Механика

1.2 1. Классическая механика $v \ll c$, макротела: броуновские частицы – звезды
2. Специальная теория относительности (СТО) $v \sim c$ $v \neq c$ — " —
3.2 3. Квантовая механика $v \ll c$ микротела: атомы, молекулы, элементарные частицы
4. Релятивистская квантовая механика $v \sim c$ — " —

Классическая механика

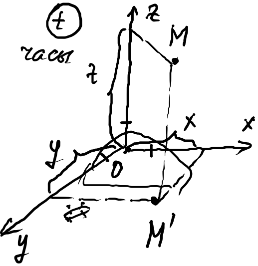
1. Кинематика +
2. Динамика +
3. Статика –

Кинематика

Материальная точка – это тела, размеры которого не влияют на характер движения или расстояние, проходимое телом значительно больше его размеров.

$S \gg d$

S – расстояние
d – размеры тела



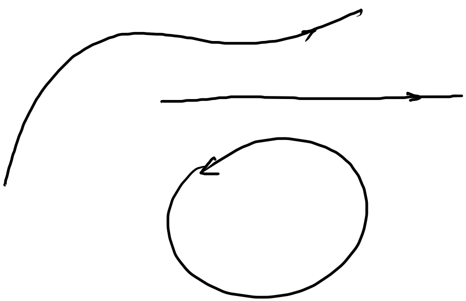
Система отсчета

1. Тело отсчета с точкой отсчета
2. Система координат, декартовая система координат
   Координаты тела: x, y, z
3. Часы, время: t

Траектория, путь, перемещение

Траектория (только для материальной точки (МТ) - геометрическое место точек (линия), через которые проходит МТ при своем движении

Непрерывная последовательность точек

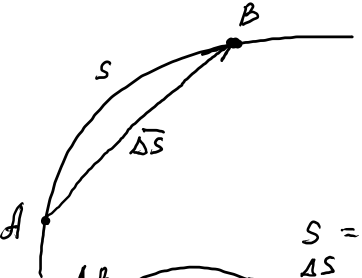


Путь (длина пути) - это расстояние, которое проходит тело (МТ) при своем движении за определенный промежуток времени, S.

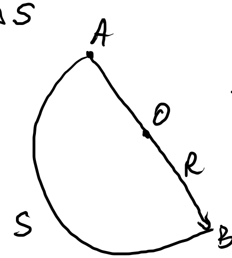
Путь - скалярная величина, физическа величина

Перемещение - это векторная физическая величина $\overline{\Delta S}$ $\overrightarrow{\Delta S}$ $\boldsymbol{\Delta S}$

Вектор характеризуется и величиной, и направлением



$S \geq \Delta S$

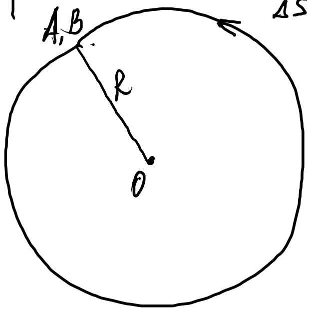


$S = \pi R$

$\Delta S = 2R$

$S = 2\pi R$

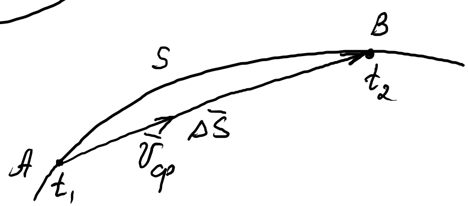
$\Delta S = 0$



Скорость, ускорение

Скорость - векторная физическая величина, которая характеризует быстроту перемещения тела в пространстве и во времени

т. A → т. B $\overline{\Delta S}$ - вектор перемещения

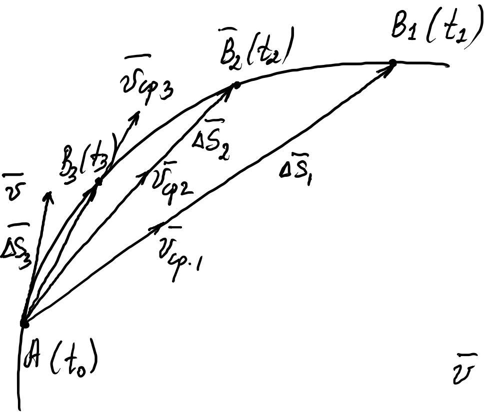


$\Delta t = t_2 - t_1$ - длительность перемещения

$\bar{v}_{ср} = \frac{\overline{\Delta S}}{\Delta t}$ - средняя скорость на участке AB

$\bar{v}_{ср} \uparrow\uparrow \overline{\Delta S}$; $\Delta t > 0$

Мгновенная скорость



$$\bar{v}_{ср1} = \frac{\Delta\bar{S}_1}{\Delta t_1} \qquad \Delta t_2 < \Delta t_1$$

$$\bar{v}_{ср2} = \frac{\Delta\bar{S}_2}{\Delta t_2} \qquad \Delta t_3 < \Delta t_2 < \Delta t_1$$

$$\bar{v}_{ср3} = \frac{\Delta\bar{S}_3}{\Delta t_3}$$

$$\vdots$$

$$\Delta t \to 0$$

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}_{ср}$$ – мгновенная скорость, векторная физическая величина

$\bar{v}$ направлен по касательной к траектории движения

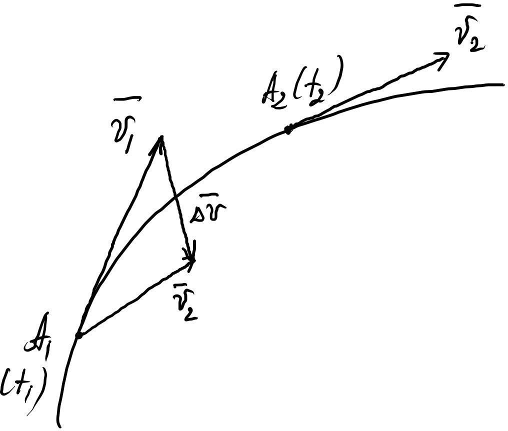
$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\bar{S}}{\Delta t} = \frac{d\bar{S}}{dt}$$ – производная первого порядка

$v = const$ – равномерное движение $\qquad \bar{v} = f(t)$

$\bar{v} = const$ – равномерное прямолинейное движение $\qquad S = \varphi(t)$

$$\Delta\bar{S} = \psi(t)$$

Ускорение — векторная физическая величина, которая характеризует быстроту изменения вектора во времени

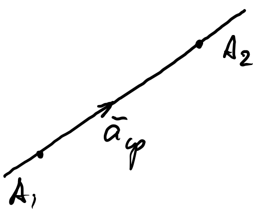


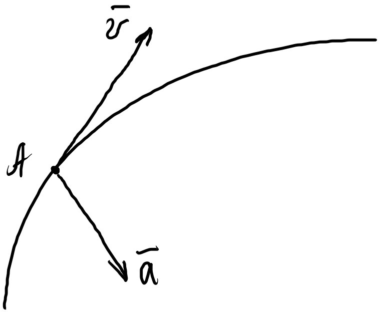
$\overline{\Delta v} = \bar v_2 - \bar v_1$ за $\Delta t = t_2 - t_1$

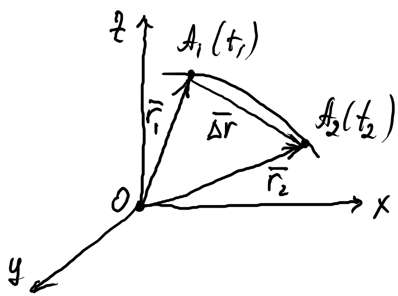
$\bar a_{ср} = \dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t}$ — среднее ускорение $\quad \bar a_{ср} \uparrow\uparrow \overline{\Delta v}$

$\bar a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overline{\Delta v}}{\Delta t} = \dfrac{d\bar v}{dt} = \dfrac{d^2 \bar s}{dt^2}$ — мгновенное ускорение

$\overline{\Delta s} \to \overline{\Delta r}$ $\qquad \dfrac{d^2 s}{d^2 t} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{ds}{dt}\right) = s'' = \ddot s$





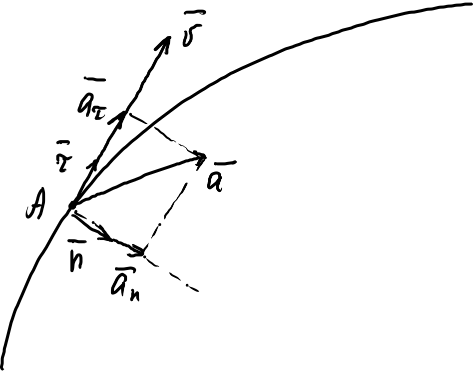


$\bar r \equiv (x, y, z)$

$\overline{\Delta r} = \bar r_2 - \bar r_1$

$$\bar v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar r}{\Delta t} = \frac{d\bar r}{dt} \qquad \bar a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar v}{\Delta t} = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d^2 \bar r}{d^2 t} = \frac{d^2 \bar r}{dt^2}$$

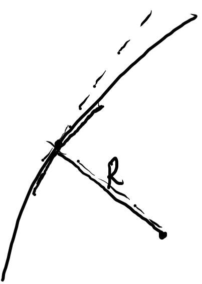
$$\bar n \perp \bar \tau \ ; \quad |\bar n| = |\bar \tau| = n = \tau = 1$$



$$\bar a = \bar a_n + \bar a_\tau = a_n \bar n + a_\tau \bar \tau$$

$\bar a_n$ – нормальное ускорение, показывает как быстро меняется скорость по направлению

$\bar a_\tau$ – касательное (тангенциальное) ускорение, показывает, как быстро меняется скорость по величине



$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \ ; \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

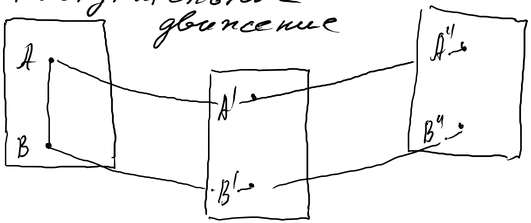
R – радиус кривизны траектории в данной точке

$$\bar a = \frac{v^2}{R} \bar n + \frac{dv}{dt} \bar \tau \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}$$

Твердое тело. Вращательное движение

Твердое тело – это тело, размеры и форма которого не меняются при его движении.

① Поступательное движение



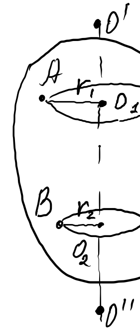
$AB \parallel A'B' \parallel A''B''$ Поступательное движение

Траектории всех точек тела одинаковые ($AA'A''$ и $BB'B''$)

Достаточно знать движение одной точки тела

Все остальные элементы тела двигаются также

② Вращательное движение

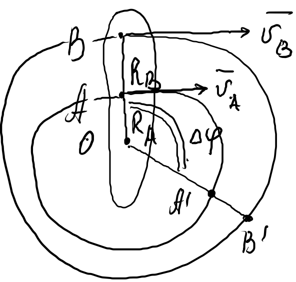


При вращательном движении тв. тела все элементы (матер. точка) двигаются по окружностям, центры окружностей находятся на одной линии – ось вращения, плоскости окружностей $\perp$ оси вращения

$O'O''$ – ось вращения

O' и O'' – точки закрепления оси вращения

Вращательное движение



$OA - R_A$

$OB - R_B$

$\Delta t = t_2 - t_1$

$\Delta\varphi$ – угол поворота

$\Delta S_A = \Delta\varphi \cdot R_A$

$\Delta S_B = \Delta\varphi \cdot R_B$

Угловая скорость

$\Delta S = \Delta\varphi \; R \; : \Delta t$

$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \cdot R$, $v_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ – ср. линейная скорость

$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega_{ср}$ – средняя угловая скорость

$v_{ср} = \omega_{ср} \cdot R$

$$\omega_{ср} = \frac{v_{ср}}{R}$$

$\Delta t \to 0$

$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \frac{1}{R} \lim v_{ср}$

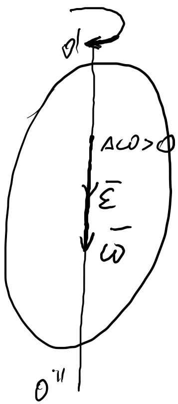
$$\omega = \frac{v}{R}$$

ω – мгновенная угловая скорость

$\omega = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$

$\bar{\omega}$ – вектор, направлен вдоль оси вращения, правило буравчика

Угловое ускорение



$t_1 \quad \omega_1 \quad \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\Delta t = t_2 - t_1$

$t_2 \quad \omega_2 \quad \varepsilon_{ср} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ – среднее угловое ускорение

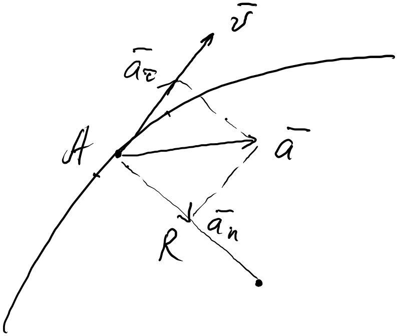
$\varepsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$

$\bar{\varepsilon}$ – вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения

$\Delta\omega > 0$; $\bar{\varepsilon} \uparrow\uparrow \bar{\omega}$

$\Delta\omega < 0$; $\bar{\varepsilon} \downarrow\uparrow \bar{\omega}$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{R}\right) = \frac{1}{R}\frac{dv}{dt}$$



$$\bar a = \bar a_n + \bar a_\tau$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$$

$$a = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$$

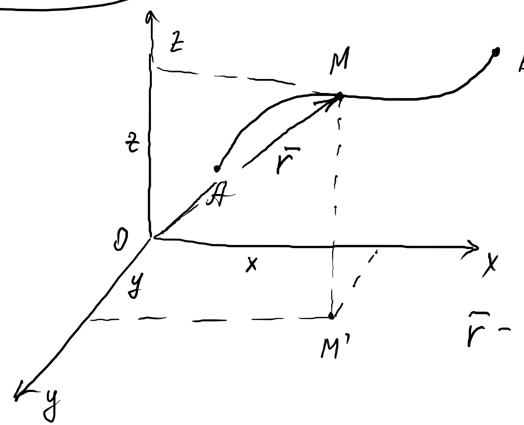
$$v = \omega R$$

$$\begin{cases} a_n = \omega^2 R \\ a_\tau = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\omega R) = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\varepsilon \end{cases}$$

(x, y, z)

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$\bar r = \bar r(t)$



$r_x = x$

$r_y = y$

$r_z = z$

$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\cdot\bar k$

Динамика (классическая)

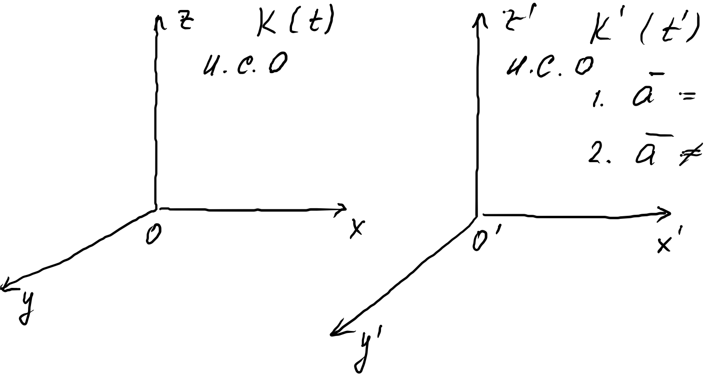
Изучает движение тел во взаимосвязи с причинами, вызывающих движение

Три закона Ньютона

I закон Ньютона определяет инерциальные системы отсчета

Система отсчета, относительно которой тело двигается равномерно и прямолиней ($\bar{a} = 0$) или покоится ($\bar{v} = 0$), если действие на данное тело других тел скомпенсировано или отсутствует, называется **инерциальной системой отсчета** – $1^{й}$ закон Ньютона

1. Инерциальные системы отсчета
2. Неинерциальные системы отсчета



1. $\bar{a} = 0$ – ускорение с.о. K' относительно с.о. K
K' – И.С.О
2. $\bar{a} \neq 0$ ——— " ——— ——— " ———
K' – НеИ.С.О

2-й закон Ньютона

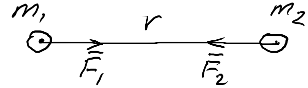
$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

В И.С.О. ускорение любого тела прямо пропорционально геометрической сумме сил, действующих на тело и обратно пропорционально массе тела.

<u>Сила</u> – векторная физическая величина, которая характеризует взаимодействие тел друг с другом.

Виды взаимодействия

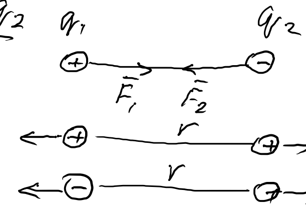
1. Гравитационное взаимодействие $F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$



2. Электромагнитное взаимодействие (закон Кулона, сила Ампера, сила Лоренца)

М.т. или сферы, шары

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q_1 q_2}{r^2}$$



3. Сильное (ядерное) взаимодействие (взаимодействие нуклонов в ядре) короткодействующее взаимодействие Силы притяжения

4. Слабое взаимодействие

<u>Масса тела</u> – инертная масса $\bar a = \frac{\bar F}{m_и}$ $\qquad m_и \equiv m_г$

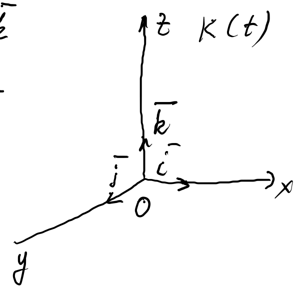
(скалярная масса) гравитационная масса $F = \gamma \frac{m_{1г} m_{2г}}{r^2}$

$$\bar a = \frac{d\bar v}{dt} = \frac{d^2\bar r}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\bar i + \frac{d^2y}{dt^2}\bar j + \frac{d^2z}{dt^2}\bar k$$

$$\bar F = \overline{\mathrm{grad}\,\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar k$$

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\bar i + \frac{d^2y}{dt^2}\bar j + \frac{d^2z}{dt^2}\bar k\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar i + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar j + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar k$$

$K(t)$



$\bar i \perp \bar j \perp \bar k$

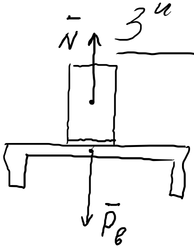
$|\bar i| = |\bar j| = |\bar k|$

$\bar F = const;\ m$

$\bar a \neq 0$

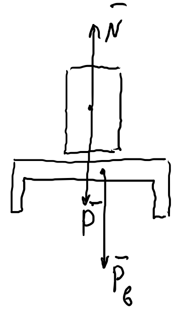
$$x = x_0 + v\Delta t + \frac{a\Delta t^2}{2}$$

$$v = v_0 + a\Delta t$$



3й закон Ньютона

$\bar P_в = -\bar N$

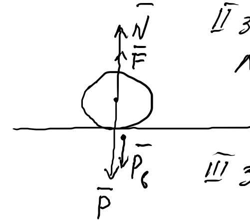


$\bar N = -\bar P_в$

$\bar a = 0 \quad \bar N + \bar P = 0$

$\bar N = -\bar P$

$\bar P_в = \bar P$



II з. Н.

$\bar N + \bar F + \bar P = 0$

$\bar N = -(\bar F + \bar P)$

III з. Н.

$N = -\bar P_в$

$\bar P_в = \bar P + \bar F$

$P_в = P - F$

2й закон Ньютона

$\bar a = \dfrac{\bar F}{m}$; $\quad m\bar a = \bar F = \sum_i \bar F_i$

$m\dfrac{d\bar v}{dt} = \bar F$

$m\,d\bar v = \underline{\bar F\,dt} \rightarrow$ импульс силы

$m = const$

$d(m \cdot \bar v) = F\,dt$

$d\bar p = \bar F\,dt$

$\dfrac{d\bar p}{dt} = \bar F$ 2й закон Ньютона

$\Delta \bar p = \bar F \Delta t$

$\Delta \bar p = \bar p_2 - \bar p_1$

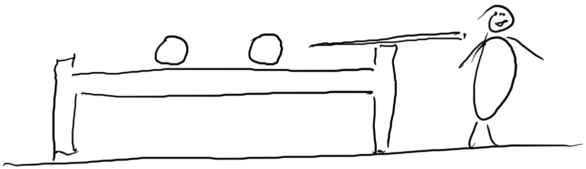
$\Delta t = t_2 - t_1$

$\Delta \bar p = \bar p_2 - \bar p_1 = \overline{F \Delta t}$

$\bar p_2 = \bar p_1 + \Delta \bar p = \bar p_1 + \bar F \Delta t$

Законы сохранения

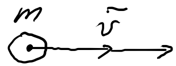
Система тел - некоторое кол-во взаимодействующих тел.



Закон сохранения импульса системы тел

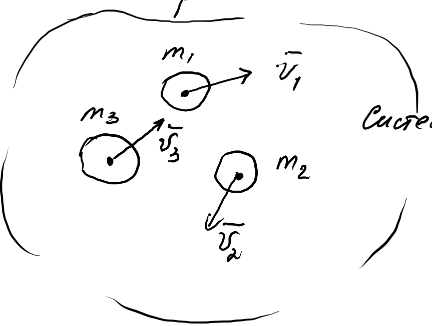
Импульс тела - физическая векторная величина, характеризует интенсивность движения тела

$\bar{p} = m\bar{v}$



$\bar{p} = m\bar{v}$

$\bar{p} \uparrow\uparrow \bar{v}$

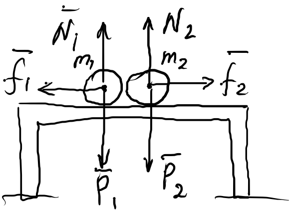


Система тел

$$\bar{P} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3 = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3$$

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{p}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{v}_i$$

$\bar{P}$ - импульс системы тел в данный момент времени



Система тел: m_1 и m_2

$\bar{f}_1$ и $\bar{f}_2$ – внутренние силы, силы взаимодействия между телами системы

$\bar{N}_1; \bar{N}_2; \bar{P}_1; \bar{P}_2$ – внешние силы, силы взаимодействия тел системы с внешними телами

$\bar{F}_1 = \bar{N}_1 + \bar{P}_1$

$\bar{F}_2 = \bar{N}_2 + \bar{P}_2$

$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$; $\Rightarrow m\bar{a} = \bar{F}$; $m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}$; $m = const$; $\frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \bar{F}$; $m\bar{v} = \bar{p}$

$y = f(x)$

$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ $\quad d\bar{p} = \bar{F}dt$ $\quad \bar{F}dt$ – импульс силы

2й закон Ньютона

$\Delta\bar{p} = \bar{F}\Delta t$ $\quad \Delta\bar{p} = \bar{p}_2 - \bar{p}_1$

Закон сохранения импульса системы тел

Пусть имеется система из N тел, взаимодействующих друг с другом!

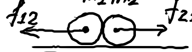
$\bar{f}_i$ – сила внутренняя, действующая на i-е тело $\quad i = (1 \dots N)$

$\bar{F}_i$ – сила внешняя, — " — — " —

$$\begin{cases} m_1 \quad \bar{v}_1 \quad \bar{p}_1 = m_1\bar{v}_1;\ \bar{f}_1 + \bar{F}_1 \\ m_2 \quad \bar{v}_2 \quad \bar{p}_2 = m_2\bar{v}_2;\ \bar{f}_2 + \bar{F}_2 \\ \dots\dots\dots \\ m_N \quad \bar{v}_N \quad \bar{p}_N = m_N\bar{v}_N;\ \bar{f}_N + \bar{F}_N \end{cases}$$

$\bar{P} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + \dots + m_N\bar{v}_N$ – Импульс системы тел

m_i и m_j $\quad \bar{f}_{ij} = -\bar{f}_{ji}$ 3-й закон Ньютона



$\bar{f}_{12} = -\bar{f}_{21}$

$$\bar{f}_i = \sum_{j=1}^{N} \bar{f}_{ij} \qquad f_i = \sum_{j=1}^{N} f_{ij}$$

$$\Downarrow$$

N уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}_1}{dt} = \bar{f}_1 + \bar{F}_1 \\ \frac{d\bar{p}_2}{dt} = \bar{f}_2 + \bar{F}_2 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{d\bar{p}_N}{dt} = \bar{f}_N + \bar{F}_N \end{cases}$$

Находим сумму

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} + \dots + \frac{d\bar{p}_N}{dt}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \bar{f}_i}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i \qquad \sum_{i=1}^{N} \frac{d\bar{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} \bar{f}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \bar{f}_{ij} = \underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} \bar{f}_{ij}}_{\bar{f}_{ij} = -\bar{f}_{ji}} = 0$$

$i \neq j$

$$\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$$

$$\sum \bar{p}_i = \bar{P}$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}\bar{p}_i = \sum_{i=1}^{N}\bar{F}_i = F$$

$$\frac{d\bar{P}}{dt} = \bar{F}$$

Пусть $\bar{F} = \sum_{i=1}^{N}\bar{F}_i = 0$

$\frac{d\bar{P}}{dt} = 0$; $\bar{P} = const$ $\sum_{i=1} m_i \bar{v}_i = const$

Если $\bar{F} = 0$, то система (механическая) замкнута, изолированная

Закон сохранения импульса системы тел

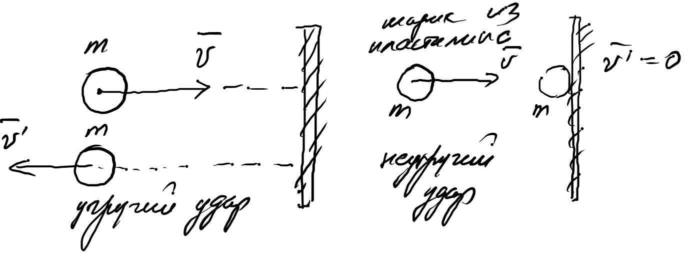
Если система тел является изолированной, то для такой системы её полный импульс со временем не меняется

Закон сохранения импульса системы тел – фундаментальный закон природы.

Закон сохранения импульса системы тел – следствие однородности пространства, физические законы и свойства системы тел не меняются при переносе системы отсчета.

Энергия, работа, мощность

$\bar{p}$ – импульс тела, $\bar{p} = m\bar{v}$ – мера интенсивности движения тел



Энергия – скалярная физическая величина, которая является мерой интенсивности движения любой формы.

Механическая энергия: кинетическая и потенциальная

Тепловая энергия, внутренняя энергия

Магнитная энергия

Электрическая энергия

Ядерное движение

Энергия может трансформироваться или переходить из одного вида в другой вид.

$\Delta\bar{p} = \bar{F}\Delta t$ Импульс силы - мера изменения импульса тела

$\bar{p}_2 = \bar{p}_1 + \bar{F}\Delta t$

W - механическая энергия (E, T, $П$, ...)

$W_к$ - кинетическая энергия

$W_п$ - потенциальная энергия

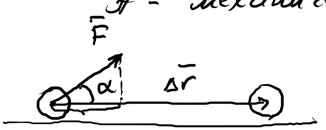
$W = W_к + W_п$ - полная механическая энергия

Энергия механическая меняется в результате взаимодействия тел

(Механическая) работа - скалярная физическая величина, являющаяся мерой изменения энергии (механической)

$\Delta W = W_2 - W_1 = A$ A - механическая работа

$W_2 = W_1 + A$



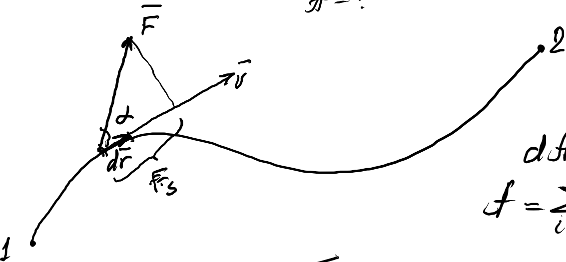
$F_r = F\cos\alpha$

$A = (\bar{F}\Delta\bar{r}) = F\Delta r\cos\alpha$; $\alpha = (\widehat{\bar{F}\Delta\bar{r}})$

$A = F_r\Delta r$; $F_r = F\cos\alpha$

Движение прямолинейное, а сила постоянная по величине и направлению.

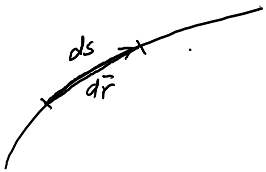
$A = ?$



Разбиваем траекторию движения мат. точки на бесконечно малые элементы

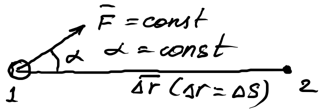
$$dA = \delta A = (\bar F d\bar r) = F\,dr\cos\alpha$$

$$A = \sum_i dA_i \Rightarrow A = \int_1^2 dA = \int_1^2 (\bar F d\bar r)$$

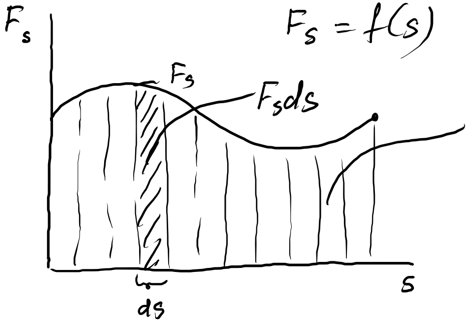


$dr \approx ds$

$$A = \int_1^2 (\bar F d\bar r) = \int_1^2 F\,dr\cos\alpha = \int_1^2 F\,ds\cos\alpha$$



$$A = \int_1^2 F\,dr\cos\alpha = F\cos\alpha \int_1^2 dr = F\Delta r\cos\alpha = $$
$$= F\Delta s\cos\alpha$$



$F_s = f(s)$

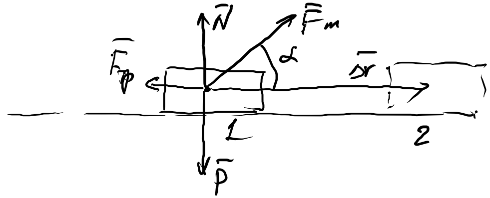
A равняется площади фигуры под кривой.

$A = \sum F_s ds$

$A > 0 \quad \alpha < \frac{\pi}{2};\ 90^\circ$

$A = 0 \quad \alpha = \frac{\pi}{2};\ 90^\circ$

$A < 0 \quad \alpha > \frac{\pi}{2};\ 90^\circ$



$A_{F_т} > 0$ $\quad 0° \le \alpha < 90°$

$A_N ; A_P = 0$ $\quad \alpha = 90° ; 270°$

$A_{F_{тр}} < 0$ $\quad 90° < \alpha \le 180°$

$$\bar F = \sum \bar F_i \quad ; \quad A = \sum A_i$$

$\underbrace{\Delta A ; A}_{\Delta t}$; $\underbrace{\delta A\ (dA)}_{dt}$ $\qquad$ Мощность $\quad N = \frac{\Delta A}{\Delta t} ; \frac{A}{\Delta t} ; \frac{\delta A}{dt} ; \frac{dA}{dt}$ $\qquad \delta A \ (dA)$

— " — $\quad P$

$\Delta W = A \qquad W_1 \to W_2$

$W_2 - W_1 = A$

Механическая энергия : Кинетическая и потенциальная энергия

Механическая энергия определяется состоянием системы, является функцией состояния системы

Состояние тела или системы тел определяется положением тел в пространстве и движением тел (скорости движения тел).

Кинетическая энергия – это энергия движущегося тела

Потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тел друг с другом, определяется их взаимным расположением

Кинетическая энергия

Тело m; $\bar F$ — действует сила

$\bar v$ — скорость тела

$\bar a = \frac{\bar F}{m}$ $\bar v$ — скорость меняется

dt — бесконечно малый промежуток времени

$\bar F = m\bar a$

За dt тело перемещается

$d\bar r$ — вектор перемещения

$\bar F = m\bar a \quad \times d\bar r$ скалярно

$$(\bar F \cdot d\bar r) = \left(m\frac{d\bar v}{dt} \cdot d\bar r\right)$$

$$(\bar F d\bar r) = m\left(d\bar v \cdot \frac{d\bar r}{dt}\right)$$

$$(\bar F d\bar r) = m(d\bar v \cdot \bar v)$$

$$(\bar F d\bar r) = \delta A = m(\bar v \cdot d\bar v)$$

$$\delta A = m d\left(\frac{v^2}{2}\right) = d\left(m\frac{v^2}{2}\right)$$

$$\delta A = dW_k = d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$$

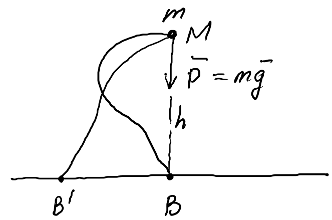
$$W_k = \frac{mv^2}{2} + const$$

$v = 0$; $W_k = 0$

$const = 0$

$$W_k = \frac{mv^2}{2}$$

Потенциальная энергия



Взаимодействие посредством силовых полей, сила тяжести $\bar P$, сила гравитационного поля

Сила P совершает работу

$A =$

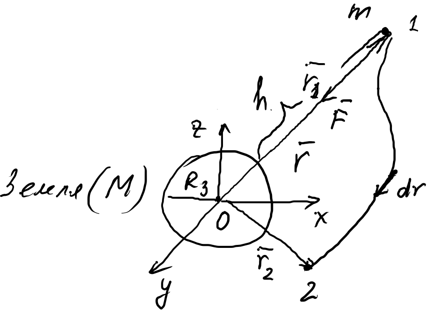
Работа силы тяжести определяется начальным и конечным положением точек: M и B (B')

$A = mgh$

Такие силовые поля — потенциальные поля

A силы называют консервативными силами

Диссипативные силы — сила трения, работа механическая зависит от вида траектории



Гравитационная сила

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}$$

$$F = \gamma \frac{mM}{(R_З + h)^2}$$

$h << R_З$

$P = mgh$

$r = R$

$$\delta A = (\bar F d\bar r) = \gamma \frac{mM}{r^2} dr \cdot \cos\alpha$$

$$A = \sum \delta A_i = \int_1^2 \delta A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM}{r^2} dr \cos\alpha$$

$$A = \gamma mM \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

Для консервативных сил:

$$\delta A = (F \cdot dr) = -dW_n \qquad W_n = f(x, y, z)$$

$$W_n = -\int (\bar F d\bar r) + const$$

$$A = -\Delta W_n = W_{n1} - W_{n2}$$

$$\bar F = F_x \bar i + F_y \cdot \bar j + F_z \cdot \bar k \qquad \bar i \perp \bar j \perp \bar k$$

$$|\bar i| = |\bar j| = |\bar k|$$

$$F_x = -\frac{\partial W_n}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial W_n}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial W_n}{\partial z}$$

$$\bar F = -\overline{grad\, W_n} = -\left(\frac{\partial W_n}{\partial x}\bar i + \frac{\partial W_n}{\partial y}\bar j + \frac{\partial W_n}{\partial z}\bar k\right)$$

$W_n = mgh$ — поле сил тяжести у поверхности Земли

$W_n = k\dfrac{\Delta x^2}{2}$ — сжатая или растянутая пружина

$\Delta x = 0$; $W_n = 0$

Полная механическая энергия системы тел $\underline{W = W_k + W_n}$

Закон сохранения механической энергии

Идея сохранения энергии — Ломоносов М. В. (1711 – 1765)

нем. Ю. Майер (1814 – 1878) } количественная формулировка.

нем. Г. Гельмгольц (1821 – 1894)

Пусть имеется система тел (система материальных точек)

m_i $\bar{v}_i$ $\bar{F}_i'$ — внутренние консервативная сила

$i = 1 \dots N$ $\bar{F}_i$ — внешние консервативная сила

$\bar{f}_i$ — внешняя неконсервативная (диссипативная) сила

$i = 1 \dots N$ $\qquad m_i \dfrac{d\bar{v}_i}{dt} = \left(\bar{F}_i' + \bar{F}_i + \bar{f}_i\right) : \times d\bar{r}_i$ – за промежуток времени dt $\quad d\bar{r}_i$ – вектор перемещения

скалярное произведение

Просуммируем по i $\quad m_i \dfrac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot d\bar{r}_i = \left(\bar{F}_i' + \bar{F}_i + \bar{f}_i\right) \cdot d\bar{r}_i$

$d = (\bar{a}\bar{b}) = \bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\alpha$

$\bar{c} = [\bar{a}\,\bar{b}] \qquad |[\bar{a}\bar{b}]| = ab\sin\alpha$

$$\sum_{i=1}^{N} \Bigg(\underbrace{m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \cdot d\bar{r}_i}_{dW_{ki}} - \underbrace{(\bar{F}_i' + \bar{F}_i)\, d\bar{r}_i}_{-dW_{ni} = \delta A_{ki}} \Bigg) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{(\bar{f}_i\, d\bar{r}_i)}_{d\bar{A}_i\ (\delta A_i)}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} dW_{ki}}_{dW_k} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} dW_{ni}}_{dW_n} = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i$$

δA_i

$$dW_k + dW_n = \delta A$$

$$d(W_k + W_n) = \delta A$$

состояние 1 $\longrightarrow$ состояние 2

$$\int_1^2 d(W_k + W_n) = \int_1^2 \delta A$$

$$\Delta(W_k + W_n) = A$$

Если $A = 0$, $\quad W = W_k + W_n = const$

$\Delta(W_k + W_n) = 0$,

$\Delta W = W_2 - W_1 \qquad W_1 = W_2$

Если система тел (механическая система) тел замкнутая или изолированная (в системе тел действуют только консервативные силы, внешние и внутренние),

полная механическая энергия такой системы тел со временем не меняется: $W = W_k + W_п = const$

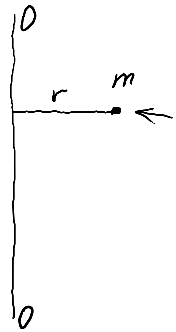
Закон сохранения энергии связан с однородностью времени, не зависит от выбора начала отсчета времени

Закон справедлив в любой системе: системе микротел (квантовая механика) и макротел.

Механика твердого тела (вращательное движение)

Момент инерции твёрдого тела – мера инертности тела по отношению к вращательному движению

М.и.т.т. – скалярная физическая величина

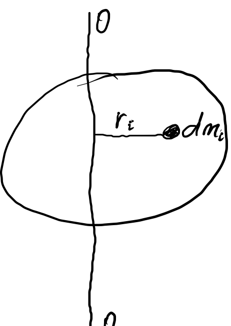


00 – ось вращения

матер. точка

m – масса м.т.

$J = mr^2$ – момент инерции матер. точки



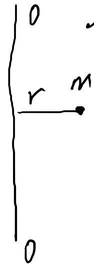
твердое тело; разбиваем тело на бесконечно малые элементы (матер. точки)

$$dJ_i = dm_i r_i^2$$

$$J = \sum_i dJ_i = \sum_i dm_i r_i^2 \Rightarrow J = \int_V dm\, r^2 = \int_V r^2 dm$$

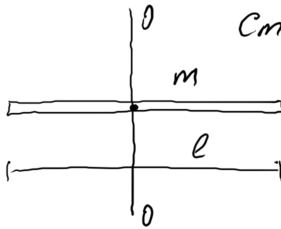
Тело однородное ρ – плотность тела $dm = \rho dV$

$$J = \int_V \rho r^2 dV = \rho \int_V r^2 dV$$



Матер. точка

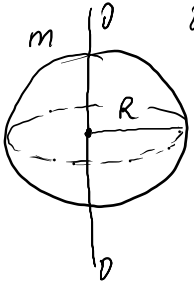
$J = mr^2$



Стержень

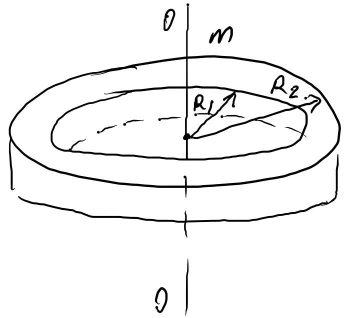
OO ⊥ стержню и проходит через его центр

$J = \frac{1}{12} ml^2$



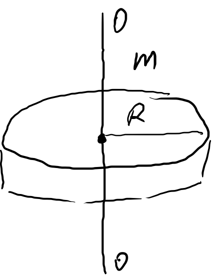
Шар

$J = \frac{2}{5} mR^2$



кольцо OO ⊥ плоскости кольца и проходит через центр

$J = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$

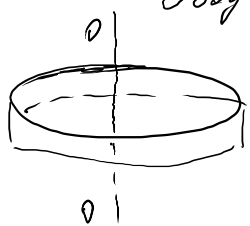


Диск

OO ⊥ плоскости диска, проходит через центр

$J = \frac{1}{2} mR^2$

Обод колеса

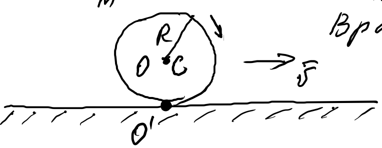


$R_1 \approx R_2 = R$

$J = mR^2$

Теорема Штейнера

Диск катется



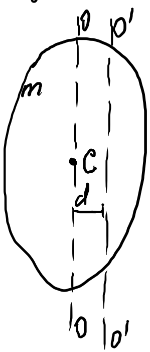
Вращательное движение вокруг оси O + поступательное движение слева направо

O' – мгновенная ось вращения

Вращательное движение вокруг оси O'

$J(\text{ось } O) = \frac{1}{2} mR^2$

$J'(\text{ось } O')$ – ?



C – центр масс тела

$J(\text{ось } O)$ – известен

O'O' – произвольная ось

OO ∥ O'O'

m – масса тела

d – расстояние между осями OO и O'O'

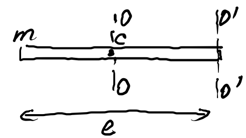
Теорема Штейнера

$J'(O'O') = J(OO) + md^2$

$\boxed{J' = J + md^2}$

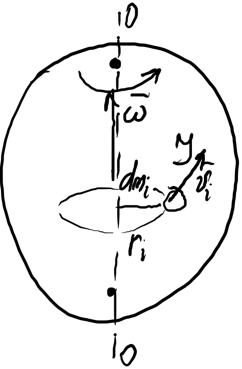
Диск катится

$J' = J + md^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$



$J(OO) = \frac{1}{12} ml^2$

$J'(O'O') = \frac{1}{12} ml^2 + m\frac{l^2}{4} = \frac{4ml^2}{12} = \frac{1}{3} ml^2$



Кинетическая энергия при вращательном движении

$W_к$ (поступательное движение) $= \dfrac{mv^2}{2}$ Тв. тело – однородное тело

$W_к$ (вращательное движение) $= \dfrac{J\omega^2}{2}$

Разбиваем тв. тело на бесконечно малые элементы (матер. точки)

$$dW_{кi} = \frac{1}{2} dm_i v_i^2 \qquad v_i = \omega r_i$$

$$W_к = \sum_i dW_{кi} = \sum_i \frac{1}{2} dm_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} dm_i \omega^2 r_i^2 =$$

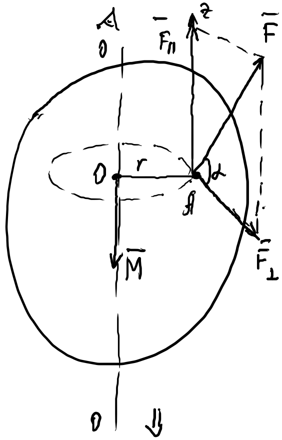
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i dm_i r_i^2 = \frac{1}{2} J\omega^2 \quad ; \quad J = \sum_i dm_i r_i^2$$

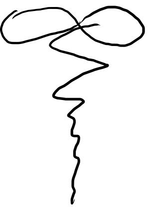
$m_i r_i^2$ – момент инерции i-го элемента

$$W_к = \frac{1}{2} J\omega^2$$

$$\sum_i dm_i r_i^2 = \sum_i \rho \cdot r_i^2 dV_i \Rightarrow \rho \int_V r^2 dV = J$$

$$dm_i = \rho dV_i$$





Момент силы

$\bar F_{\parallel} \parallel OO$ $\quad$ $\bar F = \bar F_{\parallel} + \bar F_{\perp}$

$\bar F_{\perp} \perp OO$

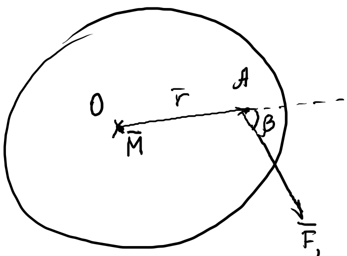
$F_{\parallel} = F \sin\alpha$ сила $F_{\parallel}$ не вызывает движение

$F_{\perp} = F\cos\alpha$

$\bar F_{\perp} \Rightarrow \bar F$ (сила в плоскости ⊥ оси вращения)

$\beta = (\bar r, \hat{\ } \bar F)$

Момент силы – векторная физическая величина

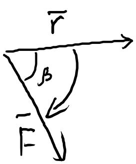


$\bar M = [\bar r\ \bar F]$

$M = rF\sin\beta$

$\bar M \perp (\bar r, \bar F)$

Правило буравчика применяем для определения направления вектора момента силы $\bar M$



Механическая работа при вращательном движении

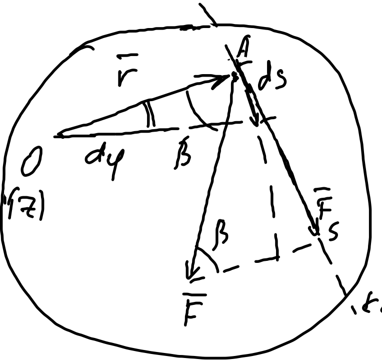
Поступательное движение $\delta A = dA = (\bar{F} d\bar{r}) = F_s ds$

Вращательное движение $\delta A = dA = M d\varphi$

Вывод:

Вид сверху

O – ось вращения; A – точка приложения силы $\bar{F}$. За время dt тело поворачивается на угол $d\varphi$ и перемещается на ds



касательная

$\bar{F}_s$ – компонента силы, проекция на направление движения

$F_s = F\cos\beta$

Работа силы совершается и тело поворачивается на угол $d\varphi$ за время dt

$ds = r d\varphi$

$dA(\delta A) = F_s ds = F\sin\beta\, r d\varphi = F\cdot d\varphi\, r\cdot\sin\beta$; $r\sin\beta = l$

l – плечо силы

$dA = F l d\varphi = M_z d\varphi$

M_z – момент силы F относительно оси вращения O(z)

$dA = M_z d\varphi$

Уравнение динамики при вращательном движении твердого тела

$\delta A = dW_k$ $\qquad$ $\delta A = M\,d\varphi$ $\qquad$ $M \Rightarrow M_{z\,(00)}$

$W_k = \dfrac{J\omega^2}{2}$ $\qquad$ $dW_k = \dfrac{2J\omega\,d\omega}{2} = J\omega\,d\omega$ $\qquad$ $d\varphi$ за время dt

$M\,d\varphi = J\omega\,d\omega \;:\, dt$

$\dfrac{M\,d\varphi}{dt} = J\omega\dfrac{d\omega}{dt}$ $\qquad$ $M\cancel{\omega} = J\cancel{\omega}\varepsilon$

$M = J\varepsilon$ $\qquad$ $\varepsilon = \dfrac{M}{J}$

$\bar{\varepsilon} = \dfrac{\bar{M}}{J}$ Закон динамики вращательного движения в векторной форме.

Момент импульса твердого тела

Поступательное движение

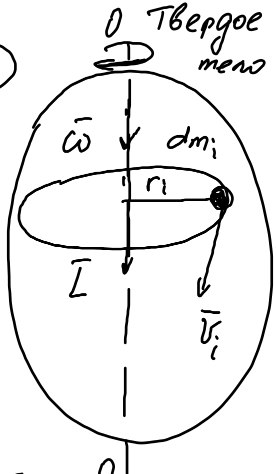
$\bar{p} = m\bar{v}$ — импульс тела

Вращательное движение

Момент импульса

$$\bar{L} = J\bar{\omega}$$

$$L = J\omega$$
$$\bar{L} = J\bar{\omega}$$



Вывод: Разбиваем тв. тело на бесконечно малые элементы; dm_i — масса i-го элемента;

$dm_i \bar{v}_i$ — импульс матер. точки, i-го элемента; $d\bar{p}_i = dm_i \bar{v}_i$

Момент импульса i-го элемента

$d\bar{L}_i = [\bar{r}_i dp_i]$; $dL_i = r_i dp_i \sin\alpha$

$\alpha = (\bar{r}_i; d\bar{p}_i)$

$\alpha = 90^\circ$

$dL_i = dm_i v_i r_i = dm_i \omega r_i \cdot r_i = dJ_i \omega$

$d\bar{L}_i$ — направлен вдоль оси вращения; $d\bar{L}_i \uparrow\uparrow \bar{\omega}$

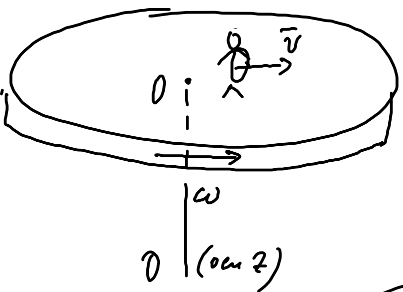
Суммарный момент импульса: $L = \sum dL_i = \sum dJ_i \omega = \omega \sum dJ_i = J\omega$;

dJ_i — момент инерции i-го элемента

J — момент инерции тела

Закон сохранения момента импульса

Рассмотрим систему тел, совершающих вращательное движение вокруг некоторой оси. Пример: платформа, на ней ходит человек, который движется; платформа вращается с угловой скоростью $\bar{\omega}$. $\bar{v}$ – скорость человека относительно оси вращения



Момент инерции системы тел $J = J_{пл} + J_ч$

Момент импульса системы $\bar{L} = \bar{L}_{пл} + \bar{L}_ч$

$\bar{L}_{пл} = J_{пл} \cdot \omega$; $\bar{L}_ч = J_ч \omega$

$\bar{L} = J\bar{\omega}$ продифференцируем по dt

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = J\frac{d\bar{\omega}}{dt} = J\varepsilon = M_z; \quad \frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{M}_z$$

Если $\bar{M}_z = 0$

$\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$ и

$\bar{L} = const$

Таким образом, если для внешних сил $\bar{M} = 0$, то $\frac{d\bar{L}}{dt} = 0$ и $\bar{L} = const$

Для замкнутой системы тел, имеющей ось вращения, $\bar{M}$ - момент внешних сил относительно оси вращения, $\bar{M} = 0$, система тел называется замкнутой. || Момент импульса замкнутой системы тел относительно оси вращения со временем не меняется.

Закон сохранения момента импульса системы тел связан с изотропностью пространства. Все законы физики инвариантны относительно выбора направления осей координат системы отсчета.