Предикаты

Расширение логики высказываний до логики предикатов получается за счет включения в формулы утверждений, являющихся предикатами.

Одноместный предикат *P(x)* — это произвольная функция переменной x, определенная на некотором множестве ***M*** и принимающая (логические) значения из множества {Л, И}.

Любое высказывание можно рассматривать как 0-местный предикат.

Кванторы

Квантор — это общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката.
(квАнтор)

Квантор всеобщности ∀ и квантор существования ∃.

$\forall x$ P(x) означает, что область истинности предиката P(x) совпадает с областью изменения переменной x. Читается это высказывание: «для всякого x истинно P(x) ».

Истинность высказывания $\exists\ x$ P(x) означает, что область истинности предиката P(x) не пуста. Читается это высказывание: «существует x, при котором P(x) истинно».

Если некоторый предикат P(x) определен на конечном множестве ***M*** = $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то справедливы следующие тождества:

$$\forall x\, P(x) \sim P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_k); \quad \exists\, x\, P(x) \sim P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_k).$$

Квантор всеобщности обобщает конъюнкцию, а квантор существования — дизъюнкцию.

$$\forall x\, P(x,y);\quad \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall x \exists\, y\, P(x,y);\quad \forall x \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x \forall y\, P(x,y);\quad \exists\, x \exists\, y\, P(x,y);$$

$$\forall y \forall x\, P(x,y);\quad \forall y \exists\, x\, P(x,y);\quad \exists\, y \forall x\, P(x,y);\quad \exists\, y \exists\, x\, P(x,y).$$

Основные равносильности, содержащие кванторы

1. $\overline{\forall x\, P(x)} \sim \exists\, x\, \overline{P(x)}$ (*первый закон де Моргана для кванторов*);
2. $\overline{\exists\, x\, P(x)} \sim \forall x\, \overline{P(x)}$ (*второй закон де Моргана для кванторов*);

(Используя эти соотношения, можно выразить один квантор через другой.)

Замечание. Формулы 1 и 2 в лит-ре представляются также:

$$\neg(\forall \mathrm{x})(\mathrm{F}(\mathrm{x})) \cong (\exists \mathrm{x})(\neg \mathrm{F}(\mathrm{x}))$$

$$\neg(\exists \mathrm{x})(\mathrm{F}(\mathrm{x})) \cong (\forall \mathrm{x})(\neg \mathrm{F}(\mathrm{x}))$$

3. $\forall x\, P(x) \sim \overline{\exists\, x\, \overline{P(x)}}$;
4. $\exists\, x\, P(x) \sim \overline{\forall x\, \overline{P(x)}}$;
5. $\forall x\,(P(x) \wedge S) \sim \forall x\, P(x) \wedge S$;
6. $\forall x\,(S \wedge P(x)) \sim S \wedge \forall x\, P(x)$;
7. $\forall x\,(P(x) \vee S) \sim \forall x\, P(x) \vee S$;
8. $\forall x\,(S \vee P(x)) \sim S \vee \forall x\, P(x)$;

9. $\exists x\,(P(x)\wedge S) \sim \exists x\,P(x)\wedge S$;

10. $\exists x\,(S\wedge P(x)) \sim S\wedge\exists x\,P(x)$;

11. $\exists x\,(P(x)\vee S) \sim \exists x\,P(x)\vee S$;

12. $\exists x\,(S\vee P(x)) \sim S\vee\exists x\,P(x)$;

13. $\forall x\,(P(x)\to S) \sim \exists x\,P(x)\to S$;

14. $\forall x\,(S\to P(x)) \sim S\to\forall x\,P(x)$;

15. $\exists x\,(P(x)\to S) \sim \forall x\,P(x)\to S$;

16. $\exists x\,(S\to P(x)) \sim S\to\exists x\,P(x)$;

17. $\forall x\,S \sim S$;

18. $\exists x\,S \sim S$;

19. $\forall x\,(P(x)\wedge Q(x)) \sim \forall x\,P(x)\wedge\forall x\,Q(x)$ (*дистрибутивность квантора всеобщности относительно конъюнкции*);

20. $\exists x\,(P(x)\vee Q(x)) \sim \exists x\,P(x)\vee\exists x\,Q(x)$ (*дистрибутивность квантора существования относительно дизъюнкции*);

21. $\exists x\,(P(x)\wedge Q(x)) \to (\exists x\,P(x)\wedge\exists x\,Q(x)) \sim 1$;

22. $(\forall x\,P(x)\vee\forall x\,Q(x)) \to \forall x\,(P(x)\vee Q(x)) \sim 1$;

23. $\forall x\,P(x) \sim \forall y\,P(y)$;

24. $\exists x\,P(x) \sim \exists y\,P(y)$;

25. $\forall x\,\forall y\,R(x,y) \sim \forall y\,\forall x\,R(x,y)$ (*коммутация одноименных кванторов*);

26. $\exists x\,\exists y\,R(x,y) \sim \exists y\,\exists x\,R(x,y)$ (*коммутация одноименных кванторов*);

27. $\exists y\,\forall x\,R(x,y) \to \forall x\,\exists y\,R(x,y) \sim 1$.

(Соотношения 21, 22 и 27 не будут верны, если поменять направления стрелок на противоположное.)

Предваренная нормальная форма

Для облегчения анализа сложных суждений формулы логики предикатов рекомендуется приводить к предваренной нормальной форме.

О. Формула логики предикатов находится в предваренной (или префиксной) нормальной форме, если она имеет вид

$$Q_1 x_1 \dots Q_n x_n F,$$

где каждый Q_i есть квантор всеобщности или существования (т. е. $Q_i x_i$ обозначает $\forall x_i$ или $\exists\, x_i$),
переменные x_i , x_j различны при $i \neq j$,
F — формула, содержащая операции $\wedge$, $\vee$, $\rceil$ и не содержащая кванторов (причем знаки отрицания отнесены только к элементарным предикатам и высказываниям, то есть к элементарным формулам).

Выражение $Q_1 x_1 \dots Q_n x_n$ называют *префиксом* (или *кванторной приставкой*), а формулу F — матрицей.

О. Если существует i такое, что $Q_1, \dots, Q_i$ суть $\exists$, а $Q_{i+1}, \dots, Q_n$ суть $\forall$, то эта форма называется *скулемовской нормальной формой* (или *$\exists\forall$-формулой*).

Если кванторная приставка не содержит кванторов $\exists$, форма называется **сколемовской стандартной** формой (ССФ).

$$\forall x\, \forall y \left(\rceil P(x,y) \wedge Q(y) \right);$$

$$\forall x\, \exists\, y\, \forall z \left(A(x,y) \vee \rceil B(y,z) \vee C(z) \right).$$

Процедура приведения формулы логики предикатов к префиксной нормальной форме:

1) Сначала избавляются от операций импликации, эквивалентности, выразив их через логические связки $\rceil$, $\wedge$ и $\vee$ по законам:

$$A \to B \sim \rceil A \vee B,$$

$$A \equiv B \sim (A \wedge B) \vee (\rceil A \wedge \rceil B),$$

2) Доводят символы отрицания до символов предикатов, используя правила де Моргана, и избавляются от двойных отрицаний:

$$\neg(A \wedge B) \sim \neg A \vee \neg B,$$

$$\neg(A \vee B) \sim \neg A \wedge \neg B,$$

$$\neg\big(\forall x\, P(x)\big) \sim \exists x\, \big(\neg P(x)\big),$$

$$\neg\big(\exists x\, P(x)\big) \sim \forall x\, \big(\neg P(x)\big),$$

$$\neg\neg A \sim A.$$

3) Для формул, содержащих подформулы вида

$$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x), \qquad \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$$

и т. п., вводят новые переменные, позволяющие выносить знаки кванторов наружу.

Например:

$$\exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x) \sim \exists x\, \exists y\, \big(P(x) \wedge Q(y)\big);$$

$$\forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x) \sim \forall x\, \forall y\, \big(P(x) \vee Q(y)\big);$$

$$\forall x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x) \sim \forall x\, \exists y\, \big(P(x) \vee Q(y)\big).$$

Напоминание

$$\forall x\, P(x) \sim P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_k); \quad \exists x\, P(x) \sim P(a_1) \vee \ldots \vee P(a_k).$$

4) Используя все известные равносильности логики предикатов, получают формулу в виде префиксной нормальной формы.

2. Привести следующую формулу к предваренной нормальной форме, считая **A** и **B** бескванторными формулами:

$$\left(\exists x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists x\ \forall y\ B(x,y)\right).$$

Решение. Имеем

$$\left(\exists x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists x\ \forall y\ B(x,y)\right)\sim$$

$$\sim\left(\exists x\ \forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\exists z\ \forall y\ B(z,y)\right)\sim$$

$$\sim\exists x\,\exists z\left(\left(\forall y\ A(x,y)\right)\wedge\left(\forall y\ B(z,y)\right)\right)\sim$$

$$\sim\ \exists x\,\exists z\,\forall y\left(A(x,y)\wedge B(z,y)\right).$$

(*Внимание: любого y, конъюнкция, новая переменная не вводится*)

Напоминание

$$\forall x\,P(x)\sim P(a_1)\wedge\ldots\wedge P(a_k);\quad \exists x\,P(x)\sim P(a_1)\vee\ldots\vee P(a_k).$$

3. Привести к предваренной нормальной форме следующую формулу:

$$\forall x\left(\neg A(x)\to\exists y\left(\neg B(y)\right)\right)\to\left(B(z)\to A(z)\right).$$

Решение. Имеем

$$\forall x\left(\neg A(x)\to\exists y\left(\neg B(y)\right)\right)\to\left(B(z)\to A(z)\right)\sim$$

$$\sim\ \forall x\left(A(x)\vee\exists y\left(\neg B(y)\right)\right)\to\left(\neg B(z)\vee A(z)\right)\sim$$

$$\sim\ \neg\forall x\left(A(x)\vee\exists y\left(\neg B(y)\right)\right)\vee\left(\neg B(z)\vee A(z)\right)\sim$$

$$\sim\exists x\left(\neg A(x)\wedge\forall y\,B(y)\right)\vee\left(\neg B(z)\vee A(z)\right)\sim$$

$$\sim\exists x\,\forall y\left[\left(\neg A(x)\wedge B(y)\right)\vee\left(\neg B(z)\vee A(z)\right)\right]\sim$$

$$\sim\exists x\,\forall y\left[\left(\neg A(x)\vee\neg B(z)\vee A(z)\right)\wedge\left(B(y)\vee\neg B(z)\vee A(z)\right)\right].$$

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (на множествах $M_1, M_2, \dots, M_n$) называется ***тождественно истинным***, если при любых допустимых значениях его переменных он превращается в истинное высказывание.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***тождественно ложным***, если при любых допустимых значениях его переменных он превращается в ложное высказывание.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***выполнимым***, если найдется хотя бы один набор допустимых значений его переменных, при котором превращается в истинное высказывание.

Определение. Предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется ***опровержимым***, если найдется хотя бы один набор допустимых значений его переменных, при котором превращается в ложное высказывание.

Примеры 1.
Доказать общезначимость следующей формулы логики предикатов:

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\big).$$

Решение.
Упростим формулу, используя равносильные преобразования:

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big) \to \big(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)\big) \sim$$

$$\sim \overline{\forall x\, \left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)} \vee \left(\overline{\forall\, x\, P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \overline{\left(\overline{P(x)} \vee Q(x)\right)} \vee \left(\exists\, x\, \overline{P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\exists\, x\, \overline{P(x)} \vee \forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\exists\, x\, \overline{P(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \left(\left(P(x) \wedge \overline{Q(x)}\right) \vee \overline{P(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \left(\overline{Q(x)} \vee \overline{P(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \exists\, x\, \left(\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \left(\exists\, x\, \overline{P(x)}\right) \vee \left(\exists\, x\, \overline{Q(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \left(\exists\, x\, \overline{P(x)}\right) \vee \left(\overline{\forall x\, Q(x)}\right) \vee \left(\forall x\, Q(x)\right) \sim$$

$$\sim \left(\exists\, x\, \overline{P(x)}\right) \vee 1 \sim 1.$$

Вопросы, задания к Разделу 3.

1. Одноместный предикат. Привести пример.
2. *n*-местный предикат. Привести пример.
3. Привести пример навешивания на трехместный предикат квантора всеобщности и квантора существования.
4. Пример предиката, находящегося в предваренной нормальной форме.
5. Привести пример предиката, имеющего свободную и связанную переменную.
6. Привести пример замыкания формулы для трехместного предиката.
7. Привести к нормальной форме формулу: $\neg(\forall x \, \exists y \, P(x,y) \rightarrow Q(x,y))$.