Раздел 3 «Основы логики предикатов». Часть 2.

Символизация языка. Предикаты, кванторы

1. Какие из следующих выражений являются предикатами:

а) число x - простое число;

б) x=y+z; здесь x, y - действительные числа;

в) x=2y+ 3; здесь x, y - действительные числа;

г) 2x+y; здесь x, y - действительные числа;

д) все подобные треугольники равны;

е) $x^2 + y^2 < o$ (x, y - действительные числа);

ж) все четные числа делятся на число y;

з) все четные числа делятся на 2;

и) 8 - нечетное число;

к) имеется бесчисленное множество различных простых чисел;

л) число 267 - 1 не является простым;

м) представьте число 267 -1 в виде произведения двух чисел, отличных от единицы и самого числа.

Выделите среди предикатов высказывания.

2. Запишите символически следующие предложения:

а) для всякого числа x существует такое число y, что $x+y=5$;

б) для любого числа y найдется хотя бы одно число x, что $y-x<0$;

в) при любом x, не равном нулю, существует y такое, что $x/y=2$;

г) для любых чисел x и y имеет место равенство $x+y=y+x$;

д) все рациональные числа действительные;

е) ни одно рациональное число не является действительным;

ж) некоторые рациональные числа действительные;

з) некоторые рациональные числа не являются действительными.

3. Введем следующие обозначения:

$Z(x, t)$: я вижу предмет x в момент времени t,

$P(x, t)$: я беру предмет x в момент времени t,

$Q(t^*,t)$: момент времени t^* предшествует моменту $t(t^*<t)$.

Напишите, используя эти обозначения, символические выражения для следующих предложений.

1). Я всегда что-то вижу.

2). Иногда я ничего не вижу.

3). Существуют предметы, которые я никогда не вижу.

4). Я вижу каждую вещь в некоторый момент времени.

4. Пусть переменные в нижеследующих выражениях пробегают множество действительных чисел, а алгебраические знаки имеют свои обычные значения, прочтите эти выражения и определите, истинны ли они:

1) $\forall x\ \forall y(x+y=y+x)$;

2) $\forall x \exists y\ (x+y=3)$;

3) $\exists y \forall x\ (x+y=3)$;

4) $\exists x \forall y\ (x+y=3)$;

5) $\forall x\ \forall y\ (x+y=3)$;

6) $(\forall x\ \forall y\ (x+y=3)) \rightarrow (2=3)$;

7) $\exists x \exists y\ ((x>y>0) \wedge (x+y=0))$;

8) $\forall x\ ((x^2 > x) \equiv ((x>l) \vee (x<0)))$;

6. Пусть P(x) обозначает: x - студент. Сформулируйте словесно следующие выражения:

а) $\forall x\ P(x)$;

б) $\exists x\ P(x)$;

в) $\neg\forall x\ P(x)$;

г) $\forall x\ \neg P(x)$;

д) $\exists x\ \neg P(x)$;

е) $\neg\exists x\ P(x)$;

ж) $(\exists x P(x)) \wedge \exists y \neg P(y)$;

з) $(\exists y \neg P(x)) \rightarrow \neg\forall x P(x)$.

11. Запишите символически следующие предложения:

а) A(x) при произвольном x;

б) A(x) каково бы ни было x;

в) всегда имеет место A(x);

г) найдется x, для которого A(x);

д) не при всяком x A (x);

е) A(x) не для всех x;

ж) для всякого x не A(x);

з) нет x такого, что A(x);

и) нет никакого x, такого, что A(x);

к) для некоторого x не A(x);

л) ни для какого x не верно A(x).

20. Предикат A (x, y) задан на множестве M={1, 2, 3} таблицей

x \ y	1	2	3
1	И	И	И
2	Л	Л	И
3	И	Л	И

Определить истинностное значение приведенных ниже формул при каждом значении свободной переменной:

а) $\forall x A(x,y)$;

б) $\exists x A(x,y)$;

в) $\forall y A(x,y)$;

г) $\exists y A(x,y)$.

Замечание. Формулы 1 и 2 в лит-ре представляются также:

$$\neg(\forall x)(F(x)) \cong (\exists x)(\neg F(x))$$

$$\neg(\exists x)(F(x)) \cong (\forall x)(\neg F(x))$$

Примеры выполнения индивидуальных заданий по теме №5

Задание №1.

Перенести $\urcorner$ за скобки предиката $\urcorner(\exists x\forall y\forall z\,(\urcorner A\,(x,y) \vee B\,(x,z)))$.

Решение. $\urcorner(\exists x\forall y\forall z\,(\urcorner A\,(x,y) \vee B\,(x,z))) \sim \forall x\exists y\exists z\,(A\,(x,y) \wedge \urcorner B\,(x,z))$. *При переносе $\urcorner$ за скобки все логические символы меняются на «обратные», а положительный предикат становится со знаком $\urcorner$ и наоборот.*

Задание №2.

Привести к сколемовской стандартной форме.

В этой форме должны остаться только кванторы всеобщности перед предикатом, а предикат может содержать только символы $\vee$, $\wedge$ и $\urcorner$ перед буквой.

a) $\exists x\forall y\forall z\,(A(x,y) \to B(x,z)) \sim$ *(обращаем внимание на то, что квантор существования находится перед кванторами всеобщности)*

$\sim \exists x\forall y\forall z\,(\urcorner A\,(x,y) \vee B\,(x,z)) \sim$

$\sim \quad \forall y\forall z\,(\urcorner A\,(a,y) \vee B\,(a,z))$ *(заменили переменную x некоторой величиной a (т.к. $\exists x$))*

b) $\exists x\exists y\forall z\,(A\,(x,y) \to B\,(x,z)) \sim$ *(обращаем внимание на то, что два квантора существования находится перед квантором всеобщности)*

$\sim \exists x\exists y\forall z\,(\urcorner A\,(x,y) \vee B\,(x,z)) \sim$

$\sim \forall z\,(\urcorner A\,(a,b) \vee B(a,z))$ *(заменили переменные x и y некоторыми величинами a и в (т.к. $\exists x\exists y$))*

c). $\forall x\exists y\forall z\,(A\,(x,y) \to B\,(x,z)) \sim$ *(обращаем внимание на то, что квантор существования находится после квантором всеобщности, в этом случае вместо переменной y вводим функцию f(x))*

$\sim \forall x\forall z\,(\urcorner A\,(x, f(x)) \vee B\,(x,z)) \sim$

d) $\forall x\forall y\exists z\,(A\,(x,y) \to B\,(x,z)) \sim$ *(обращаем внимание на то, что квантор существования находится после двух кванторов всеобщности, в этом случае вместо переменной z вводим функцию f(x,y))*

$\sim \forall x\forall y\,(\urcorner A\,(x,y) \vee B\,(x, f(x,y)))$

Раздел 3

Вопрос 1

Поставьте в соответствие значения истинности предикатов, связанных кванторами, и вид предиката.

$\neg(\exists x)(\neg P(x))=1$	$P(x)$ – опровержимый предикат
$\neg(\forall x)(\neg P(x))=1$	$P(x)$ – тождественно истинный предикат
$\neg(\forall x)(\neg P(x))=0$	$P(x)$ – выполнимый предикат
$\neg(\exists x)(\neg P(x))=0$	$P(x)$ – тождественно ложный предикат

Вопрос 2

Установите соответствие между наименованием и обозначением.

n – местный предикат	$P(x_1, \ldots, x_n)$
квантор всеобщности	$\forall x$
квантор существования	одноместный предикат
$P(x)$	$\exists x$

Вопрос 3

- квантор
- высказывание
- произвольная функция
- однородная функция

— это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката.

Вопрос 4

- Областью истинности
- Одноместным предикатом
- Предметной переменной
- Квантором

называется функция одной переменной, значениями которой являются высказывания об объектах, представляющих значения аргумента.

Вопрос 5

Какие формулы находятся в префиксной нормальной форме?

- ☐ ∀x ∀y (¬P (x, y) ∧ Q(y))
- ☐ ∀x ∃ y ∀z ((A x, y) v¬ B (y, z) v C (z))
- ☐ ∀x ∃ y ∀z((A x, y) v¬ B (y, z) ≡ C (z) v¬ B (y, z))
- ☐ ∀x ∀y (P (x, y) → Q(y))

Вопрос 6

Выберите символическую запись предложения: "При любом x, не равном нулю, существует y такое, что x/y=2"

- ○ $\exists y\ \forall x\ ((x\neq 0) \vee (x/y=2))$
- ○ $\forall x \exists y((x\neq 0) \rightarrow (x/y=2))$
- ○ $\forall x \exists y((x\neq 0) \wedge (x/y=2))$
- ● $\forall x \exists y((x\neq 0) \vee (x/y=2))$

Вопрос 7

Выберите символическую запись предложения: "Некоторые рациональные (S) числа являются действительными (P)"

- ○ $\exists x(S(x) \vee \neg P(x))$
- ○ $\exists x(S(x) \wedge P(x))$
- ○ $\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$
- ○ $\exists x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$

Вопрос 8

Введем следующие обозначения для Z(x, t): я вижу предмет x в момент времени t.

Выберите символические выражения для предложения: "Я вижу каждую вещь в некоторый момент времени."

- ○ $\exists x \forall t \neg Z(x,t)$
- ○ $\exists t \forall x\ Z(x,t)$
- ○ $\exists t \forall x \neg Z(x,t)$
- ○ $\forall t \exists x\ Z(x,t)$

Вопрос 9

Привести к сколемовской стандартной форме $\exists x \exists y \forall z\ (A(x,y) \rightarrow B(x,z))$

- ○ $\forall z\ (A(x,y) \rightarrow B(x,z))$
- ○ $\forall z\ (\neg A(a,b) \vee B(a,z))$
- ○ $\exists z\ (\neg A(x,y) \vee B(x,z))$
- ○ $\exists z\ (\neg A(a,b) \vee B(a,z))$

Вопрос 10

Привести к сколемовской стандартной форме $\forall x \exists y \forall z\ (A(x,y) \rightarrow B(x,z))$

- ○ $\forall x \forall z\ (\neg A(x, y)) \vee B(x,z))$
- ○ $\forall x \forall z\ (\neg A(x, f(x)) \vee B(x,z))$
- ○ $\exists x \exists z\ (\neg A(x, f(x)) \vee B(x,z))$
- ● $\forall x \forall z\ (A(x,y) \rightarrow B(x,z))$