

Совершенные нормальные пропозициональных формы.

Практические занятия.

Часть №2

Задание (38). б) КНФ, ДНФ получить из $((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \wedge ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D))$

Ответ: $(\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{C} \vee D)$ - КНФ,

$(\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge D) \vee (B \wedge D)$ - ДНФ.

Дополнительное задание по желанию: получить СДНФ и СКНФ.

1 шаг: {избавимся от \rightarrow }

$$\begin{aligned} & ((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D)) \wedge ((A \wedge C) \rightarrow (B \wedge D)) \sim \\ & \sim ((\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{C} \vee D)) \wedge (\bar{A} \wedge C \vee (B \wedge D)) \sim \end{aligned}$$

2 шаг: {избавимся от \wedge (ПФ)}

$$\sim (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{C} \vee D) \wedge ((\bar{A} \vee \bar{C}) \vee (B \wedge D)) \quad (*)$$

{пусть $L = ((\bar{A} \vee \bar{C}) \vee (B \wedge D))$ }

3 шаг: к L применим 2-й зак дистри (№7)

$$L = (\bar{A} \vee \bar{C} \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C} \vee D) = \text{КНФ.} \quad (**)$$

Тогда исходная ПФ (*) с учетом (**)

$$\sim (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{C} \vee D) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C} \vee B) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C} \vee D) \sim$$

{Обозначим $(\bar{A} \vee B) = X$, $(\bar{C} \vee D) = Y$,

$$(\bar{A} \vee \bar{C} \vee B) = X \vee \bar{C}, (\bar{A} \vee \bar{C} \vee D) = Y \vee \bar{A}}$$

$$\sim \underline{X} \wedge (\underline{X} \vee \bar{C}) \wedge \underline{Y} \wedge (\underline{Y} \vee \bar{A}) \sim \text{{по закону поглощения №19}}$$

$$\sim \underline{X} \wedge \underline{Y} \sim (\bar{A} \vee B) \wedge (\bar{C} \vee D) - \text{КНФ.}$$

$$1) \underline{X} \wedge (\bar{C} \vee D) \sim \text{{по 1-му закону дистриб.}} \sim$$

$$\sim (\underline{X} \wedge \bar{C}) \vee (\underline{X} \wedge D);$$

$$\text{где } (\underline{X} \wedge \bar{C}) \sim (\bar{A} \vee B) \wedge \bar{C} \sim \text{{1 з.д.}} \sim (\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C})$$

$$(\underline{X} \wedge D) \sim (\bar{A} \vee B) \wedge D \sim \text{{1 з.д.}} \sim (\bar{A} \wedge D) \vee (B \wedge D)$$

Тогда ДНФ есть:

$$(\bar{A} \wedge \bar{C}) \vee (B \wedge \bar{C}) \vee (\bar{A} \wedge D) \vee (B \wedge D).$$

Примеры

1. Привести к ДНФ формулу $\neg(X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \rightarrow X_2)$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\neg(X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \rightarrow X_2) &\sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee X_2) \sim \\ &\sim \neg X_1 \wedge (\neg X_3 \wedge (\neg X_1 \vee X_2)) \sim \\ &\sim \neg X_1 \wedge ((\neg X_3 \wedge \neg X_1) \vee (\neg X_3 \wedge X_2)) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3 \wedge \neg X_1) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3).\end{aligned}$$

Пояснение к решению. $\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3 \sim \neg X_1 \wedge \neg X_3$, т.к. $(\neg X_1 \wedge \neg X_3) \supset (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3)$, при \supset большее $(\neg X_1 \wedge \neg X_3)$ поглощает меньшее $(\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3)$, следовательно из $(\neg X_1 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3)$ остается $(\neg X_1 \wedge \neg X_3)$.

2. Привести ту же формулу к СДНФ.

Решение. Начав преобразования с ДНФ, получаем

$$\begin{aligned}\neg(X_1 \vee X_3) \wedge (X_1 \rightarrow X_2) &\sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3) \wedge (X_2 \vee \neg X_2) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge \neg X_3 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_3 \wedge \neg X_2) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3).\end{aligned}$$

3. Привести ПФ к нормальному виду

$$\begin{aligned}X_1 \wedge \neg X_2 \wedge (X_1 \rightarrow X_3) &\equiv \neg X_3 \sim \\ &\sim X_1 \wedge \neg X_2 \wedge (X_1 \rightarrow X_3) \wedge \neg X_3 \vee \\ &\vee \neg(X_1 \wedge \neg X_2 \wedge (X_1 \rightarrow X_3)) \wedge X_3 \sim \\ &\sim X_1 \wedge \neg X_2 \wedge (\neg X_1 \vee X_3) \wedge \neg X_3 \vee \\ &\vee (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg(\neg X_1 \vee X_3)) \wedge X_3 \sim \\ &\sim (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_1 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3 \wedge \neg X_3) \vee \\ &\vee (\neg X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_3 \wedge X_3) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \wedge X_3) \vee (X_2 \wedge X_3) \sim \\ &\sim (\neg X_1 \vee X_2) \wedge X_3.\end{aligned}$$