$ *.*

Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a; b]$ *такая, что*

$$f(x_0) = \gamma \ .$$

Следствие (теоремы Коши).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$ *и на его концах принимает значения разных знаков, то на* $(a; b)$ *существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.*

Следствие (теорем Коши и Вейерштрасса).

Если функция $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a; b]$*, то множеством ее значений является отрезок* $[m; M]$*, где* m *и* M *– соответственно наименьшее и наибольшее значения функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a; b]$ *.*