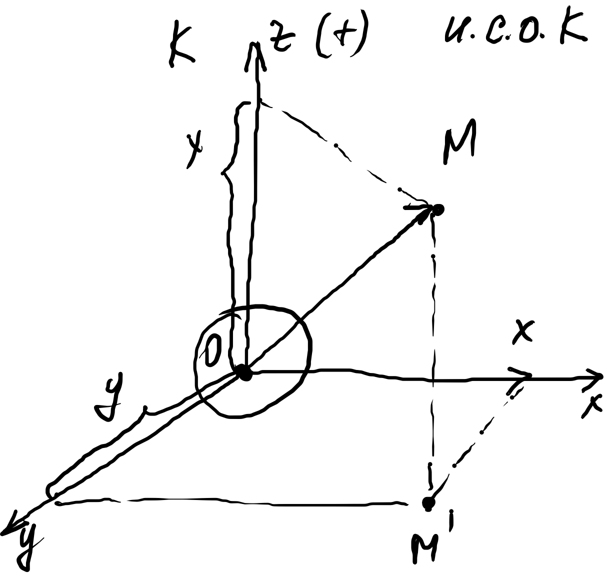
Основы специальной теории относительности (СТО)

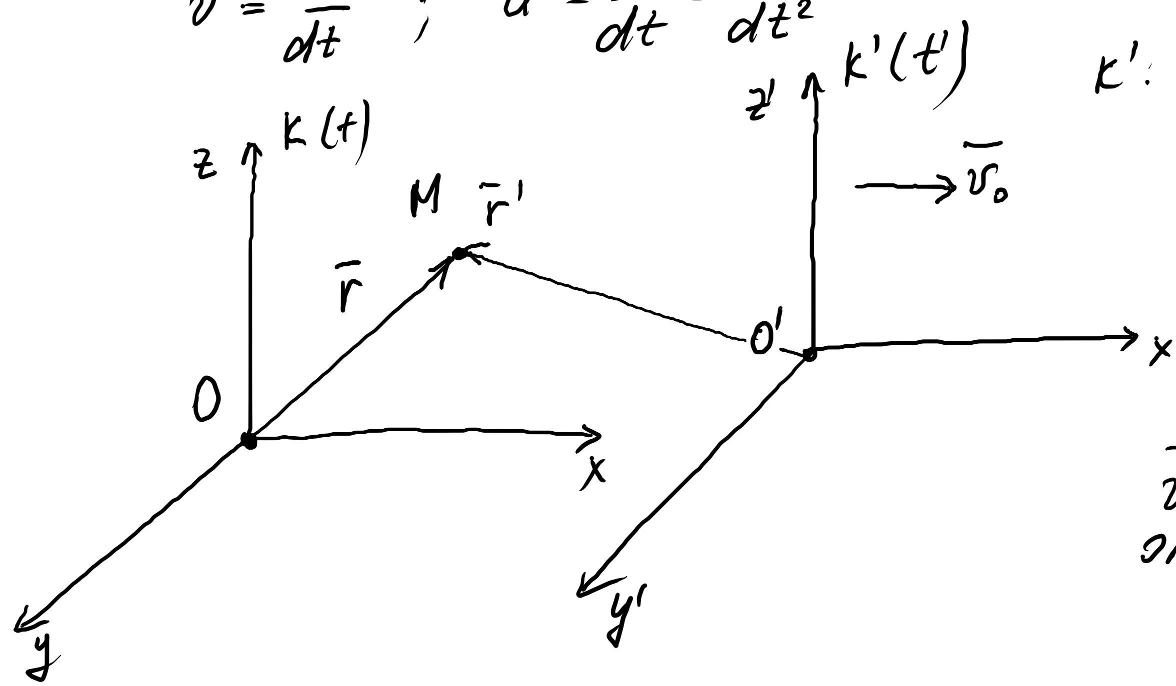
Преобразования Галилея. Механический принцип относительности

1 закон Ньютона – определяет и.с.о.



x, y, z ; $\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \bar{r} = \bar{r}(t)$

$\bar{v} = \dfrac{d\bar{r}}{dt}$; $\bar{a} = \dfrac{d\bar{v}}{dt} = \dfrac{d^2\bar{r}}{dt^2}$



Если с.о. двигается равномерно и прямолинейно ($\bar{v} = const$) и покоится ($\bar{v} = 0$) относительно и.с.о., то эта система инерциальная.

K: $\bar{r} = \bar{r}(t)$ — !

K': $\bar{r}' = \bar{r}'(t')$ — ?

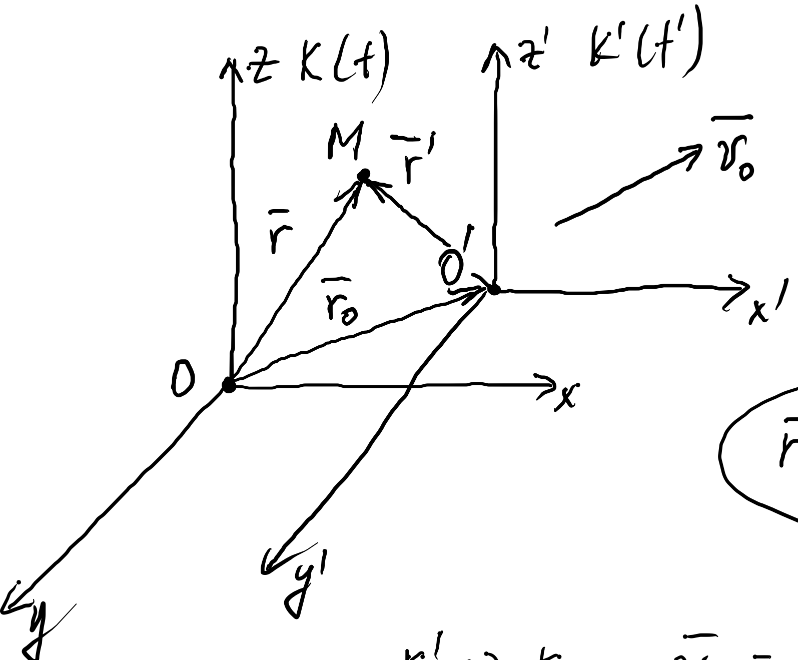
$\bar{r}(x, y, z) \Longleftrightarrow \bar{r}'(x', y', z')$!?

Классическая механика

Преобразование Галилея.

$\bar{v}_0$ – скорость движения и.с.о. K' относительно и.с.о. K.

$\bar{v}_0 = const$



$t = t' = 0$

т. O и т. O' совпадают

K' движется со скоростью $\bar{v}_0 = \text{const}$ относительно K.

В классической механике (небольшие скорости движение, $v \ll c$): $t = t'$

$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{r}_0$ $\bar{r}_0 = \bar{v}_0 t$; $\bar{r} = \bar{r}' + \bar{v}_0 t$

$K' \to K$ $\bar{r} = \bar{r}' + \bar{v}_0 t$

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x} t \\ y = y' + v_{0y} t \\ z = z' + v_{0z} \cdot t \end{cases}$$

$K \to K'$ $r' = \bar{r} - \bar{v}_0 t'$

$$\begin{cases} x' = x - v_{0x} t' \\ y' = y - v_{0y} t' \\ z' = z - v_{0y} t' \end{cases}$$

При $v_0 \ll c$ $t = t'$

Преобразование координат Галилея

$dt = dt'$

$\bar{r} = \bar{r}' + \bar{v}_0 t \quad : \frac{d}{dt}$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}'}{dt} + \bar{v}_0 \frac{dt}{dt} \rightarrow \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr'}{dt'} + \bar{v}_0$$

$K' \to K$ $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_0$ $K \to K'$ $\bar{v}' = \bar{v} - \bar{v}_0$

Закон сложения скоростей

$K' \to K \quad \bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_0 \quad : \frac{d}{dt}$

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \cancel{\frac{d\bar{v}_0}{dt}} = 0$$

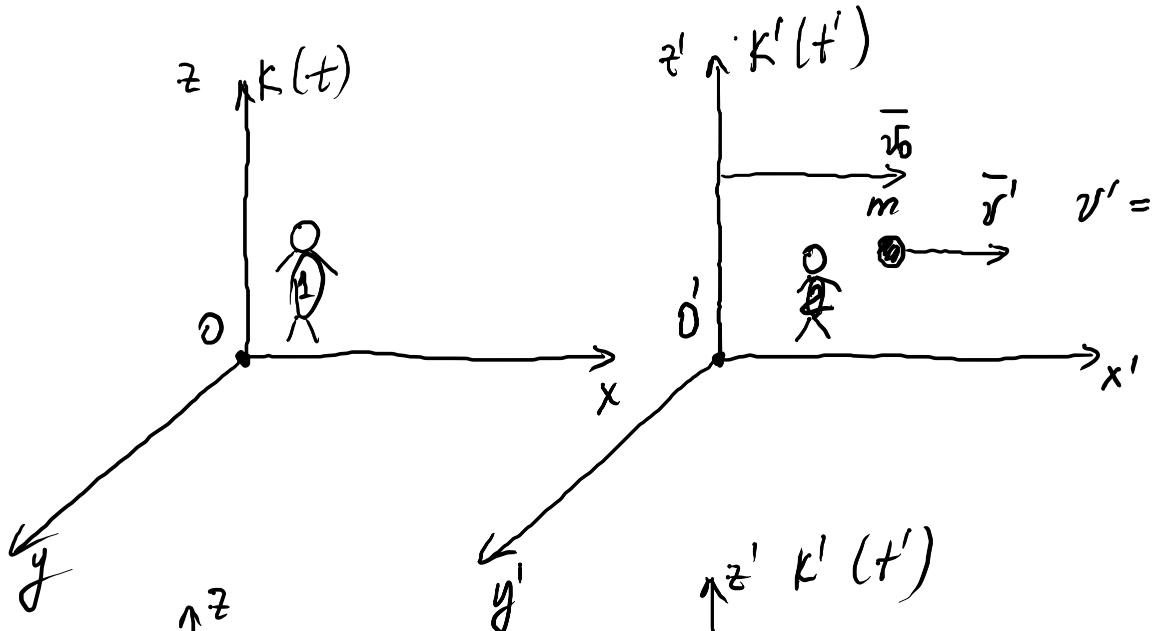
$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} \Rightarrow \bar{a} = \bar{a}'$$

$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$; $\bar{a} = \bar{a}'$; $m = m'$, $\bar{F} = \bar{F}'$

K: $\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$ K': $\bar{a} = \frac{\bar{F}'}{m}$

Уравнение динамики (2й закон Ньютона) инвариантно при переходе от одной и.с.о. к другой и.с.о.

Механический принцип относительности.



$t = t' = 0$

Т.О и Т.О' совпадают

OX и OX' совпадают

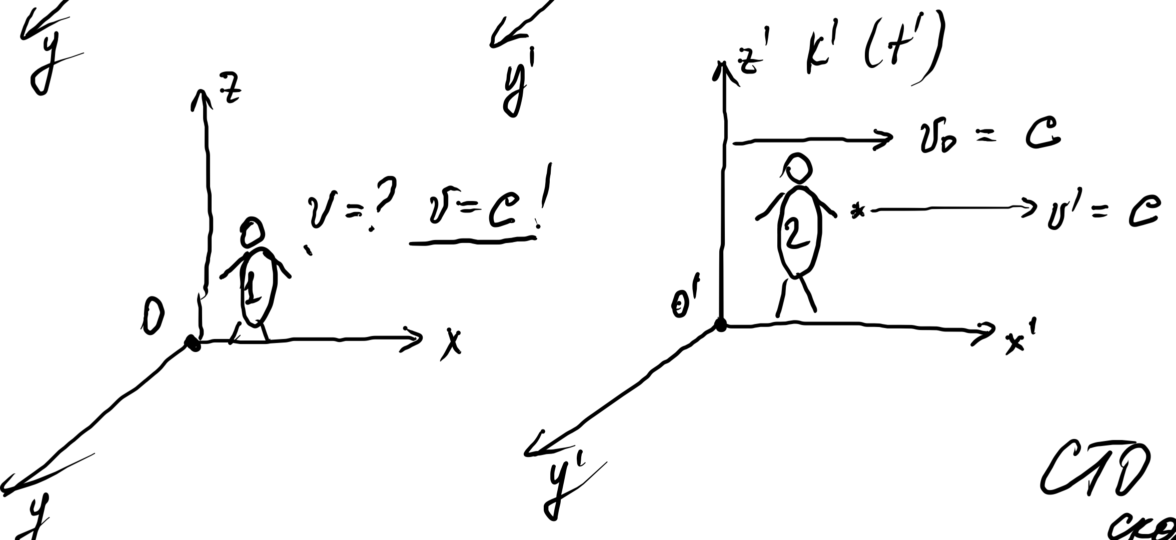
$v' = v_x \quad v_y = v_z = 0$

$v = v' + v_0$

$v_0 = 10$ м/с

$v' = 20$ м/с

$v = v_0 + v' = 10 + 20 = 30$ м/с



$v = v' + v_0 = c + c = 2c$ – неправильно

$v \overset{?}{=} v' + v_0 = c$

Постулаты специальной теории относительности (СТО)

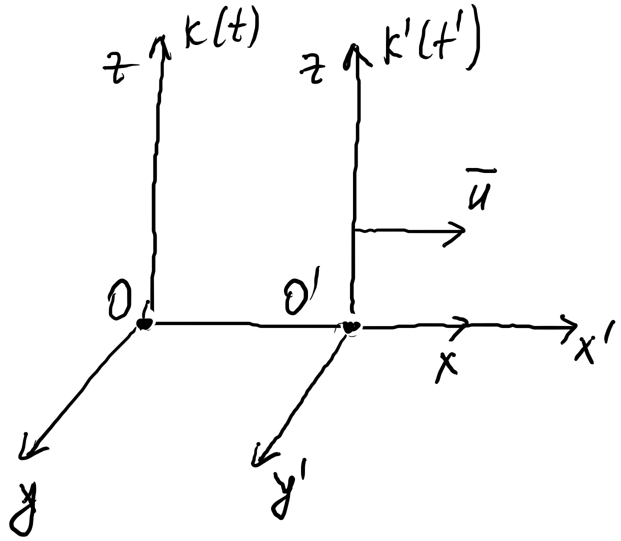
А. Эйнштейн

СТО рассматривает движение тел с высокими скоростями, близкими к скорости света
$c \cong 300\,000$ км/с

1. Принцип относительности: никакими физическими опытами нельзя установить, двигается и.с.о. или покоится. Все и.с.о. являются инвариантными при переходе от одной и.с.о. к другой и.с.о

2. Постоянство скорости света. Скорость света в вакууме является постоянной величиной в любой и.с.о. и не зависит от скорости источника света и от скорости приемника света.

Преобразования Лоренца



$t' = t = 0$ т. O и т. O' совпадают

$K \to K'$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases} \Rightarrow$$

при $u \ll c$

$x' = x - ut$

$y' = y$

$z' = z$

$t' = t$

$K' \to K$

$$x = \frac{x' + ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$y = y'$

$z = z'$

$$t = \frac{t' + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

при $u \ll c$

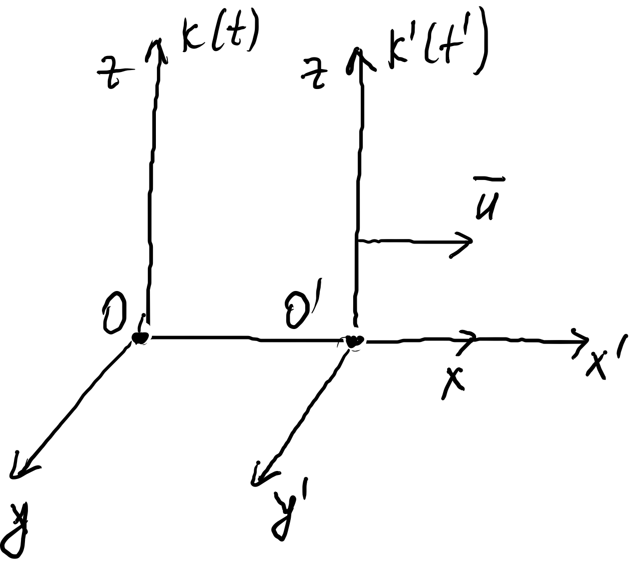
$x = x' + ut$

$y = y'$

$z = z'$

$t = t'$

Следствия из преобразований Лоренца



$K \to K'$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

1. Одновременность событий в разных системах отсчета

K: 1-ое событие $x_1(t_1)$ K': $x_1'(t_1')$

2-ое событие $x_2(t_2)$ $x_2'(t_2')$

$t_1 = t_2$; $x_1 = x_2$ $x_1' = x_2'$ $t_1' = t_2'$

1.1. Одновременные событие, происходящие в одной точке в и.с.о. K, будут в другой и.с.о K' одновременными также и происходить в одной точке

1.2. K: $x_1 \neq x_2$ $t_1 = t_2 = t$ $\beta = \frac{u}{c}$

K': $x_1' = \frac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $t_1' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$x_2' = \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$ $t_2' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}$

В и.с.о K'
событие неодновременные, т.к. $x_1 \neq x_2$ в
и происходят в разных
точках

$$t_2' - t_1' = \frac{\frac{u}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

В и.с.о K' события происходят в разных точках $x_1' \neq x_2'$

и неодновременные

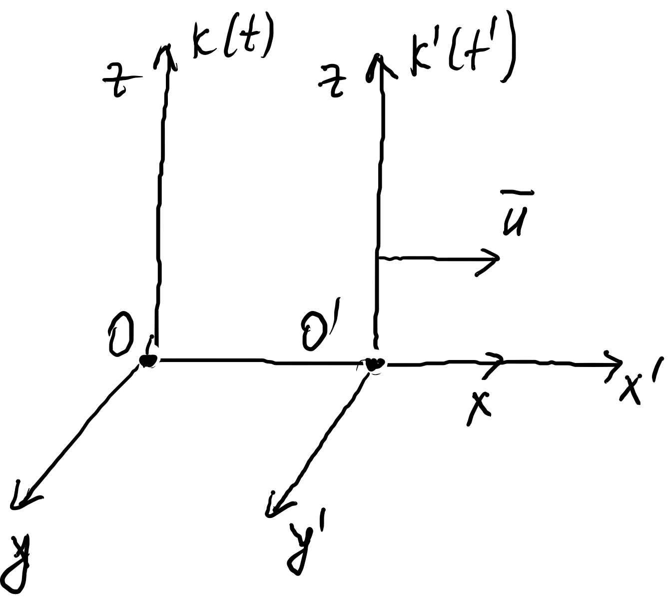
$$\Delta t' = t_2' - t_1' \Rightarrow \Delta t \; \frac{\frac{u}{c^2}(x_1 - x_2)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Вывод: $\Delta t'$ может меняться в зависимости от u и иметь разный знак

Если события независимые, то может быть ситуация, когда событие 2 происходит раньше события 1, $\Delta t' < 0$

Если события взаимосвязанные, то это исключается

Пример: выстрел из ружья и гибель зайца. Есть передача влияния и скорость передачи влияния $< c$, полет пули.



$K \to K'$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

2. Длительность событий в разных системах отсчета

K: $\tau = t_2 - t_1$ – Длительность события по часам системы K

K': $\tau' = t_2' - t_1'$ $\Leftrightarrow$ часы системы K'

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta < 1 \qquad 1-\beta^2 < 1$$

$$\tau' > \tau$$

Парадокс "близнецов" ("часов")

Земля и ракета

Космическое излучение в атмосфере возникают нестабильные частицы π-мезоны в верхних слоях атмосферы, ~ 30км

Двигаются со скоростью, близкой к c

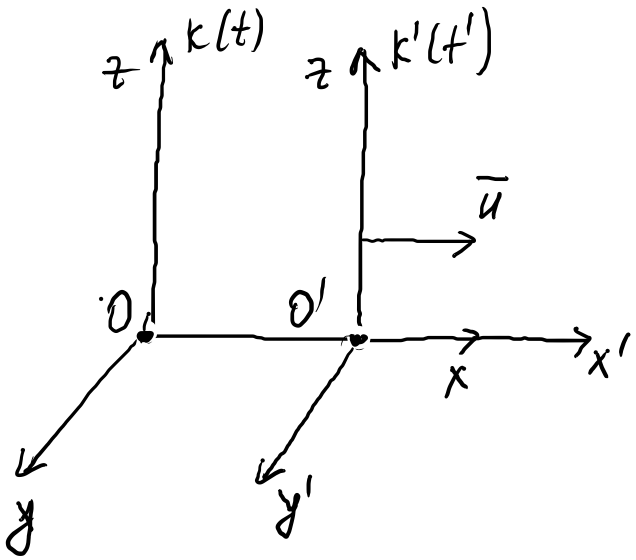
Время жизни π-мезона $\tau = 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ с

$l = c \cdot \tau = 6{,}6$ м

π-мезоны наблюдают у поверхности Земли

$$\tau' = \tau_g / \sqrt{(1-\beta^2)}$$

$$l = u\tau' = \beta c \tau' = \frac{\beta c \tau}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad \beta \approx 1 \qquad u\tau' \gg u\tau$$



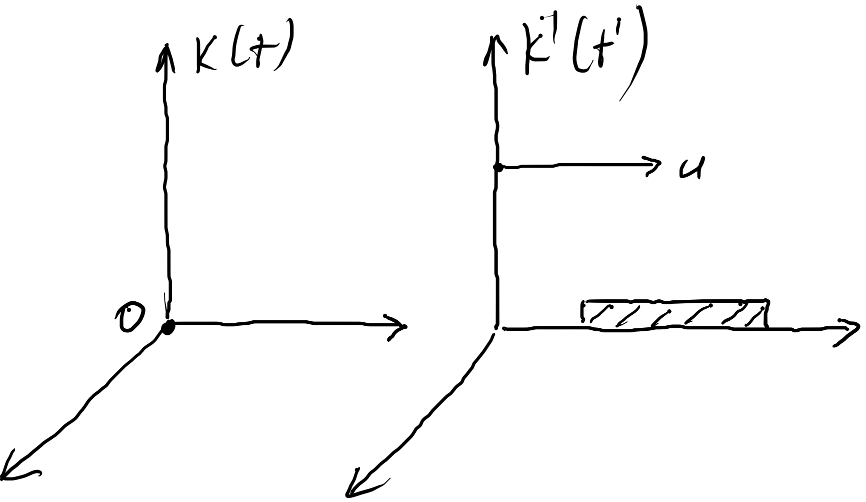
$$K \to K'$$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

3. Длина тела в разных системах отсчета

Стержень (тело) покоится в и.с.о K' и двигается относительно и.с.о K со скоростью u.

Для измерения длины стержня надо определить координаты стержня в K в один и тот же момент времени. Это касается и системы K' $\qquad l_0 = l'$



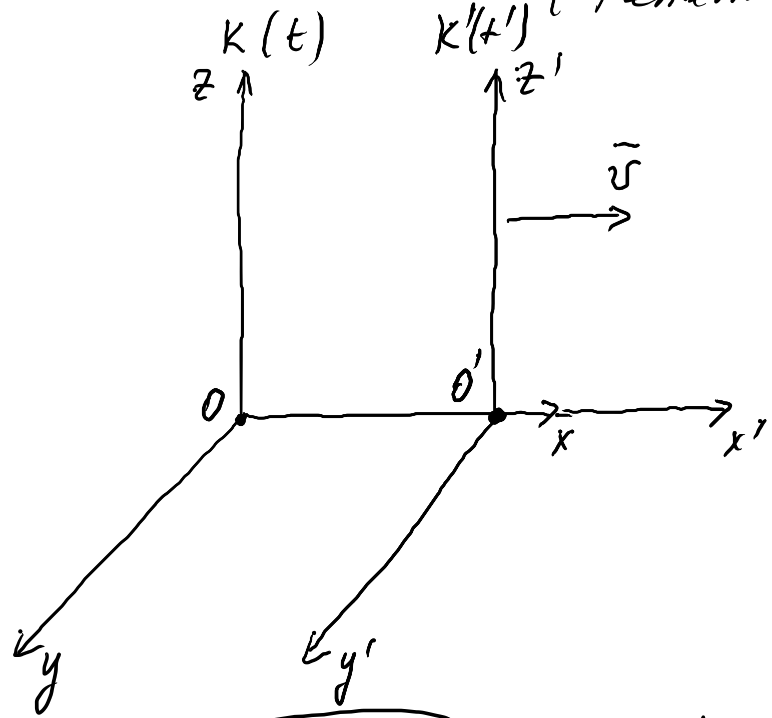
K: $l = x_2 - x_1$

K': $l_0 = x_2' - x_1'$; $l_0 = x_2' - x_1' = \dfrac{x_2 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} - \dfrac{x_1 - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$l_0 = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Закон сложения скоростей в СТО

(Релятивистский закон сложения скоростей)



$t = t' = 0$; т. $O \equiv$ т. O'

K' двигается относительно K со скоростью $\bar{v}$ вдоль оси x, оси x и x' совпадают

Материальная двигается со скоростью $\bar{u}$ в K, $\bar{u}'$ в K'

$(K)\ \bar{u}:\quad u_x = \dfrac{dx}{dt},\quad u_y = \dfrac{dy}{dt},\quad u_z = \dfrac{dz}{dt}$

$(K')\ \bar{u}':\quad u_x' = \dfrac{dx'}{dt'},\quad u_y' = \dfrac{dy'}{dt'},\quad u_z' = \dfrac{dz'}{dt'}$

$u_{x'}' \to u_x'$

$K' \to K$

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \end{cases}} \Rightarrow \quad dx = \frac{dx' + v\,dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\quad dy = dy',\quad dz = dz',\quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$u_x = \frac{dx}{dt} = \frac{(dx' + v\,dt')\cancel{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}}{\cancel{\left(\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}\left(dt' + \frac{v}{c^2}dx'\right)} \quad : dt'$$

$$\Rightarrow \quad u_x = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{\frac{dt'}{dt'} + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}} \qquad u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{dt' + \frac{v}{c^2}dx'} \quad : dt' \Rightarrow u_y = \frac{u_y'\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$$K' \to K$$

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{u_x' + v}{1 + \dfrac{v u_x'}{c^2}} \\ u_y = \dfrac{u_y' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v u_x'}{c^2}} \\ u_z = \dfrac{u_z' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + \dfrac{v u_x'}{c^2}} \end{cases}$$

$$K \to K'$$

$$\begin{cases} u_x' = \dfrac{u_x - v}{1 + \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u_y' = \dfrac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v u_x}{c^2}} \\ u_z' = \dfrac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{v u_x}{c^2}} \end{cases}$$

Пусть матер. точка М движется вдоль оси x'

$u_x' = u'$

$u_y' = 0$

$u_z' = 0$

$$u_x = u = \frac{u' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}$$

$u_y = 0$

$u_z = 0$

$v = c$

$u_x' = c$

$$u = \frac{c + c}{1 + 1} = c$$

Интервал между событиями

Классическая механика

$\Delta t = t_2 - t_1$; $\Delta t' = t_2' - t_1'$

$\Delta t = \Delta t'$

$(x_1 ; y_1 ; t_1)$; $(x_2 ; y_2 ; t_2)$

$$\Delta d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$$\Delta d' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}$$

$$\Delta d = \Delta d'$$

$$\Delta t = \Delta t'$$

Интервал между событиями: характеризуется событие четырьмя координатами: x, y, z, t

$$K: \quad S_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2 + \Delta d_{12}^2} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2 + (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

$$K' \quad S'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2-t'_1)^2 + (x'_2-x'_1)^2 + (y'_2-y'_1)^2 + (z'_2-z'_1)^2}$$

$$S_{12} = \sqrt{c^2\Delta t^2 + \Delta d^2}$$

$K \to K'$ $\quad S_{12} = S'_{12}$

$K' \to K$

При переходе от одной и.с.о к другой и.с.о. интервал между событиями не меняется

Интервал между событиями — величина **инвариантная**

Показать самостоятельно!

Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Классическая механика

$m = const$

$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m_0}$

$\Delta\bar{p} = \bar{F}\Delta t$

$d\bar{p} = \bar{F}dt$

$v << c$

СТО

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

m_0 – масса покоя тела

$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{F}{m_0}$ – классическая механика

$\bar{F} = m_0\frac{d\bar{v}}{dt} \rightarrow \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$

m_0 вносим под знак производной

$\bar{p} = m_0\bar{v}$ – импульс тела

В СТО

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F}; \quad \bar{p} = m\bar{v}; \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\bar{p} = \frac{m_0\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Закон взаимосвязи массы и энергии

В СТО постулат $E = mc^2 = \dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

m_0 – масса покоя тела

$v \ll c$

$$E = m_0c^2 + \frac{m_0v^2}{2} + \ldots$$

m_0c^2 – энергия покоя тела

$\frac{m_0v^2}{2}$ – кинетическая энергия

$$E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 =$$

$$= m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

$v \ll c \qquad E_k = \frac{m_0v^2}{2}$

Полная энергия тела $E = \sqrt{m_0^2c^4 + p^2c^2}$

Связь между полной энергией тела и его импульсом

$\bar{p} = m\bar{v}$ – импульс тела