

**Равносильные пропозициональные формы**

- 1)  $\neg(\neg A)$  равносильно  $A$ .
- 2)  $A \wedge B \sim B \wedge A;$
- 3)  $A \vee B \sim B \vee A;$  } законы коммутативности;
- 4)  $(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C);$
- 5)  $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C);$  } законы ассоциативности;
- 6)  $A \wedge (B \vee C) \sim A \wedge B \vee A \wedge C$  - первый закон дистрибутивности;
- 7)  $A \vee B \wedge C \sim (A \vee B) \wedge (A \vee C)$  - второй закон дистрибутивности;
- 8)  $\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B,$
- 9)  $\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,$  } законы де Моргана;
- 10)  $A \wedge A \sim A,$
- 11)  $A \vee A \sim A,$  } законы идемпотентности;
- 12)  $A \vee \neg A \sim \mathbf{T}$  - закон исключенного третьего;
- 13)  $A \wedge \neg A \sim \mathbf{\Pi}$  - закон противоречия;
- 14)  $A \wedge \mathbf{T} \sim A;$
- 15)  $A \vee \mathbf{T} \sim \mathbf{T};$
- 16)  $A \wedge \mathbf{\Pi} \sim \mathbf{\Pi};$
- 17)  $A \vee \mathbf{\Pi} \sim A;$  } свойство операций с  $\mathbf{T}$  и с  $\mathbf{\Pi}$ ;
- 18)  $A \vee A \wedge B \sim A;$
- 19)  $A \wedge (A \vee B) \sim A;$  } законы поглощения;
- 20)  $A \rightarrow B \sim \neg B \rightarrow \neg A$  - закон контрапозиции.

$$A \rightarrow B \sim \neg A \vee B$$

$$A \equiv B \sim (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$$

$$A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\neg B \wedge \neg A)$$

Упростите формулу логики высказываний, используя основные равносильности между формулами.

*Примечание.* В скобках {...} дано пояснение и \ или детализация (см. ниже).

**Вариант №0.**

Упростите формулу логики высказываний, используя основные равносильности между формулами.  $A \wedge \neg(C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \vee \neg B) \vee B \wedge A \wedge \neg B$ .

**Решение:**

Используем обозначения:  $\Pi$  – противоречие,  $F$  – любая пропозициональная формула,

$$\begin{aligned}
 & A \wedge \neg(C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \vee \neg B) \vee B \wedge A \wedge \neg B \sim \\
 & \quad \updownarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \updownarrow \\
 & \{ \neg(C \vee D) \sim \neg C \wedge \neg D \} \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \{ B \wedge A \wedge \neg B \sim \Pi \} \\
 & \sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \vee \neg B) \vee \Pi \sim \\
 & \sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee C) \wedge (D \vee C \vee \neg A \vee C \vee \neg B) \vee \Pi \sim \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \updownarrow \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \{ \text{пояснение: } F \vee \Pi \sim F \} \\
 & \sim (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee C) \wedge (D \vee C \vee \neg A \vee C \vee \neg B) \sim \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \updownarrow \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \{ (D \vee C \vee \neg A \vee C \vee \neg B) \sim T, F \wedge T \sim F \} \\
 & \sim (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee C) \sim \\
 & \{ \text{пояснение: } (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee C) \sim \text{перемножаем (1-й закон} \\
 & \text{дистрибутивности)} \}
 \end{aligned}$$

$$\sim [(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge B] \vee [(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge D] \vee [(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge \neg A] \vee [(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge \neg C]$$

$$\sim \{ \cancel{[(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge B]} \vee \{ \cancel{[(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge D]} \vee \{ \cancel{[(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge \neg A]} \vee [(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge \neg C] \}$$

$$\sim$$

$$\updownarrow \emptyset \updownarrow \qquad \updownarrow \Pi \updownarrow \qquad \updownarrow \Pi \updownarrow$$

{ *пояснение обозначения* “ $\updownarrow \emptyset \updownarrow$ ”:  $[(A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge B] < A \wedge \neg C \wedge \neg D$ , т.е.

$(A \wedge \neg C \wedge \neg D)$  поглощает  $(A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge B)$  }

$$\sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge \neg C \sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \text{ (по закону поглощения).}$$

### Вариант №0\*.

Упростите формулу логики высказываний, используя основные равносильности между формулами.

$$A \wedge \neg(C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \wedge \neg B) \vee B \wedge A \wedge \neg B$$

Решение:

$$A \wedge \neg(C \vee D) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \wedge \neg B) \vee B \wedge A \wedge \neg B \sim$$

$$\{ \neg(C \vee D) \sim \neg C \wedge \neg D \} \qquad \{ B \wedge A \wedge \neg B \sim \Pi \}$$

$$\sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C \vee D) \wedge (\neg A \vee \neg C \vee D \vee C \wedge \neg B) \vee \Pi \sim$$

$$\sim A \wedge \neg C \wedge \neg D \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg A \vee \neg C \vee C \wedge \neg B) \vee \Pi \sim$$

$$\sim (A \wedge \neg C \wedge \neg D) \wedge (B \vee D \vee \neg A \vee \neg C) \wedge (D \vee \neg A \vee \neg C \vee C \wedge \neg B) \sim$$

{ см.  $A \wedge (A \vee B) \sim A$ , т.е.  $A \wedge (A \vee (\text{любая сложная формула вместо } B)) \sim A$

}

$$\{ (A \wedge \neg D) \wedge [\neg C \wedge (\neg C \vee B \vee D \vee \neg A)] \}$$

$$\sim [(A \wedge \neg D \wedge \neg C)] \wedge (D \vee \neg C \vee \neg A \vee (C \wedge \neg B)) \sim$$

$$\sim (A \wedge \neg D \wedge \neg C) \wedge (\neg C \vee D \vee \neg A \vee (C \wedge \neg B)) \sim$$

$$\sim [(A \wedge \neg D \wedge \neg C)]$$