Совершенные нормальные пропозициональных формы.
Практические занятия.
Часть №1

О. Пропозициональная форма называется *конъюнктивной нормальной формой (к.н.ф,),* если она представляет собой конъюнкцию элементарных сумм.

О. Пропозициональная форма называется *дизъюнктивной нормальной формой (д.н.ф,),* если она представляет собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

О. *Совершенной дизъюнктивной нормальной формой* пропозициональной формы **А** называется *д.н.ф.* этой формы, удовлетворяющая следующим условиям:

1) нет одинаковых слагаемых;
2) в каждом слагаемом нет одинаковых множителей;
3) в каждом слагаемом нет никакого множителя вместе с отрицанием этого же множителя;
4) в каждое слагаемое входят все переменные либо их отрицания, которые входят в **А**.

О. Совершенной конъюнктивной нормальной формой пропозициональной формы **А** называется *к.н.ф.* этой формы удовлетворяющая следующим условиям:

1) нет одинаковых множителей;
2) в каждом множителе нет одинаковых слагаемых;
3) в каждый множитель входят все буквы либо их отрицания, которые входят в пропозициональную форму А;
4) в каждом множителе нет никакого слагаемого вместе с отрицанием этого же слагаемого.

(см. $\cancel{(A\vee\neg A\vee\neg B\vee\neg C)}\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)$)

Найти *с.д.н.ф.* F(A,B,C).

	A	*B*	*C*	*F(A,B,C)*
1	Л	Л	Л	И
2	Л	Л	И	И
3	Л	И	Л	И
4	Л	И	И	Л
5	И	Л	Л	И
6	И	Л	И	Л
7	И	И	Л	Л
8	И	И	И	И

с.д.н.ф:

$\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C\vee\neg A\wedge\neg B\wedge C\vee\neg A\wedge B\wedge\neg C\vee A\wedge\neg B\wedge\neg C\vee A\wedge B\wedge C$

с.к.н.ф.:

$(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee\neg B\vee C)$

<u>Второй метод</u> нахождения *с.д.н.ф.* – метод равносильных преобразований. Он состоит в следующем.

Для заданной формы **A** находим *д.н.ф.* (которая всегда ∃) и пусть *д.н.ф.* равна:

$$D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_m \ (m \geq 1),$$

где D_i $(1 \leq i \leq m)$ – э.п. (элементарное произведение). Построенная *д.н.ф.* может удовлетворять условиям (1–4), тогда это *с.д.н.ф.*

Если в некоторое D_i входит некоторая переменная вместе с ее отрицанием, то D_i - противоречие и из *д.н.ф.* D_i можно исключить (закон 17). Если при такой процедуре нужно отбросить все слагаемые из *д.н.ф.*, то **A - противоречие и *с.д.н.ф.* не существует**.

Если в некоторое $\boldsymbol{D_i}$ **не входит** одна из переменных A_j формы **A**, **то заменяем $\boldsymbol{D_i}$ на равносильную: $\boldsymbol{(D_i \wedge A_j) \vee (D_i \wedge \urcorner A_j)}$**. Таким образом, добиваемся, чтобы каждое слагаемое содержало все аргументы формулы A.

Если в полученной форме окажутся одинаковые слагаемые, то оставляем только одно из них. В результате получим *с.д.н.ф.*

Или другими словами

Каждую выполнимую логическую формулу можно привести эквивалентными преобразованиями к СДНФ. Для этого формулу сначала приводят к какой-нибудь ДНФ, а затем:

1) Удаляют повторения переменных в конъюнкциях, используя закон идемпотентности:

$A \wedge A \wedge \ldots \wedge A \sim A$.

2) Убирают члены дизъюнкции, содержащие переменную вместе с ее отрицанием, а из одинаковых членов дизъюнкции удаляют все, кроме одного.

3) Если какая-либо элементарная конъюнкция в ДНФ содержит не все переменные из числа входящих в исходную формулу, то ее умножают на единицы, представляемые в виде дизъюнкций

$X_j \vee \urcorner X_j$

каждой недостающей переменной X_j с ее отрицанием $\urcorner X_j$ (закон исключенного третьего). После этого раскрывают скобки внутри каждой такой элементарной конъюнкции, применяя закон дистрибутивности.

4) Если среди членов полученной дизъюнкции окажутся одинаковые элементарные конъюнкции, то из каждой серии таковых оставляют по одной.

Второй метод построения с.к.н.ф. равносильных преобразований - заключается в следующем.

Для заданной формы **А** находим *к.н.ф.*, которая имеет вид $K_1 \wedge K_2 \wedge \ldots \wedge K_m$, затем добиваемся выполнения условий 1-4, начиная с последнего.

Если в некотор. K_i входит некоторая переменная вместе с ее отрицанием, K_i - тавтология и из *к.н.ф.* множитель K_i можно исключить (закон 14).

Если при такой процедуре отбросить все множители из *к.н.ф.,* то **А - тавтология и *с.к.н.ф.* не существует**. Если форма не тавтология, то проверяем условие 3).

Если некоторый множитель *к.н.ф.,* например K_i, не содержит букву A_j, то вводим ее согласно равносильности

$\mathbf{K_i \sim (K_i \vee A_j) \wedge (K_i \vee \urcorner A_j)}$.

Таким образом, добиваемся, чтобы каждый множитель *к.н.ф.* содержал все аргументы исходной формы **А**. Далее добиваемся выполнения условия 2). Если в некотором множителе окажутся одинаковые слагаемые, то оставляем только одно из них.

И, наконец, проверяем условие 1). Если в полученной форме окажутся одинаковые множители, то оставляем только один из них. В результате получим *с.к.н.ф.*

А – противоречие, *с.д.н.ф.* не существует.

А – тавтология, *с.к.н.ф.* не существует.

Задание (38). Для заданных пропозициональных форм:

1) найдите д.н.ф., к.н.ф.;

2) выясните, является ли выполнимой или тавтологией;

3) найдите с.д.н.ф и с.к.н.ф.:

а) $\mathbf{A \equiv B \vee C}$; $\{A \equiv B \sim (\urcorner A \vee B) \wedge (\urcorner B \vee A)$ *или* $A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\urcorner B \wedge \urcorner A)\ \}$

для СДНФ $A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\urcorner B \wedge \urcorner A)$

для СКНФ $A \equiv B \sim (\urcorner A \vee B) \wedge (\urcorner B \vee A)$

I)

$\mathbf{A \equiv B \vee C}$; для СКНФ $A \equiv B \sim (\urcorner A \vee B) \wedge (\urcorner B \vee A)$

$(\urcorner A \vee \mathbf{B \vee C}) \wedge (\urcorner(\mathbf{B \vee C}) \vee A) \sim (\urcorner A \vee B \vee C) \wedge (\urcorner B \wedge \urcorner C \vee A) \sim^{\text{св. 7}} \sim$

$\sim (\urcorner A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \urcorner B) \wedge (A \vee \urcorner C) \sim \ldots$

$\sim (\urcorner A \vee B \vee C) \wedge (A \vee \urcorner B$ *(добавить букву)*$) \wedge (A \vee \urcorner C$ *(добавить букву)* $) \sim \ldots$ *(решение продолжить)*

{Используем прием добавление одной буквы: $(A \vee B) = [(A \vee B \vee C) \wedge (A \vee B \vee \urcorner C)]$}

{после процедуры добавлении нужной буквы получим форму из пяти множителей, каждый множитель представляет собой элементарную дизъюнкцию из трех пропозициональных букв} {если в ПФ есть одинаковые множители, вычеркнем их, получим СКНФ}

II)

$\mathbf{A \equiv B \vee C}$, *для СДНФ используем формулу:* $A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\urcorner B \wedge \urcorner A)$.

$\mathbf{A \equiv B \vee C} \sim (A \wedge (\mathbf{B \vee C})) \vee (\urcorner(\mathbf{B \vee C}) \wedge \urcorner A) \sim [A \wedge \mathbf{B} \vee A \wedge \mathbf{C})] \vee [(\urcorner \mathbf{B} \wedge \urcorner \mathbf{C}) \wedge \urcorner A] \sim$

$\sim (A \wedge \mathbf{B}) \vee (A \wedge \mathbf{C}) \vee (\urcorner \mathbf{B} \wedge \urcorner \mathbf{C} \wedge \urcorner A) \sim \ldots$ *(решение продолжить)*

{в скобку $(A\wedge B)$, а также в $(A\wedge C)$ добавляем по необходимой букве; для этого воспользуемся процедурой (см. пример и ИЗ №4): $\sim(\neg C\wedge\neg A)\sim$
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\wedge(B\vee\neg B)$; перемножим, одинаковые конъюнкции удалим. }

Пример. Следующие пропозициональные формы привести к д.н.ф. и к.н.ф. Построить СКНФ. а) $A\to((A\to B)\to B)$;

<u>1 шаг</u>: искл. $\to$, $\equiv$
$A\to((A\to B)\to B)\sim A\to((\neg A\vee B)\to B)\sim$ {*св-во 1.2*}
$\sim A\to(\neg(\neg A\vee B)\vee B)\sim\neg A\vee\neg(\neg A\vee B)\vee B\sim$

<u>2 шаг</u>: искл. $\neg$(ПФ)
$\sim\neg A\vee(A\wedge\neg B)\vee B\sim$
<u>3 шаг</u>:
**) убираем скобки* $\sim\neg A\vee A\wedge\neg B\vee B$ *это ДНФ*
***) группируем в скобки по 2-му дистр. закону*
$\sim(\neg A\vee(A\wedge\neg B))\vee B\sim(\neg A\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg B)\vee B\sim$ {см св-во $b\wedge c\vee a$}
$\sim(B\vee\neg A\vee A)\wedge(B\vee\neg A\vee\neg B)\sim$T. Это КНФ.

$\{\{\neg A\vee(A\wedge\neg B)=\neg A\vee A\wedge\neg B=\{7$ св-во$\}=(\neg A\vee A)\wedge(\neg A\vee\neg B)\}\}$
$A\to((A\to B)\to B)$ **– тавтология (см выше), СКНФ не существует**.

Задание. Найти СДНФ. $(A\to B)\wedge\neg A\wedge\neg C$, используя формулы равносильности.
Решение:
Приведем ПФ к ДНФ формулу
$(A\to B)\wedge\neg A\wedge\neg C\sim(\neg A\vee B)\wedge\neg A\wedge\neg C\sim$
$\sim\neg C\wedge(\neg A\vee B)\wedge\neg A\sim\neg A\wedge[\neg C\wedge(\neg A\vee B)]\sim$
$\sim\neg A\wedge[(\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg C\wedge B)]\sim$
$\sim(\neg A\wedge\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge B)]\sim$
$\sim(\cancel{\neg A}\wedge\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge B)]\sim$
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\vee(\neg A\wedge\neg C\wedge B)]\sim$
{сравниваем $(\neg C\wedge\neg A)$ и $(\neg A\wedge\neg C\wedge B)$, *или используем закон поглощения* $X\vee X\wedge Y=X$, *здесь* $X=(\neg C\wedge\neg A)$ *и* $Y=B$*}*
$\sim(\neg C\wedge\neg A)$ - это ДНФ
Или (*более короткое решение*): ПФ
$(A\to B)\wedge\neg A\wedge\neg C\sim(\neg A\vee B)\wedge\neg A\wedge\neg C\sim\neg C\wedge(\neg A\vee B)\wedge\neg A\sim\neg C\wedge\neg A$

Продолжаем решение для получения СДНФ.
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\sim$
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\wedge(B\vee\neg B)\sim$
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\wedge(B\vee\neg B)\sim$
$\sim(\neg C\wedge\neg A)\wedge B\vee(\neg C\wedge\neg A)\wedge\neg B)\sim$
$\sim(\neg A\wedge B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge\neg B\wedge\neg C)$ — это СДНФ.

Пример. Найдите **совершенную конъюнктивную нормальную форму** для заданной пропозициональной формы $A\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C$.

Решение:

$A\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C\sim$

$\sim A\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C\sim \qquad \underline{A\wedge B\wedge\neg C}\vee A\wedge C\sim$

$\{\quad a \quad\vee b\wedge c\quad\}$

$\{a\vee b\wedge c\sim(a\vee b)\wedge(a\vee c)$ или $a\vee b\wedge c\sim(b\vee a)\wedge(c\vee a)\}$

$\sim(A\vee\underline{A\wedge B\wedge\neg C})\wedge(C\vee\underline{A\wedge B\wedge\neg C})\sim$

$\{\ a\vee b\wedge c\wedge d\sim(a\vee b)\wedge(a\vee c)\wedge(a\vee d)$ **!!!** *см. лекцию*$\}$

$\sim[(A\vee A)\wedge(A\vee B)\wedge(A\vee\neg C)]\wedge[(C\vee A)\wedge(C\vee B)\wedge\cancel{(C\vee\neg C)}]\sim$

$\sim\qquad[A\wedge(A\vee B)\wedge(A\vee\neg C)]\wedge[(C\vee A)\wedge(C\vee B)]\sim$

{*пояснения:*

(*) $A\sim(A\vee B)\wedge(A\vee\neg B)$ <а в нашем случае $A\sim(A\vee D)\wedge(A\vee\neg D)$, $D=B\vee C$>;

(**) воспользоваться приемом добавления ПБ (см. лекцию). К ПБ «А» добавляем «В» и «С»:

$A=[(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)]$ }

$\sim[(A\vee B\vee C)\wedge\cancel{(A\vee\neg B\vee C)}\wedge\cancel{(A\vee\neg B\vee\neg C)}\wedge(A\vee B\vee\neg C)]\wedge$

$\wedge[\cancel{(A\vee B\vee C)}\wedge\cancel{(A\vee B\vee\neg C)}]\wedge[\cancel{(A\vee B\vee\neg C)}\wedge\cancel{(A\vee\neg B\vee\neg C)}]\wedge$

$\wedge[\cancel{(A\vee B\vee C)}\wedge(A\vee\neg B\vee C)]\wedge[\cancel{(A\vee B\vee C)}\wedge(\neg A\vee B\vee C)]\sim$

<убрали повторяющиеся множители>

$\sim(A\vee B\vee C)\wedge(A\vee B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee\neg C)\wedge(A\vee\neg B\vee C)\wedge(\neg A\vee B\vee C)$

Получили СКНФ.

Задание: из ПФ $A\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C$ получить СДНФ.

Решение. См подобное решение выше (умножение на **Т**=1) для $(\neg C\wedge\neg A)$.

Задание: из ПФ $(A\rightarrow B)\wedge\neg A\wedge\neg C$ получить СКНФ.

Решение. $(A\rightarrow B)\wedge\neg A\wedge\neg C\sim(\neg C\wedge\neg A)$. Выше получили $(\neg C\wedge\neg A)$ ДНФ из этой ПФ.

Далее см подобное решение выше для $A\wedge C\vee A\wedge B\wedge\neg C$ (с момента «{*пояснения:…*».

Задание. КНФ, ДНФ получить из $A\wedge\neg B\wedge(\neg A\vee C)\equiv\neg C$.

Ответ: $(\neg A\vee B)\wedge C$.

Далее получить СДНФ, СКНФ 2-мя способами.

Задание (38). б) КНФ, ДНФ получить из $((A\rightarrow B)\wedge(C\rightarrow D))\wedge((A\wedge C)\rightarrow(B\wedge D))$

Ответ: $\mathbf{(\neg A\vee B)\wedge(\neg C\vee D)}$ - КНФ,

$\mathbf{(\neg A\wedge\neg C)\vee(B\wedge\neg C)\vee(\neg A\wedge D)\vee(B\wedge D)}$ **- ДНФ.**

Дополнительное задание по желанию: получить СДНФ и СКНФ.

<u>1 шаг</u>: {избавимся от $\to$}

$((A\to B)\wedge(C\to D))\wedge((A\wedge C)\to(B\wedge D))\sim$
$\sim((\rceil A\vee B)\wedge(\rceil C\vee D))\wedge(\rceil(A\wedge C)\vee(B\wedge D))\sim$

<u>2 шаг</u>: {избавимся от $\rceil$ (ПФ) }

$\sim(\rceil A\vee B)\wedge(\rceil C\vee D)\wedge\underline{((\rceil A\vee\rceil C)\vee(B\wedge D))}$ (*)

{*пусть* $L=((\rceil A\vee\rceil C)\vee(B\wedge D))$

<u>3 шаг</u>: к L применим 2-й зак дистр (№7)

$L=(\rceil A\vee\rceil C\vee B)\wedge(\rceil A\vee\rceil C\vee D)$ = КНФ. (**)

Тогда исходная ПФ (*) с учетом (**)}

$\sim(\rceil A\vee B)\wedge(\rceil C\vee D)\wedge(\rceil A\vee\rceil C\vee B)\wedge(\rceil A\vee\rceil C\vee D)\sim$

{*Обозначим* $(\rceil A\vee B)=X$, $(\rceil C\vee D)=Y$,

$(\rceil A\vee\rceil C\vee B)=X\vee\rceil C$, $(\rceil A\vee\rceil C\vee D)=Y\vee\rceil A$}

$\sim\underline{X\wedge(X\vee\rceil C)}\wedge\underline{Y\wedge(Y\vee\rceil A)}\sim$ {по закону поглощения №19}

$\sim\underline{\mathbf{X}}\wedge\underline{\mathbf{Y}}\sim\mathbf{(\rceil A\vee B)\wedge(\rceil C\vee D)}$ - КНФ.

1) $\underline{\mathbf{X\wedge(\rceil C\vee D)}}$ ~ {по 1-му закону дистриб.}~
$\sim(X\wedge\rceil C)\vee(X\wedge D)$;

где $(X\wedge\rceil C)\sim(\rceil A\vee B)\wedge\rceil C\sim$ {1 з.д.}$\sim(\rceil A\wedge\rceil C)\vee(B\wedge\rceil C)$

$(X\wedge D)\sim(\rceil A\vee B)\wedge D$ ~ {1 з.д.} $\sim(\rceil A\wedge D)\vee(B\wedge D)$

Тогда ДНФ есть:

$\mathbf{(\rceil A\wedge\rceil C)\vee(B\wedge\rceil C)\vee(\rceil A\wedge D)\vee(B\wedge D)}$.