

ПРАКТИКА

по теме

Глава 4. ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДСТВИЕ И МЕТОД РЕЗОЛЮЦИЙ

Методические указания

Теорема.

Если формула $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B$ является противоречием, тогда B является логическим следствием из A_1, A_2, \dots, A_m , т.е.: $A_1, A_2, \dots, A_m \models B$.

$A \models B$ «из A логически следует B » или « B является логическим следствием из A ».

Если из $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B$ получаем \square ,
то $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge \neg B$ – противоречие

Резольвента (R)

Примеры. 1.

Пусть

$$D_1 = P \vee Q,$$

$$D_2 = \neg P \vee \neg Q,$$

$$\text{тогда } R = Q \vee T.$$

Метод резолюций в логике высказываний

Методом резолюций называется последовательное получение бинарных резольвент из данных дизъюнктов и вновь получаемых дизъюнктов. Пусть, например, даны дизъюнкты

$$D_1 = P \vee T,$$

$$D_2 = \neg P \vee T,$$

$$D_3 = \neg T.$$

Используя D_1 и D_2 затем D_1 и D_3 , получим резольвенты

$$D_4 = T,$$

$$D_5 = P.$$

Затем из D_3 и D_4 получим *пустой дизъюнкт*. Пустой дизъюнкт будем обозначать через \square .

Метод насыщения уровня

- S^0 : (1) $P \vee Q$;
(2) $\neg P \vee Q$;
(3) $P \vee \neg Q$;
(4) $\neg P \vee \neg Q$;

-
- S^1 : (5) Q из (1) и (2);
(6) P из (1) и (3);
(7) $Q \vee \neg Q$ из (1) и (4);
(8) $P \vee \neg P$ из (1) и (4);
(9) $Q \vee \neg Q$ из (2) и (3);
(10) $P \vee \neg P$ из (2) и (3);
(11) $\neg P$ из (2) и (4);
(12) $\neg Q$ из (3) и (4);

-
- S^2 : (13) $P \vee Q$ из (1) и (7);
(14) $P \vee Q$ из (1) и (8);
(15) $P \vee Q$ из (1) и (9);
(16) $P \vee Q$ из (1) и (10);
(17) Q из (1) и (11);
(18) P из (1) и (12);
(19) Q из (2) и (6);
(20) $\neg P \vee Q$ из (2) и (7);

- (21) $\neg P \vee Q$ из (2) и (8);
(22) $\neg P \vee Q$ из (2) и (9);
(23) $\neg P \vee Q$ из (2) и (10);
(24) $\neg P$ из (2) и (12);
(25) P из (3) и (5);
(26) $P \vee \neg Q$ из (3) и (7);
(27) $P \vee \neg Q$ из (3) и (8);
(28) $P \vee \neg Q$ из (3) и (9);
(29) $P \vee \neg Q$ из (3) и (10);
(30) $\neg Q$ из (3) и (11);

- (31) $\neg P$ из (4) и (5);
(32) $\neg Q$ из (4) и (6);
(33) $\neg P \vee \neg Q$ из (4) и (7);

- (34) $\neg P \vee \neg Q$ из (4) и (8);
 (35) $\neg P \vee \neg Q$ из (4) и (9);
 (36) $\neg P \vee \neg Q$ из (4) и (10);
 (37) Q из (5) и (7);
 (38) Q из (5) и (9);
 (39) \square из (5) и (12).

Стратегия вычеркивания

S^0 :	(1) $P \vee Q$,	
	(2) $\neg P \vee Q$,	
	(3) $P \vee \neg Q$,	
	(4) $\neg P \vee \neg Q$,	
S^1 :	(5) Q	из (1) и (2),
	(6) P	из (1) и (3),
	(7) $\neg P$	из (2) и (4),
	(8) $\neg Q$	из (3) и (4),
S^2 :	\square	из (5) и (8).

Лок-резолюция

Идея *лок-резолюции* состоит в использовании индексов для упорядочения литер в дизъюнктах из данного множества S.

Дано два дизъюнкта:

$$P \vee Q, \neg P \vee Q$$

Введем индексы, которые будем писать слева снизу от литеры:

$$(1) {}_1P \vee {}_2Q,$$

$$(2) {}_3\neg P \vee {}_4Q.$$

$$(3) {}_2Q \vee {}_4Q$$

$$(4) Q.$$

Пример.

$$\begin{array}{l}
 P \vee Q, \\
 P \vee \neg Q, \\
 \neg P \vee Q, \\
 \neg P \vee \neg Q.
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (1) {}_1P \vee {}_2Q, \\
 (2) {}_3P \vee {}_4\neg Q, \\
 (3) {}_6\neg P \vee {}_5Q, \\
 (4) {}_8\neg P \vee {}_7\neg Q.
 \end{array}$$

(5) ${}_6\neg P$ из (3) и (4).

(6) ${}_2Q$ из (1) и (5),

(7) ${}_4\neg Q$ из (2) и (5).

□

Были порождены всего три лок-резольвенты.

Метод резолюций для хорновских дизъюнктов

Дизъюнкт D называется **хорновским**, если он содержит не более одной позитивной литеры.

$$S = \{P \vee \neg R \vee \neg T, Q, R, T \vee \neg P \vee \neg R, T \vee \neg Q, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R\}.$$

№ итерации	S^n	Дизъюнкты					
0	S^0	$P \vee \neg R \vee \neg T$	Q *	R	$T \vee \neg P \vee \neg R$	$T \vee \neg Q$ *	$\neg P \vee \neg Q \vee \neg R$ *
1	S^1	$P \vee \neg R \vee \neg T$ *	Q	R *	$T \vee \neg P \vee \neg R$ *	T	$\neg P \vee \neg R$ *
2	S^2	$P \vee \neg T$ *	Q	R	$T \vee \neg P$	T *	$\neg P$
3	S^3	P *	Q	R	$T \vee \neg P$	T	$\neg P$ *
4	S^4	□					

На четвертом шаге получаем пустой дизъюнкт □, следовательно, множество S хорновских дизъюнктов невыполнимо.

Задания (на практику)

№1. С помощью метода резолюций доказать, что следующее множество дизъюнктов невыполнимо: $\neg P \vee \neg Q \vee R, P \vee R, Q \vee R, \neg R$.

$\neg P \vee \neg Q \vee R, P \vee R, Q \vee R, \neg R$

или

$\neg P \vee \neg Q \vee R, P \vee R, Q \vee R \models R$ (истинно ли утверждение, если будет \square , то да)

или

$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \vee R) \wedge \neg R$

Решение

S^0 :

- 1) $\neg P \vee \neg Q \vee R$
- 2) $P \vee R$
- 3) $Q \vee R$
- 4) $\neg R$

S^1 :

- 5) $\neg Q \vee R$ из 1 и 2 (~~$\neg P$~~ $\neg Q \vee R$ $P \vee R$)
- 6) R из 3 и 5 ($Q \vee R$ ~~$\neg Q$~~ $\vee R$)
- 7) \square из 4 и 6 (~~$\neg R$~~ R)

Вывод: т.к. получен \square (пустой дизъюнкт), то множество дизъюнктов невыполнимо

№2. Методом резолюций, используя метод исчерпания уровней, доказать, что следующее множество дизъюнктов невыполнимо:

а) $P \vee Q \vee R, \neg P \vee R, \neg Q, \neg R$; б) $P \vee Q, \neg Q \vee R, \neg P \vee Q, \neg R$. (строк: 15)

а) $P \vee Q \vee R, \neg P \vee R, \neg Q, \neg R$;

Решение.

- 1) $P \vee Q \vee R$
- 2) $\neg P \vee R$
- 3) $\neg Q$
- 4) $\neg R$

- 5) $Q \vee R$ из 1 и 2
- 6) $P \vee R$ из 1 и 3
- 7) $P \vee Q$ из 1 и 4
- 8) $\neg P$ из 2 и 4

- 9) $Q \vee R$ из 1 и 8
- 10) R из 2 и 6

- 11) QVR из 2 и 7
- 12) R из 3 и 5
- 13) P из 3 и 7
- 14) Q из 4 и 5
- 15) P из 4 и 6
- 16) Q из 4 и 9
- 17) \square из 4 и 10

№3. Пусть $S = \{P, Q, R, W, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg W\}$. Сколько резольвент будет порождено из S методом насыщения уровня до того, как будет получен пустой дизъюнкт?

№4. Для $S = \{P, Q, R, W, \neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg W\}$ получить пустой дизъюнкт, используя лок-резольвацию.

Решение. Для лок-резольвации

- 1) $_1P$
- 2) $_2Q$
- 3) $_3R$
- 4) $_4W$
- 5) $_5\neg P \vee \neg Q \vee \neg R \vee \neg W$
-
- 6) $_6\neg Q \vee \neg R \vee \neg W$ из 1 и 5
- 7) $_7\neg R \vee \neg W$ из 2 и 6
- 8) $_8\neg W$ из 3 и 7
- 9) \square из 4 и 8

№5. Для $S = \{P \vee Q \vee R, \neg P \vee R, \neg Q, \neg R\}$ получить пустой дизъюнкт, используя лок-резольвацию.

Решение

- 1) $_1P \vee _2Q \vee _3R$
- 2) $_4\neg P \vee _5R$
- 3) $_6\neg Q$
- 4) $_7\neg R$
-
- 5) $_2Q \vee _3R$ из 1 и 2
- 6) $_3R$ из 3 и 5
- 7) \square из 4 и 6

№6. Истинно ли приведенное утверждение:

$B \rightarrow C, \neg A \equiv B, \neg C \equiv D \models (C \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow A)$.

Решение:

$$(\neg B \vee C) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge \neg((\neg C \vee B) \rightarrow (\neg D \vee A)) \sim$$

$$\{ \neg((\neg C \vee B) \rightarrow (\neg D \vee A)) \sim \neg(\neg(\neg C \vee B) \vee (\neg D \vee A)) \sim$$

$$\sim \neg((C \wedge \neg B) \vee (\neg D \vee A)) \sim (\neg C \vee B) \wedge (D \wedge \neg A) \sim \underline{(\neg C \vee B) \wedge D \wedge \neg A} \}$$

$$\sim (\neg B \vee C) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (C \vee D) \wedge (\neg C \vee \neg D) \wedge \underline{(B \vee \neg C) \wedge \neg A \wedge D}$$

S^0

(1) $\neg B \vee_2 C$

(2) $A \vee_4 B$

(3) $\neg A \vee_6 \neg B$

(4) $C \vee_8 D$

(5) $\neg C \vee_{10} \neg D$

(6) $B \vee_{12} \neg C$

(7) $\neg A$

(8) D

S^1 - - - - -

(9) $\neg B$ из 2 и 7 (не рассматривая тавтологию)

(рассматривая тавтологию)

(9) $\neg C \vee_{12} \neg C$ из 1 и 6

(10) $B \vee_6 \neg B$ из 2 и 3

(11) B из 2 и 7

(12) $D \vee_{10} \neg D$ из 4 и 5

(13) $\neg C \vee_6 \neg B$ из 1 и 10

(14) C из 1 и 11

(15) $\neg D \vee_{12} \neg C$ из 5 и 9

(16) $\neg D \vee_6 \neg B$ из 5 и 13

(17) $\neg D$ из 5 и 14

(18) \square из 8 и 17

=====

Из теста **Раздел 4. Вопросы.**

Вопрос 1

Из дизъюнктов D_1 и D_2 получаем резольвенту R

$$D_1 = \neg P \vee Q, D_2 = \neg Q \vee T$$

$$D_1 = PVQ, D_2 = \neg PV T$$

$$D_1 = TVQ, D_2 = \neg QV T$$

$$D_1 = P, D_2 = \neg P \vee Q$$

<input type="checkbox"/> $R = Q \vee T$
<input type="checkbox"/> $R = Q$
<input type="checkbox"/> $R = T$
<input type="checkbox"/> $R = \neg P \vee T$

Вопрос 7

Укажите, какое из следующих утверждений истинно (при произвольных формулах A и B)

- $A, A \rightarrow B \vdash B$
- $A, A \rightarrow B \vdash \neg B$
- $A, A \rightarrow B \vdash \neg A$
- $A, A \rightarrow B \vdash A \wedge \neg A$
- $A, A \rightarrow B \vdash \neg B \wedge B$

Вопрос 8

Укажите, какое из следующих утверждений ложно (при произвольных формулах A и B)

- $A \wedge B \wedge C \vdash A$
- $A \wedge B \wedge C \vdash A \wedge B$
- $A \wedge B \wedge C \vdash \neg A$
- $A \wedge B \wedge C \vdash A \wedge B \wedge C$
- $A \wedge B \wedge C \vdash B$

Вопрос 9

Указать сколько и какие бинарные резольвенты можно получить из дизъюнктов

$$D_1 = P \vee \neg T \vee S, D_2 = \neg P \vee T.$$

- две резольвенты: $R_1 = T \vee S, R_2 = P \vee S$
- две резольвенты: $R_1 = \neg T \vee T \vee S, R_2 = \neg P \vee P \vee S$
- две резольвенты: $R_1 = \neg T \vee T, R_2 = \neg P \vee P$
- одну резольвенту: $R_1 = \neg T \vee T \vee S$
- одну резольвенту: $R_1 = P \vee \neg P \vee T \vee S$

Вопрос 10

Используя лок-резолюцию, из дизъюнктов получается резольвента

(1)

$\neg P \vee \neg Q$

(2)

$\neg P \vee Q$

- $\neg P$
- $\neg P \vee \neg Q \vee \neg P \vee \neg Q$
- нет резольвенты
- $\neg P$