И. В. Митин, В. С. Русаков

АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ЭКПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Москва
Физический Факультет МГУ

УДК 53.088

И. В. Митин, В. С. Русаков. АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ: Учебно-методическое пособие для студентов младших курсов. — М.: Физический Факультет МГУ. — 44 с. ISBN 5-8279-0022-2

В учебно-методическом пособии изложены основные понятия и методы, используемые при обработке результатов экспериментальных исследований. Приведена классификация измерений и возникающих при измерениях погрешностей. Дана краткая сводка правил обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений. Уделено большое внимание наиболее часто используемому в практике обработки результатов совместных измерений методу наименьших квадратов. Формулируются основные требования к оформлению результатов измерений.

Данное пособие базируется на курсе лекций по обработке результатов измерений, читаемых авторами с 1994 года для студентов 1-го курса физического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Пособие предназначено в первую очередь для студентов младших курсов, работающих в общем физическом практикуме. Оно может быть полезно также для студентов старших курсов, дипломников, аспирантов и молодых научных работников, проводящих экспериментальные исследования в научных лабораториях.

Рекомендовано Методическим советом
кафедры общей физики физического факультета МГУ
в качестве учебно-методического пособия

Учебное издание

МИТИН Игорь Владимирович
РУСАКОВ Вячеслав Серафимович

АНАЛИЗ И ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ
Учебно-методическое пособие

ЛР №021293 от 18.06.98

Подписано в печать 14.06.2002. Формат 60x90/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Объцм 2,75 п.л.
Тираж 1000 экз. Зак. 1279

Физический факультет МГУ
119992 ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М. В. Ломоносова

Отпечатано в Типографии Издательства Московского университета

ISBN 5-8279-0022-2

Оглавление

I. ФИЗИЧЕСКАЯ ВЕЛИЧИНА И ЕЕ ИЗМЕРЕНИЕ

Физическая величина — это количественная характеристика явления, процесса или свойства материи (материальных объектов). Каждая физическая величина должна иметь определение, содержащее однозначный способ экспериментального нахождения или расчета данной физической величины в любой реальной ситуации.

Измерить физическую величину — это означает определить, сколько раз заключается в ней однородная с ней физическая величина, принятая в качестве единицы меры (единицы измерения, меры, единицы). Физические величины называют однородными, если они характеризуют одинаковые свойства материи и отличаются друг от друга только величиной. Единицы меры устанавливаются системой единиц измерения.

В результате измерения физической величины получается **значение физической величины** — именованное число, состоящее из числа и наименования той меры (единицы), которой была измерена физическая величина. Измерение — это, по существу, последовательность экспериментальных и вычислительных операций, осуществляемая с целью нахождения значения физической величины.

II. КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ

Проведем классификацию измерений физической величины по характеру и последовательности осуществляемых при этом операций.

Прямое измерение. Измерение называется прямым, если значение физической величины определяется либо непосредственным сравнением с мерой, либо при помощи измерительного прибора, дающего сразу значение этой величины. Такая физическая величина называется прямо измеряемой.

Косвенное измерение. Измерение называется косвенным, если искомое значение физической величины определяется путем расчета по известной зависимости измеряемой величины от прямо измеряемых величин, определяемых при неизменных условиях опыта. Такая физическая величина называется косвенно измеряемой.

Косвенно измеряемая физическая величина и связана с прямо измеряемыми величинами x, y, $\ldots$, z с помощью расчетной формулы (**уравнения косвенных измерений**)

$$u = f(x, y, ...z).$$

Получение расчетной формулы обычно связано с использованием законов физики и модельных представлений.

Совместные измерения. В общем случае функциональная связь между прямо измеряемыми величинами x, y, …, z и величинами u, v, …, w, значения которых требуется определить, может иметь произвольный вид, задаваемый уравнением

$$f(x, y, \dots, z; u, v, \dots, w) = Q.$$

В этом случае для нахождения значений неизвестных величин u, v, …, w обычно проводятся многократные измерения прямо измеряемых величин x, y, …, z, причем эти измерения осуществляют при изменяющихся условиях опыта. Иными словами, значения одной или нескольких прямо измеряемых величин целенаправленно изменяют от опыта к опыту, проводя, таким образом, серию из n измерений $(x_1, y_1, \dots, z_1)$, $(x_2, y_2, \dots, z_2)$, …, $(x_n, y_n, \dots, z_n)$. Такие измерения принято называть **совместными измерениями**.

Для случая двух прямо измеряемых величин x и y функциональную взаимосвязь (**уравнение совместных измерений**) часто можно представить в виде

$$y = f(x; u, v, \dots, w),$$

где u, v, …, w — искомые величины, выступающие в качестве параметров. Обычно результаты совместных измерений для наглядности и контроля правильности обработки и интерпретации изображают в виде графика зависимости величин x и y друг от друга. Экспериментальная точка на графике изображает результат i-го совместного измерения (x_i, y_i). Отметим, что каждое измерение (x_i, y_i) не обязательно должно быть результатом одного прямого измерения: оно может быть как результатом обработки серии прямых измерений, так и результатом косвенных измерений.

Число совместных измерений (опытов) n в серии должно быть больше или равно числу определяемых величин m. Величина $r = n - m$ называется числом степеней свободы при совместных измерениях.

Как видим, одна и та же физическая величина может быть прямо или косвенно измеряемой или определяться в результате обработки результатов совместных измерений.

Пример (с продолжением)

Три студента (Иванов, Петров и Сидоров) получили задание: с помощью секундомера определить период колебаний маятника. Иванов решил провести прямое измерение: непосредственно измерить время одного полного колебания. Петров решил измерить время t, за которое маятник совершает N колебаний и рассчитать период по формуле $T = t/N$. Данная формула является уравнением косвенных измерений, следовательно, Петров проводит косвенные измерения. Сидоров решил последовательно измерить времена t_1, t_2, ..., t_n за которое маятник совершает N_1, N_2, ..., N_n колебаний. Таким образом, Сидоров целенаправленно изменяет значения одной из прямо измеряемых величин (в данном случае — числа колебаний N), проводя серию совместных измерений (N_1, t_1), (N_2, t_2), ..., (N_n, t_n), при этом уравнение совместных измерений имеет вид $t = f(N; T) = T \cdot N$.

III. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Наличие в общем случае большого числа неконтролируемых исследователем факторов приводит к тому, что в результате измерения физической величины возникают ошибки (погрешности). Иными словами, важнейшей особенностью любых измерений является несовпадение результата измерений и истинного значения измеряемой величины. Целью любой математической обработки результатов измерений является получение оценки истинного значения измеряемой величины с минимально возможной погрешностью.

Абсолютная погрешность (абсолютная ошибка) измерения Δx: — отклонение результата измерения x от истинного значения $x_{\text{ист}}$ измеряемой величины:

$$\Delta x = x - x_{\text{ист}}.$$

Относительная погрешность (относительная ошибка) измерения — отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_{\text{ист}}}.$$

Как правило, истинное значение измеряемой физической величины мы **не знаем и никогда не узнаем**, а значит и погрешность измерения мы не знаем и никогда не узнаем. Однако погрешность измерения можно охарактеризовать и **оценить**.

1. Классификация погрешностей измерения по характеру проявления

Случайная погрешность — это составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом в данной серии измерений, проведенных при одних и тех же контролируемых условиях. Случайная погрешность возникает как результат совместного влияния различных случайных, меняющихся от измерения к измерению, не контролируемых нами факторов, влияющих на процесс измерения. Случайная погрешность оценивается по результатам многократных измерений, проводимых при неизменных условиях, методами математической статистики. Влияние случайной погрешности на оценку истинного значения измеряемой величины можно уменьшить многократным повторением измерения.

Систематическая погрешность — это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или изменяющаяся закономерно на протяжении серии измерений при одних и тех же контролируемых условиях. Систематическая погрешность обусловлена главным образом погрешностями средств измерений и несовершенством методов измерений (в том числе используемых моделей). Неизбежное абстрагирование (выбор модели процесса, явления или изучаемой системы) в процессе измерения является одним из факторов возникновения систематической погрешности. Таким образом, эта погрешность всегда существует при любом измерении.

2. Классификация систематических погрешностей по причине возникновения

Погрешность прибора (инструментальная погрешность, погрешность средств измерений) — погрешность, обусловленная принципиальным несовершенством технических средств, используемых при измерении. Причина возникновения — несовершенство реальных материалов, невозможность устранения вредных помех, технологическое и физическое (из-за вынужденного использования приближений при выборе принципа работы прибора) несовершенство прибора.

Примеры:

а) неточная установка прибора на нуль перед измерением;

б) секундомер, используемый при измерениях, отстает или спешит.

Погрешность округления — систематическая погрешность, обусловленная считыванием результата с конечным числом значащих цифр на цифровых приборах и округлением по шкале стрелочных приборов.

Нередко погрешность округления относят к случайным погрешностям, объясняя это тем, что при многократных измерениях результат можно округлить как в большую, так и в меньшую сторону. Однако, если бы при проведении измерений случайные погрешности отсутствовали, прибор всегда показывал бы одно и то же значение, и результат округлялся бы всегда также до одного и того же значения.

Погрешность метода — погрешность, вызванная несовершенством применяемого при измерении метода. Причина — метод, положенный в основу любого процесса измерения, лишь с какой-то степенью точности правильно отображает истинное положение вещей. Любой метод зиждется на принципиально необходимом абстрагировании реальной ситуации, т.е. на введении в рассмотрение моделей.

Пример. В используемой математической модели эксперимента не учитывается наличие сил трения и сопротивления воздуха, упругих свойств тел и др.

Субъективная погрешность — систематическая погрешность, связанная с участием человека в процессе измерений, что приводит к искажению получаемого результата. Отметим, что субъективная погрешность содержит и случайную составляющую, которую можно оценить по результатам многократных измерений. К систематической составляющей субъективной погрешности можно отнести, например, наличие временной задержки при фиксации человеком длительности временного интервала с помощью секундомера.

Погрешность вычислений — погрешность, связанная с представлением чисел в процессе вычислений конечным числом значащих цифр. В связи с применением современных вычислительных средств этой ошибкой по сравнению с другими систематическими погрешностями, как правило, можно пренебречь.

Грубые ошибки (промахи) — ошибки, обусловленные неисправностью средств измерений, неправильным считыванием результата, резкими не учтенными изменениями условий измерений, результатом просчета. Такие ошибки исправляют при более тщательном повторении опытов или расчетов.

Увеличением числа измерений нельзя исключить систематическую погрешность. Систематическую погрешность уменьшают введением поправок (обычно в виде дополнительных слагаемых или множителей) после изучения источников погрешностей и их выявления. Наиболее действенный способ обнаружения систематических погрешностей, связанных с методом измерения, — это сравнение результатов измерения одной и той же величины, полученных принципиально разными методами. Полностью исключить систематическую погрешность нельзя, так как, с одной стороны, сами эталонные приборы обладают погрешностью, а с другой, любой принцип, заложенный при конструировании прибора, не является абсолютно строгим.

IV. КРАТКАЯ СВОДКА ПРАВИЛ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ И КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

1. Прямые измерения

Пусть в результате **серии прямых независимых измерений** физической величины x, проведенных **при одних и тех же усло-**

виях, получили некоторый набор (выборку) из п значений: x_1, x_2, ..., x_n. За оценку $\hat{x}$ истинного значения измеряемой величины x принимается **выборочное среднее значение** $\bar{x}$ (среднее арифметическое по данной выборке):

$$\hat{x} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{1}$$

Для оценки погрешности среднего арифметического x рассмотрим отдельно случайную и систематическую составляющие.

Случайные погрешности

В качестве оценки случайной погрешности среднего значения x принимается **выборочное стандартное отклонение среднего арифметического** (среднеквадратичная погрешность среднего арифметического):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}. \tag{2}$$

Далее вычисляется доверительный интервал $\Delta_{\text{сл}}$ для случайной погрешности среднего арифметического значения $\bar{x}$:

$$\Delta_{\text{сл}} = t_{\alpha,n-1} \cdot S_{\bar{x}}, \tag{3}$$

где $t_{\alpha,n-1}$ — **коэффициент Стьюдента** для выбранного исследователем значения вероятности α — **коэффициента доверия**. Значения коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n-1}$ при различных коэффициентах доверия α и объема выборки n см. табл. 1 Приложения. Смысл доверительного интервала $\Delta_{\text{сл}}$ заключается в следующем: можно утверждать, что истинное значение физической величины х лежит в интервале $[\bar{x} - \Delta_{\text{сл}}, \bar{x} + \Delta_{\text{сл}}]$ с заданной вероятностью α. Чем больше коэффициент доверия α, тем больше значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n-1}$, а, следовательно, и доверительного интервала $\Delta_{\text{сл}}$.

Отметим, что коэффициент а выбирается самостоятельно и может принимать любые значения от нуля до единицы, но обычно принято выбирать $\alpha \sim 0{,}9 - 0{,}95$.

Вычисление доверительного интервала $\Delta_{\text{сл}}$ следует проводить только в случае, когда конечной целью проведения измерений является оценивание прямо измеряемой величины. Если же прямые измерения проводятся лишь с целью дальнейшего использования результатов измерений для оценивания какой-либо косвенно измеряемой величины, то и доверительный интервал надо будет вычислять только для этой косвенно измеряемой величины (см. п.IV.2).

Дадим некоторое пояснение к формуле (2). Запишем ее в виде:

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{n}}S_x. \tag{4}$$

где $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i\bar{x})^2}$ — выборочное стандартное отклонение для результата **отдельного** измерения. В математической статистике показывается, что с увеличением числа измерений (или, как принято говорить, **объема выборки** n) S_x стремится к константе, называемой стандартным отклонением, или среднеквадратичной погрешностью измерения, и обычно обозначаемой σ. Величина S_x является оценкой σ, полученной по выборке объема n, поэтому в название величины S_x вводится термин «выборочное». Квадрат стандартного отклонения называют дисперсией и обозначают σ^2. В свою очередь, можно показать, что выборочное стандартное отклонение среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ в $\sqrt{n}$ раз меньше выборочного стандартного отклонения S_x, в итоге появляется формула (2). Таким образом, случайная погрешность оценки $\bar{x}$ истинного значения стремится к нулю по мере увеличения числа измерений, и ее можно сделать сколь угодно малой.

Пример (продолжение). Иванов провел серию из $n = 5$ прямых измерений периода колебаний и получил следующие результаты:

$$t_i = 4{,}6; 4{,}8; 4{,}5; 4{,}8; 4{,}4 \text{ (с)}.$$

Далее он по формуле (1) вычислил среднее арифметическое $\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \frac{23{,}1}{4} = 4{,}62$ (с), а по формуле (2) — выборочное стандартное отклонение $S_{\bar{t}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} \approx 0{,}08$ с.

Если бы целью Иванова было бы получение оценки периода с учетом только случайной погрешности, то он далее проделал бы следующие вычисления: выбрал значение коэффициента доверия $\alpha = 0{,}95$, по табл.1 для $n = 5$ нашел значение коэффициента Стьюдента $t_{\alpha;n-1} = t_{0{,}95;4} = 2{,}78$ и определил по формуле (3) доверительный интервал $\Delta_{\text{сл}} = t_{\alpha;n-1} \cdot S_{\bar{t}} = 2{,}78 \cdot 0{,}08 = 0{,}224$ (с).

Окончательно студент Иванов представил бы следующий результат (без учета систематической погрешности): $t = 4{,}62 \pm 0{,}22$ с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$ (правила округления результата см. в разд. VI).

Систематические погрешности

Систематические погрешности, остающиеся постоянными или закономерно меняющиеся при повторных измерениях, для экспериментатора выступают как своеобразные «случайные» величины, но не по характеру проявления, а в силу их неизвестности. Следовательно, систематические погрешности, также как и случайные, удобно оценивать с помощью стандартных отклонений.

Погрешность прибора. Погрешность прибора характеризуется **предельной** (максимально допустимой для данного класса приборов) **погрешностью** $\Delta_{\text{пред}}$. Если значение $\Delta_{\text{пред}}$ известно, то значение **стандартного отклонения** $\sigma_{\text{приб}}$ для оценивания погрешности прибора приближенно равно

$$\sigma_{\text{приб}} \approx \frac{\Delta_{\text{пред}}}{3}. \tag{5}$$

Для определения предельной погрешности прибора необходимо знать **класс точности прибора** γ (выраженный в процентах) — обобщенную метрологическую характеристику, определяющую гарантированные границы значений погрешности прибора. Значение предельной погрешности прибора устанавливается четырьмя различными способами в зависимости от характера погрешности.

1. При **мультипликативном** характере погрешности прибора, когда абсолютная погрешность возрастает пропорционально значению измеряемой величины,

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{\gamma_{\text{м}}}{100} \cdot x, \tag{6}$$

где $\gamma_{\text{м}}$ — класс точности прибора; x — результат измерения.

2. При **аддитивном** характере погрешности прибора, когда абсолютная погрешность во всем диапазоне измерений ограничена постоянным пределом,

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{\gamma_{\text{адд}}}{100} \cdot x_n, \tag{7}$$

где $\gamma_{\text{адд}}$ — класс точности прибора; x_n — нормирующее значение измеряемой величины, которое для приборов с равномерной и степенной шкалой равно либо верхнему пределу диапазона измерений, если нулевая отметка находится на краю или вне шкалы, либо протяженности диапазона измерений, если нулевая отметка находится посередине шкалы.

3. При **комбинированном** характере погрешности прибора (одновременно и мультипликативном, и аддитивном)

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{\gamma_{\text{к}} - \gamma_{\text{н}}}{100} \cdot x + \frac{\gamma_{\text{н}}}{100} \cdot x_n, \tag{8}$$

где $\gamma_{\text{к}}$ и $\gamma_{\text{н}}$ — класс точности прибора для конца и начала диапазона измерений, соответственно; x — результат измерения; x_n — верхний предел диапазона. Таким образом, предельная погрешность прибора линейно возрастает от $\Delta_{\text{пред}} = \dfrac{\gamma_{\text{н}}}{100} \cdot x_n$ в начале диапазона (при $x = 0$) до $\Delta_{\text{пред}} = \dfrac{\gamma_{\text{к}}}{100} \cdot x_n$ в конце диапазона (при $x = x_n$).

4. Для приборов с резко неравномерной шкалой

$$\Delta_{\text{пред}} = k(x) \cdot \frac{\gamma}{100} \cdot L, \tag{9}$$

где L — длина шкалы, выраженная в миллиметрах, $k(x)$ — коэффициент пересчета, равный отношению цены деления в месте значения величины x к длине этого деления (в мм).

Класс точности прибора указывается обычно на его лицевой панели. В случае мультипликативного характера погрешности прибора значение класса точности $\gamma_{\text{м}}$ обводится кружком. В случае аддитивного характера погрешности прибора класс точности $\gamma_{\text{адд}}$ указывается без каких-либо дополнительных линий (таких приборов большинство). В случае комбинированного характера погрешности прибора класс точности указывается в виде дроби $\gamma_{\text{к}}/\gamma_{\text{н}}$. В случае приборов с резко неравномерной шкалой класс точности прибора γ указывается на шкале в виде числа, подчеркнутого уголком.

Примеры

1. На лицевой панели амперметра нанесено 2,5, обведенное кружком, — погрешность мультипликативная. Если при измерении тока получено значение 75 мА, то предельная погрешность вычисляется по формуле (6):

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{2{,}5}{100} \cdot 75\ \text{мА} = 1{,}875\ \text{мА},$$

а значение стандартного отклонения для прибора — по формуле (5):

$$\sigma_{\text{приб}} \approx \frac{1{,}875}{3}\ \text{мА} = 0{,}625\ \text{мА}.$$

2. На лицевой панели вольтметра указано 2,0/2,5 — погрешность комбинированная. Если при измерении напряжения на шкале 0–100 В

получено значение 67 В, то по формуле (8) предельная погрешность

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{2{,}5 - 2{,}0}{100} \cdot 67\text{ В} + \frac{2{,}0}{100} \cdot 100\text{ В} = 2{,}335\text{ В и } \sigma_{\text{приб}} \approx \frac{2{,}335}{3}\text{ В} \approx 0{,}778\text{ В.}$$

3. На лицевой панели омметра указано 1,0, подчеркнутое уголком, — шкала прибора неравномерная. Если при измерении сопротивления стрелка прибора остановилась между делениями 100 и 200 Ом (длина всей шкалы, измеренная линейкой — 80 мм, расстояние между указанными делениями — 2 мм), то предельная погрешность (9) равна

$$\Delta_{\text{пред}} = \frac{(200 - 100)\text{Ом}}{2\text{ мм}} \cdot \frac{1{,}0}{100} \cdot 80\text{ мм} = 40\text{ мм и } \sigma_{\text{приб}} \approx \frac{40\text{ Ом}}{3} \approx 13{,}33\text{ Ом.}$$

В последнее время широкое применение находят электронные **цифровые** многодиапазонные приборы, погрешность которых обычно является комбинированной и зависит от выбранного диапазона измерений. Поэтому для них не принято указывать единое значение класса точности, а правило расчета погрешностей приводится в техническом паспорте. Цифровые приборы обладают высокой точностью, поэтому в условиях учебной лаборатории (если данные из паспорта не приведены в описании к установке) для оценки предельной погрешности предлагается пользоваться эмпирической формулой для комбинированной погрешности, в которой $\gamma_{\text{н}} = 0{,}1$ и $\gamma_{\text{к}} = 0{,}2$, т.е.

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001x + 0,001x_n, \tag{10}$$

или формулой

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001x + 1\text{ мл. ед.}, \tag{11}$$

где x — результат измерения; x_n — значение верхнего предела диапазона измерений, 1 мл. ед. — значение младшего разряда прибора. Здесь значения коэффициентов $\gamma_{\text{н}}$ и $\gamma_{\text{к}}$ выбраны как результат обобщения данных из паспортов приборов, обычно используемых в учебных лабораториях. Из формул (10) и (11) следует выбирать ту, которая дает большее значение погрешности.

Для электронных таймеров (измерителей временных интервалов) не существует верхнего предела диапазона измерений, и для расчета погрешности (при отсутствии паспортных данных) предлагается использовать формулу:

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,0001x + 1\text{ мл. ед.}, \tag{12}$$

где 1 мл. ед. — значение младшего разряда таймера; x — результат измерения.

Аналогичную формулу можно использовать и для ручных секундомеров:

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001x + \omega, \tag{13}$$

где ω — цена наименьшего деления секундомера; x — результат измерения.

Примеры

1. При измерении напряжения на цифровом приборе получено значение 33,53 В на шкале 60 В, тогда предельная погрешность, определяемая по формуле (10), дает:

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001 \cdot 33{,}53 \text{ В} + 0,001 \cdot 60 \text{ В} \approx 0{,}09353 \text{ В},$$

а по формуле (11):

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001 \cdot 33{,}53 \text{ В} + 0,01 \text{ В} \approx 0{,}04353 \text{ В}.$$

В итоге имеем:

$$\sigma_{\text{приб}} \approx \frac{0{,}09353}{3} \text{ В}.$$

2. При измерении временного интервала на цифровой панели прибора получено значение 32,753 с, тогда предельная погрешность определяется по формуле (12):

$$\Delta_{\text{пред}} = 0{,}0001 \cdot 32{,}753\text{с} + 0{,}001\text{с} \approx 0{,}00429\text{с и } \sigma_{\text{приб}} \approx \frac{0{,}00429}{3}\text{с} \approx 0{,}00143\,\text{с}.$$

3. При измерении временного интервала с помощью секундомера (цена деления $\omega = 0{,}1$ с) получено значение 32,8 с, тогда предельная погрешность (13)

$$\Delta_{\text{пред}} = 0,001 \cdot 32{,}8 \text{ с} + 0{,}1 \text{ с} = 0{,}1328 \text{ с и } \sigma_{\text{приб}} \approx \frac{0{,}1328}{3} \text{ с} \approx 0{,}0443 \text{ с}.$$

Для **механических приборов** (линейка, штангенциркуль, микрометр, динамометр и т.п.), к которым нет паспорта, можно считать, что

$$\Delta_{\text{пред}} \approx \omega, \tag{14}$$

где ω — цена наименьшего деления прибора (с учетом нониуса).

В некоторых из механических приборов (штангенциркуль, микрометр) используется нониус — специальное устройство в виде дополнительной подвижной шкалы с делениями, размер которых меньше размера наименьшего деления основной шкалы, что позволяет повысить точность отсчета.

Цена наименьшего деления (точность) нониуса $\Delta\omega$ равна разности цены наименьшего деления основной шкалы и цены деления шкалы нониуса. Для определения точности нониуса необходимо совместить начальный (нулевой) штрих нониуса с каким-либо штрихом основной шкалы (будем его также называть нулевым). При этом k-й штрих на шкале нониуса совпадет с $(k-1)$-м штрихом на основной шкале. Тогда точность нониуса $\Delta\omega$ определяется в зависимости от цены деления основной шкалы ω по формуле

$$\Delta\omega = \frac{\omega}{k}.$$

Обычно для штангенциркуля цена наименьшего деления основной шкалы со составляет 1 мм, а цена деления шкалы нониуса — 0,9 мм, в этом случае 10-й штрих нониуса совпадет с 9-м штрихом основной шкалы, т.е. точность нониуса $\Delta\omega$ равна 0,1 мм.

Отсчет по шкале, снабженной нониусом, осуществляется следующим образом. Если начальный штрих нониуса точно совпадает с каким-либо штрихом основной шкалы, то измеряемое значение соответствует этому значению на основной шкале. Если начальный штрих нониуса попадает между двумя штрихами основной шкалы, то надо сначала определить, какой из штрихов нониуса совпадает с одним из штрихов основной шкалы (например, пусть совпадает m-й штрих нониуса). Тогда измеряемое значение будет равно отсчету, соответствующему меньшему из двух штрихов на основной шкале, сложенному с произведением $\Delta\omega \cdot m$.

Пример. При измерении диаметра шара с помощью штангенциркуля, для которого $\Delta\omega = 0{,}1$ мм, нулевое деление нониуса оказалось между делениями 12 и 13 мм на основной шкале, а 6-й штрих нониуса совпал с одним из делений основной шкалы. Тогда искомый диаметр будет равен 12 мм $+ \Delta\omega \cdot 6 = 12{,}6$ мм, а предельная погрешность $\Delta_{\text{пред}} \approx \Delta\omega = 0{,}1$.

Погрешность округления. Значение стандартного отклонения для оценивания погрешности округления вычисляется по формуле

$$\omega_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}}, \tag{15}$$

где ω — цена деления прибора с учетом нониуса.

Субъективная погрешность. При измерении интервалов времени с использованием ручного секундомера субъективная погрешность учитывается введением оценки стандартного отклонения

$$\sigma_{\text{суб}} = 0{,}3 \text{ с}, \tag{16}$$

Погрешность метода. Систематическая погрешность метода может быть учтена в результате тщательного анализа модельных представлений, положенных в основу процесса измерений, в виде оценки стандартного отклонения $\sigma_{\text{мет}}$.

Суммарная систематическая погрешность $\sigma_{\text{сист}}$ в предположении о независимости возникновения ее составляющих может быть найдена по формуле

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{пр}} + \sigma^2_{\text{окр}} + \sigma^2_{\text{суб}} + \sigma^2_{\text{мет}}}. \tag{17}$$

Доверительный интервал для систематической погрешности равен

$$\Delta_{\text{сист}} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_{\text{сист}}, \tag{18}$$

где $\gamma_\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1-\alpha}}$ — **коэффициент Чебышева** (аналог коэффициента Стьюдента, используемого для оценки доверительного интервала для случайных погрешностей). Значения коэффициента Чебышева γ_α при различных коэффициентах доверия см. в табл.2 Приложения.

Пример (продолжение)

Оценивание систематической погрешности, проведенное студентом Ивановым, дало следующие результаты:

— для секундомера предельная погрешность (13):

$$\Delta_{\text{пред}} = 0{,}001t + \omega \approx \omega = 0{,}1 \text{ с},$$

стандартное отклонение для погрешности прибора $\sigma_{\text{приб}} = 0{,}033$ с;

— стандартное отклонение для погрешности округления (15):

$$\sigma_{\text{окр}} = \frac{\omega}{\sqrt{12}} = 0{,}03 \text{ с};$$

— стандартное отклонение для субъективной погрешности (16):

$$\sigma_{\text{суб}} = 0{,}03 \text{ с};$$

— стандартное отклонение для погрешности метода — не определяется.

Для оценки итоговой систематической погрешности (17) имеем:

$$\sigma_{\text{сист}} = \sqrt{\sigma^2_{\text{пр}} + \sigma^2_{\text{окр}} + \sigma^2_{\text{суб}} + \sigma^2_{\text{мет}}} \approx \sigma_{\text{суб}} = 0{,}03 \text{ с}.$$

Если бы целью Иванова было бы получение оценки периода с учетом только систематической погрешности, то он далее проделал бы следующие вычисления: выбрал значение коэффициента доверия $\alpha = 0{,}95$, по табл.2 нашел значение коэффициента Чебышева $\gamma_\alpha = 4{,}47$ и определил доверительный интервал (18):

$$\Delta_{\text{сист}} = \gamma_\alpha \sigma_{\text{сист}} = 4{,}47 \cdot 0{,}3 = 1{,}34 \text{ с.}$$

Окончательно студент Иванов представил бы следующий результат (с учетом только систематической погрешности): $T = 4{,}6 \pm 1{,}3$ с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

Суммарные (случайные и систематические) погрешности

В предположении о независимости возникновения случайных и систематических погрешностей для величины **стандартного отклонения суммарной погрешности** выборочного среднего значения $\bar{x}$ используется следующая формула:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2}, \tag{19}$$

где $S_{\bar{x}}$ — выборочное стандартное отклонение среднего арифметического (2), $\sigma_{\text{сист}}$ — оценка суммарной систематической погрешности (17).

Доверительный интервал для суммарной погрешности можно посчитать, воспользовавшись, как и в формуле (18), коэффициентом Чебышева

$$\Delta_{\text{сумм}} = \gamma_\alpha \sigma_{\text{сумм}}. \tag{20}$$

Как отмечалось выше, с увеличением объема выборки n выборочное стандартное отклонение среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ стремится к нулю как $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, в то время как систематическая составляющая погрешности измерения остается неизменной. Отсюда можно сделать вывод, что уменьшать величину $S_{\bar{x}}$ с помощью многократных измерений следует только до тех пор, пока вклад случайной погрешности в общую погрешность не станет меньше вклада от систематических погрешностей.

Пример (продолжение).

Для оценки суммарной погрешности (19) Иванов проделал следующие вычисления:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + \sigma_{\text{сист}}^2} = \sqrt{0{,}08^2 + 0{,}3^2} \approx 0{,}31 \text{ с;}$$

Для выбранного значения $\alpha = 0{,}95$ коэффициент Чебышева $\gamma_\alpha = 4{,}47$, доверительный интервал (20) $\Delta_{\text{сумм}} = \gamma_\alpha \sigma_{\text{сумм}} = 1{,}39$(с).

Окончательно студент Иванов представил бы следующий результат: $T = 4{,}6 \pm 1{,}4$ с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

Вывод, который должен сделать студент Иванов: проведение измерений коротких временных интервалов с помощью ручного секундомера приводит к большим относительным погрешностям.

Вывод, который сделает преподаватель, увидев результаты Иванова: Иванов плохо продумал методику проведения измерений, и, несмотря на значительные усилия, затраченные на проведение экспериментов и расчет результатов, не заслуживает высокой оценки.

2. Косвенные измерения Общий случай

Для уравнения косвенных измерений вида $u = f(x, y, \ldots, z)$, в качестве оценки $\hat{u}$ истинного значения физической величины принимают величину

$$\hat{u} = f(\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{z}) \tag{21}$$

где $\hat{x}, \hat{y}, \ldots, \hat{z}$ — оценки соответствующих прямо измеренных величин (напомним, что если прямые измерения проводились в одинаковых условиях, то оценкой является среднее арифметическое, т.е. $\hat{x} = \bar{x}$ и т.д.).

Погрешность оценки $\hat{u}$ можно охарактеризовать с помощью **выборочного стандартного отклонения** S_u случайных и **стандартного отклонения** σ_u систематических ошибок, вычисляемых по формулам:

$$S_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|^2_{\hat{x},\hat{y},\ldots,\hat{z}} \cdot S^2_{\hat{x}} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|^2_{\hat{x},\hat{y},\ldots,\hat{z}} \cdot S^2_{\hat{z}}}, \tag{22}$$

$$\sigma_u = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Bigg|^2_{\hat{x},\hat{y},\ldots,\hat{z}} \cdot \sigma^2_{x,\text{сист}} + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|^2_{\hat{x},\hat{y},\ldots,\hat{z}} \cdot \sigma^2_{z,\text{сист}}}, \tag{23}$$

где $\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\Bigg|_{\hat{x},\hat{y},\ldots,\hat{z}}$ — частная производная от функции $u = f(x, y, z)$ по переменной x, вычисленная при соответствующих оценках прямо измеряемых величин $\hat{x}$, $\hat{y}$, …, $\hat{z}$.

Доверительный интервал как для случайных, так и для систематических погрешностей, может быть рассчитан в общем случае с использованием коэффициента Чебышева γ_α:

$$\Delta_{\text{сл}} = \gamma_\alpha \cdot S_u, \tag{24}$$

$$\Delta_{\text{сист}} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_u. \tag{25}$$

Для оценки **суммарной погрешности** можно использовать такую же формулу, как и для прямых измерений:

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_u^2 + \sigma_u^2}. \tag{26}$$

Для оценки относительной погрешности удобно использовать **относительное стандартное отклонение**

$$\delta u = \frac{\sigma_{\text{сумм}}}{\hat{u}}.$$

Вычисление доверительного интервала для суммарной погрешности проводится также с использованием коэффициента Чебышева γ_α:

$$\Delta_{\text{сумм}} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_{\text{сумм}}. \tag{27}$$

Пример (продолжение)

Студент Петров провел серию из $n = 5$ прямых измерений $N = 50$ периодов колебаний и получил следующие результаты:

$$t_i = 232{,}6;\ 233{,}4;\ 232{,}9;\ 232{,}8;\ 233,2 \text{ (с)}.$$

Для нахождения оценок периода колебаний он сначала вычислил среднее арифметическое (1) по всем результатам прямых измерений $\bar{t} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = \dfrac{1164{,}9 \text{ с}}{5} = 232{,}98$ с, его выборочное стандартное отклонение (2) $S_{\bar{t}} = \sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(t_i - \bar{t})^2} = 0{,}143$ с. Затем по формуле косвенных измерений вида $T = t/N$ студент нашел значение частной производной $\left.\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)\right|_{\bar{t}} = \dfrac{1}{N}$ — (не зависит от $\bar{t}$), и получил оценки (21) для периода колебаний $\bar{T} = \dfrac{\bar{t}}{N} \approx -4{,}6596$ с и стандартного отклонения для случайной погрешности (22): $S_{\bar{T}} = \sqrt{\left.\left(\dfrac{\partial T}{\partial t}\right)\right|_{\hat{t}}^2 \cdot S_{\hat{t}}^2} = \dfrac{S_{\bar{t}}}{N} = 0{,}0029$ с.

При оценивании систематической погрешности для $\bar{t}$ Петров получил:

— для приборной погрешности секундомера

$$\Delta_{\text{пред}} = 0{,}001\bar{t} + \omega \approx 0{,}233 + 0{,}1 \approx 0{,}333 \text{ с}$$

и $\sigma_{\text{приб}} = 0{,}111$ с (формулы (13) и (5));

— для других составляющих систематической погрешности полученные оценки совпадают с оценками Иванова.

Тогда для оценки суммарной систематической погрешности (17) $\sigma_{t_i} \approx \sigma_{\text{суб}} = 0{,}3$ с, и, следовательно, для периода колебаний из формулы (23) следует, что $\sigma_{\bar{T}} \approx \dfrac{\sigma_{\bar{t}}}{N} = 0{,}006$ с.

В итоге для суммарной погрешности (26) получим

$$\sigma_{\text{сумм}} = \sqrt{S_{\bar{T}}^2 + \sigma_{\bar{T}}^2} = \sqrt{0{,}292^2 + 0{,}0062^2} \approx 0{,}0067 \text{ (c)},$$

и для $\alpha = 0{,}95$ и $\gamma_\alpha = 4{,}47$ имеем оценку (27) доверительного интервала $\Delta_{\text{сумм}} = \gamma_\alpha \cdot \sigma_{\text{сумм}} = 4{,}47 \cdot 0{,}067 = 0{,}030$ (c).

Окончательно студент Петров представил следующий результат: $T = 4{,}66 \pm 0{,}03$ с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

Заметим, что результат, полученный Петровым, существенно точнее результата, полученного Ивановым, и студент Петров может надеяться на более высокую оценку своей работы, чем Иванов.

Частные случаи

Довольно часто возникает ситуация, когда косвенно измеряемая величина и является функцией других косвенно измеряемых величин $v, \ldots, w$, т.е. $u = f(v, \ldots, w)$. В этом случае можно поступить одним из следующих способов.

1. Если величины $v, \ldots, w$ независимы, т.е. каждая из них является функцией своих прямо измеряемых величин, то для получения оценок как самой физической величины u, так и ее стандартого отклонения применяются те же формулы, что и в случае прямых измерений величин $v, \ldots, w$. Иными словами, требуемые оценки для величин $v, \ldots, w$ находятся, как и положено, по формулам косвенных измерений, а затем они используются для получения оценок $u = f(v, \ldots, w)$ как если бы они были результатами прямых измерений.

2. Если величины $v, \ldots, w$ взаимозависимы, т.е. некоторые из прямо измеряемых величин $x, y, \ldots z$ используются для оценивания одновременно нескольких из косвенно измеряемых $v, \ldots, w$, то следует свести формулу для u к уравнению косвенных измерений

$$u = -f\left(v(x, y, \ldots, z), \ldots, w(x, y, \ldots, z)\right) = \varphi(x, y, \ldots, z)$$

и для получения оценок использовать соответственно формулы (21) – (23).

Приведем также формулы для нескольких часто встречающихся видов уравнений косвенных измерений.

1. Пусть уравнение косвенных измерений имеет вид

$$u = f(x, y) = x + y$$

и для прямо измеряемых величин x и y найдены средние арифметические $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и стандартные отклонения $S_{\bar{x}}$ и $S_{\bar{y}}$ (будем считать, что систематические погрешности пренебрежимо малы). Для оценки $\hat{u}$ получаем $\hat{u} = \bar{x} + \bar{y}$. Так как значения частных производных $\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}\right)\Big|_{\bar{x},\bar{y}}$ и $\left(\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)\Big|_{\bar{x},\bar{y}}$ равны единице, то $S_u = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\bar{y}}^2}$. Такой же результат для S_u можно получить и в случае уравнения косвенных измерений $u = x - y$.

2. Пусть уравнение косвенных измерений имеет вид

$$u = f(x, y) = x \cdot y$$

и найдены $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $S_{\bar{x}}$, $S_{\bar{y}}$. В этом случае оценка $\hat{u} = \bar{x} \cdot \bar{y}$. Вычисляя частные производные $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{\bar{x},\bar{y}} = \bar{y}$ и $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{\bar{x},\bar{y}} = \bar{x}$ получаем $S_u = \sqrt{\bar{y}^2 \cdot S_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2 \cdot S_{\bar{y}}^2}$. Для оценки относительной погрешности используется относительное стандартное отклонение

$$\delta u = \frac{S_u}{\hat{u}} = \frac{\sqrt{\bar{y}^2 \cdot S_{\bar{x}}^2 + \bar{x}^2 \cdot S_{\bar{y}}^2}}{\bar{x} \cdot \bar{y}} = \sqrt{\frac{S_{\bar{x}}^2}{\bar{x}^2} + \frac{S_{\bar{y}}^2}{\bar{y}^2}} = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}.$$

Как видим, относительные стандартные отклонения складываются квадратичным образом. Аналогичный результат можно получить и для уравнения $u = f(x, y) = x/y$.

3. Для уравнения косвенных измерений

$$u = f(x, y) = x \cdot y^2$$

нетрудно получить, что для относительного стандартного отклонения δu справедливо соотношение $\delta u = \sqrt{(\delta x)^2 + (2 \cdot \delta y)^2}$.

На основании полученных в пп. 2 и 3 результатов можно сделать следующие выводы, позволяющие в ряде случаев упростить вычисления.

1. Если в уравнении косвенных измерений имеются **только знаки умножения и деления**, то относительное стандартное отклонение

косвенно измеряемой величины равно квадратичной сумме относительных стандартных отклонений всех прямо измеряемых величин:

$$\delta u = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + \ldots + (\delta z)^2}.$$

2. Если в уравнении косвенных измерений, кроме знаков **умножения и деления**, присутствует и операция **возведения в степень** для любого числа сомножителей, т.е.

$$u = f(x, y, \ldots, z) = x^{N_x} \cdot y^{N_x} \cdot \ldots \cdot z^{N_x},$$

то формула для относительного стандартного отклонения косвенно измеряемой величины имеет вид:

$$\delta u = \sqrt{(N_x \cdot \delta x)^2 + (N_y \cdot \delta y)^2 + \ldots + (N_z \cdot \delta z)^2}.$$

где N_x, N_y, …, N_z — соответствующие показатели степени при величинах x, y, …, z.

V. ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ СОВМЕСТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Пусть существует модель явления, в которой измеряемые величины x и y функционально связаны между собой уравнением совместных измерений

$$y = f(x;\ u, v, \ldots, w), \tag{28}$$

где u, v, …, w — совокупность искомых физических величин, выступающих в качестве неизвестных параметров. Пусть измерения организованы следующим образом: одна из измеряемых величин x целенаправленно изменяется от опыта к опыту, при этом для каждого значения x_i, измеряется соответствующее значение y_i (в дальнейшем для серии измерений x_1, x_2, …, x_i, … и y_1, y_2, …, y_i, … будем использовать обозначения $\{x_i\}$ и $\{y_i\}$).

Ставится задача: найти по результатам совместных измерений (x_1, y_1), (x_2, y_2), …, (x_i, y_i), $\ldots(\{x_i\}, \{y_i\})$ такие оценки параметров $\hat{u} = \hat{u}(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots) = \hat{u}(\{x_i\}, \{y_i\})$, $\hat{v} = \hat{v}(\{x_i\}, \{y_i\})$, $\hat{w} = \hat{w}(\{x_i\}, \{y_i\})$, которые были бы максимально близки к истинным значениям $u_{\text{ист}}$, $v_{\text{ист}}$, $w_{\text{ист}}$. Предложить единый алгоритм для решения такой задачи невозможно — многое определяется видом функциональной зависимости $y = f(x; u, v, \ldots, w)$. Однако часто задачу получения максимально точных оценок параметров заменяют другой: найти такие оценки параметров, при которых результаты измерений y_i будут максимально близкими к значениям функции $f(x_i; u, v, \ldots, w)$.

Понятно, что это две разные задачи, и совсем не очевидно, что оценки, полученные при их решении, должны быть близки друг к другу. Но на практике наибольшее распространение получила именно вторая задача, и одним из широко применяемых методов ее решения является **метод наименьших квадратов**.

1. Идея метода наименьших квадратов (МНК)

Пусть в ходе измерений, проведенных в соответствии с уравнением (28), получены следующие результаты: величины x_1, x_2, $\ldots$, x_i, $\ldots = \{x_i\}$ известны *абсолютно точно*, величины $y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots = \{y_i\}$ измеряются с известными стандартными отклонениями σ_1, σ_2, $\ldots$, σ_i, $\ldots = \{\sigma_i\}$.

Пусть проведено всего n измерений y_1, y_2, $\ldots$, y_n, а число неизвестных параметров u, v, $\ldots$, w равно m. В качестве оценок искомых величин u, v, $\ldots$, w, полученных методом наименьших квадратов, берется совокупность значений u, v, $\ldots$, w, минимизирующая функционал

$$\chi^2(u, v, \ldots, w) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - f(x;\ u, v, \ldots, w)}{\sigma_i} \right)^2, \tag{29}$$

называемый обычно **функционалом «хи-квадрат»**.

Как видим, функционал $\chi^2(u, v, \ldots, w)$ равен сумме квадратов нормированных отклонений результатов прямых измерений y_i от «теоретических» значений $y_{i(\text{теор})} = f(x_i; u, v, \ldots, w)$, полученных в рамках выбранных модельных представлений. Нормировка разности $y_i - y_{i(\text{теор})}$ на стандартное отклонение σ_i, позволяет учесть вклад отдельных измерений в сумму квадратов в долях стандартного отклонения. Нормировочный множитель $1/\sigma_i^2$ часто называют «весом» отдельного слагаемого в сумме (29), а сам метод — **методом наименьших квадратов с «весами»**.

Для нахождения минимума функционала обычно решается система m уравнений

$$\left\{ \frac{\partial \chi^2(u, v, \ldots, w)}{\partial u} = 0;\ \frac{\partial \chi^2(u, v, \ldots, w)}{\partial v} = 0;\ \ldots;\ \frac{\partial \chi^2(u, v, \ldots, w)}{\partial w} = 0 \right\}.$$

В ряде случаев полученная система может быть решена аналитически, тогда найденные функциональные зависимости параметров $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\ldots$, $\hat{w}$ от результатов прямых измерений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ рассматриваются как расчетные формулы, т.е. $\hat{u} = \hat{u}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и т.д. Так как такая запись соответствует случаю косвенных измерений, то, зная стандартные отклонения $\{\sigma_i\}$, можно найти стандартные отклонения и доверительные интервалы для случайных и систематических погрешностей искомых физических величин u, v, ..., w.

2. Примеры применения метода наименьших квадратов

Объединение результатов различных измерений

Пусть $\{y_i, \sigma_i\}$ — совокупность результатов n независимых измерений физической величины b, полученных при существенно разных условиях измерений, не влияющих на эту величину (например, разными методами или в разных лабораториях). Представим эти результаты как результат совместных измерений с уравнением измерений

$$y = f(x, b) = b = \text{const}, \tag{30}$$

где b — параметр, значение которого требуется оценить по результатам n измерений.

Легко показать, что в этом случае из условия минимума функционала $\chi^2(b) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\dfrac{y_i - b}{\sigma_i}\right)^2$ по параметру b следует

$$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{y_i}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_i^2}} \tag{31}$$

Если теперь представить оценку b как косвенно измеряемую величину через прямо измеряемые величины $\{y_i\}$ со стандартными отклонениями ошибок $\{\sigma_i\}$ и учесть, что $\dfrac{\partial \hat{b}}{\partial y_i} = \dfrac{\dfrac{1}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_i^2}}$, то оценка дисперсии $S_{\hat{b}}^2$ (квадрата стандартного отклонения $S_{\hat{b}}$) для величины $\hat{b}$, найденная по формуле (22), будет равна

$$S_{\hat{b}}^2 = \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial y_1}\right)\Bigg|_{\bar{y}_1}^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots + \left(\frac{\partial \hat{b}}{\partial y_n}\right)\Bigg|_{\bar{y}_n}^2 \cdot \sigma_n^2 = \left(\frac{\dfrac{1}{\sigma_1^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_i^2}}\right)^2 \cdot \sigma_1^2 + \ldots = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma_i^2}}. \tag{32}$$

Если значения стандартных отклонений $\{\sigma_i\}$ одинаковы и равны σ_0, то, как нетрудно заметить, из формулы (31) для оценки $\hat{b}$ получается привычная формула среднего арифметического

$$\hat{b} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n}, \tag{33}$$

а для оценки квадрата стандартного отклонения из формулы (32) имеем:

$$S_{\hat{b}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{n}, \tag{34}$$

т.е. стандартное отклонение среднего арифметического в $\sqrt{n}$ раз меньше стандартного отклонения для результата отдельного измерения (сравните с формулой (4)).

Если значение стандартного отклонения σ_0 неизвестно, то его можно оценить по результатам измерений. В математической статистике показывается, что функционал «хи-квадрат» имеет среднее значение (называемое математическим ожиданием), равное числу степеней свободы $r = n - m$, где n — число измерений, m — число неизвестных параметров. Т.к. в данном случае $m = 1$, то получаем:

$$\chi^2(\hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \hat{b}\right)^2}{\sigma_0^2} = n - 1, \tag{35}$$

$$\sigma_0^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \hat{b}\right)^2}{n-1}. \tag{36}$$

В итоге для квадрата стандартного отклонения среднего арифметического $S_{\hat{b}}^2$ получаем уже знакомую формулу (сравните с формулой (2))

$$S_{\hat{b}}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \hat{b}\right)^2}{n(n-1)}. \tag{37}$$

Отметим, однако, что такой подход к оцениванию стандартного отклонения имеет право на применение только при условии абсолютно верной модели, т.е. если действительно проведено n измерений *одной и той же* величины b, если действительно для всех измерений стандартное отклонение σ_0 *одно и то же*.

В случае, когда значения стандартного отклонения $\{\sigma_i\}$ известны, то, вычисляя значение функционала $\chi^2(\hat{b})$, можно проверить состоятельность модели (см. п.V. 3), т.е. соответствие результатов измерений и предлагаемой модели.

Случай пропорциональной зависимости

Пусть $\{x_i; y_i, \sigma_i\}$ — совокупность результатов n независимых измерений (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n), связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = f(x, a) = a \cdot x, \tag{38}$$

где a — константа, значение которой необходимо оценить. В соответствии с методом наименьших квадратов функционал $\chi^2(a)$ будет выглядеть следующим образом

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - a \cdot x_i}{\sigma_i} \right)^2 .$$

Из условия минимума функционала $\chi^2(a)$ по параметру a имеем

$$\hat{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i y_i}{\sigma_i^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \tag{39}$$

Если теперь представить оценку $\hat{a}$ как косвенно измеряемую величину, выражаемую уравнением косвенных измерений (39) через прямо измеряемые величины $\{y_i\}$ с дисперсиями $\{\sigma_i^2\}$, то оценка дисперсии величины я находится по формуле (22) и будет равна

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{x_i^2}{\sigma_i^2}}. \tag{40}$$

В случае одинаковых по величине дисперсий $\{\sigma_i^2\} = \{\sigma_0^2\}$ для всех прямо измеряемых величин $\{y_i\}$ формулы несколько упрощаются:

$$\hat{a} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{41}$$

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sigma_0^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}. \tag{42}$$

Если дисперсии $\{\sigma_0^2\}$ прямо измеряемых величин $\{y_i\}$ одинаковы и неизвестны, то формула для нахождения оценки a остается той же (41). Что касается оценки дисперсии $S_{\hat{a}}^2$, то. она находится по приведенной выше формуле (40), где вместо дисперсии σ_0^2 используется ее оценка $\hat{\sigma}_0^2$. Эта оценка может быть найдена, как отмечалось выше в n.V.2.a, из условия равенства функционала $\chi^2(a)$ числу степеней свободы $n - m$, т.е.

$$\chi^2(a) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - \hat{a} \cdot x_i}{\hat{\sigma}_0^2} \right)^2 = n - m \qquad \text{и} \qquad \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \hat{a} \cdot x_i)^2}{n - m}.$$

Приведем формулу для расчета дисперсии величины a в этом случае:

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2}{(n-1) \cdot \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^2} \tag{43}$$

Как и в n.V.2.a, отметим, что, зная значения стандартного отклонения $\{\sigma_i^2\}$ и вычисляя значение функционала $\chi^2(a)$, можно проверить состоятельность модели.

Случай линейной зависимости

Пусть $\{x_i; y, \sigma_i\}$ — совокупность результатов n независимых измерений (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (x_i, y_i), связанных уравнением совместных измерений вида

$$y = f(x, a, b) = a \cdot x + b, \tag{44}$$

где a и b — константы, значения которых необходимо оценить. В соответствии с методом наименьших квадратов функционал $\chi^2(a, b)$ будет выглядеть следующим образом

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{y_i - a \cdot x_i - b}{\sigma_i} \right)^2. \tag{45}$$

Из условия минимума функционала $\chi^2(a, b)$ запишем систему уравнений для нахождения двух неизвестных a и b:

$$\frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial a} = 0, \; \frac{\partial \chi^2(a, b)}{\partial b} = 0.$$

После простых преобразований эта система превращается в систему линейных уравнений:

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2},$$
$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2}.$$

Введя обозначения

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \right)^2,$$
$$\Delta_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2},$$
$$\Delta_b = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sigma_i^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2}.$$

запишем результат решения этой системы в виде

$$\hat{a} = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \qquad \hat{b} = \frac{\Delta_b}{\Delta}. \tag{46}$$

Для оценок дисперсий найденных величин можно получить

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}{\Delta}, \qquad S_{\hat{b}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}{\Delta}. \tag{47}$$

В случае одинаковых дисперсий $\{\sigma_0^2\}$ для всех прямо измеряемых величин $\{y_i\}$ формулы несколько упрощаются:

$$\Delta = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2,$$
$$\Delta_a = n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i,$$
$$\Delta_b = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i.$$

$$\hat{a} = \frac{\Delta_a}{\Delta}, \qquad \hat{b} = \frac{\Delta_b}{\Delta}. \tag{48}$$

$$S_{\hat{a}}^2 = \sigma_0^2 \cdot \frac{n}{\Delta}, \qquad S_{\hat{b}}^2 = \sigma_0^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\Delta}. \tag{49}$$

Если дисперсии $\{\sigma_0^2\}$ прямо измеряемых величин одинаковы и неизвестны, то формулы для нахождения параметров a и b остаются теми же (48), так как от величины дисперсии σ_0 в этом случае они не зависят. Что же касается оценок дисперсий $S_{\hat{a}}^2$ и $S_{\hat{b}}^2$, то они находятся по приведенным выше формулам (49), где вместо дисперсии σ_0^2 берется ее оценка $\hat{\sigma}_0^2$. Эта оценка, как и в п.V.2.а,б, может быть найдена из условия

$$\chi^2(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}\right)^2}{\hat{\sigma}_0^2} = n - 2 \tag{50}$$

и, следовательно,

$$\hat{\sigma}_0^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}\right)^2}{n - 2}. \tag{51}$$

Для последнего случая приведем также часто встречающиеся в литературе формулы (отличные по форме записи, но дающие те же результаты) для расчета параметров и их дисперсий. Если ввести обозначения

$$\bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad \bar{y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n},$$

$$S_x^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}, \qquad S_y^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n - 1},$$

$$r = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} [(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})]}{(n-1) \cdot S_x \cdot S_y}. \tag{52}$$

(обратим внимание, что введенные обозначения $\bar{x}$, $\bar{y}$ и S_x^2, S_y^2 никакого отношения к оценкам значений и дисперсий величин x и y не имеют), то формулы для расчета оценок будут иметь следующий вид:

$$\hat{a} = r \cdot \frac{S_y}{S_x}, \tag{53}$$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x}, \tag{54}$$

$$S_{\hat{a}}^2 = \frac{1 - r^2}{n - 2} \cdot \frac{S_y^2}{S_x^2}, \tag{55}$$

$$S^2_{\hat{b}} = S^2_{\hat{a}} \cdot \frac{(n-1)\cdot S^2_x + n\cdot(\bar{x})^2}{n}. \qquad (56)$$

Коэффициент r, называемый **коэффициентом взаимной корреляции** между величинами x и y, позволяет проверить соответствие результатов эксперимента и предлагаемой линейной модели. Можно показать, что n лежит в диапазоне от -1 до $+1$, причем $|n| = 1$ в случае, когда все экспериментальные точки (x_i, y_i) лежат строго на одной прямой, т.е. выполнено условие $\chi^2(\hat{a}, \hat{b}) = 0$. Если значение коэффициента корреляции $|r| \approx 0{,}9 \div 0{,}95$, то можно считать, что линейная модель достаточно хорошо согласуется с результатами эксперимента. В противном случае следует либо уточнить модель, либо более тщательно провести измерения.

Случай нелинейной зависимости, допускающей линеаризацию

Достаточно часто уравнение совместных измерений $y = f(x; a, \ldots, b)$ является нелинейным, но простое преобразование позволяет его линеаризовать. К таким зависимостям относятся, например, уравнения вида $y = b\cdot\ln(ax)$, $y = b\cdot\exp(ax)$, $y = a\cdot x^2$, $y^2 = a\cdot x^3$ и т.д. Метод наименьших квадратов может быть применен и в этом случае, однако здесь следует внимательно отнестись к изменению погрешности отдельного измерения, возникающему при линеаризации.

Рассмотрим конкретный пример, поясняющий особенности такого подхода.

Пусть изучается процесс разряда конденсатора C через активное сопротивление R, при этом проводятся измерения напряжения на обкладках конденсатора U_i в определенные моменты времени t_i. Требуется по результатам измерений оценить постоянную времени τ для RC-цепочки.

Запишем уравнение, описывающее исследуемую зависимость:

$$U = f(t; U_0, \tau) = U_0 \cdot \exp(-t/\tau).$$

Пусть моменты времени $\{t_i\}$ известны абсолютно точно, а для напряжений $\{U_i\}$ величины дисперсий одинаковы и равны $\sigma^2_{U_0}$.

Логарифмируя уравнение и вводя привычные обозначения, получим

$$y = \ln(U) = \ln(U_0) - t/\tau = b + a\cdot x,$$

где $a = -1/\tau$, $b = \ln(U_0)$.

Казалось бы, схема измерений сведена к линейной зависимости, рассмотренной выше. Однако возникает вопрос: а каковы величины дисперсий для $\{y_i\}$? Так как уравнение $y = \ln(U)$ по форме является уравнением косвенных измерений, то, используя формулу (22), получим:

$$\sigma_{y_i}^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial U}\right)\Bigg|_{U_i}^2 \cdot \sigma_1^2 = \frac{\sigma_{U_0}^2}{U_i^2}.$$

Таким образом, квадраты стандартного отклонения (дисперсии) для y_i уже не одинаковы, а обратно пропорциональны квадратам измеренных значений U_i. Следовательно, зная $\{y_i\}$ и $\{\sigma_{y_i}^2\}$, можно с помощью МНК получить оценки для a и b, а затем по формуле косвенных измерений получить искомую оценку для τ.

Полученный результат можно обобщить на случай произвольной зависимости, допускающей линеаризацию. Так как в уравнении совместных измерений нелинейность возможна как по параметрам $a, \ldots,$ b, так и по измеряемым величинам x и y, то рассмотрим различные случаи.

1. Нелинейность только по измеряемой величине x (например, $y = ax^2$ или $y = ae^x$).

Так как величины x_i, считаются известными абсолютно точно, то простой заменой переменных (в указанных примерах $t = x^2$ и $t = e^x$) задача сводится к линейной зависимости $y = at$, после чего применяются обычные формулы МНК.

2. Нелинейность только по параметру (например, $y = c^3 x$).

Заменой переменных $a = c^3$ уравнение сводится к линейной схеме $y = ax$, для параметра a находятся оценки $\hat{a}$ и $S_{\hat{a}}$, после этого в соответствии с уравнением «косвенных измерений» $c = \sqrt[3]{a}$ находятся оценки $\hat{c} = \sqrt[3]{\hat{a}}$ и $S_{\hat{c}} = \sqrt{\left(\frac{\partial c}{\partial a}\right)\Big|_{\hat{a}}^2 \cdot S_{\hat{a}}^2} = \frac{S_{\hat{a}}}{3 \cdot \hat{a}^{2/3}}$.

3. Нелинейность только по измеряемой величине y (например, $e^y = ax + b$).

Делая замену переменных $z = e^y$ и пересчитывая по формулам (21) – (22) результаты «измерений» $z_i = z(y_i) = e^{y_i}$ и «погрешность» $\sigma_{z_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 \cdot \left(\frac{dz(y)}{dy}\Big|_{y_i}\right)^2$, вновь приходим к линейной схеме.

4. Нелинейность одновременно и по измеряемой величине x и по параметрам (пример, приведенный в начале настоящего п. V.2.г).

Пусть для нелинейной схемы измерений $y = f(x; a, \ldots, b)$, известны результаты измерений $\{x_i\}$ и $\{y_i, \sigma_{y_i}^2\}$, и преобразование $z = \psi(y)$ линеаризует задачу (в рассмотренном выше примере таким преобразованием было логарифмирование $\psi(y) = \ln(y)$). Тогда для новой «измеряемой» величины z будут справедливы следующие соотношения:

$$z_i = \psi(y_i)\ \sigma_{z_i}^2 = \sigma_{y_i}^2 \cdot \left(\left. \frac{d\psi(y)}{dy} \right|_{y_i} \right)^2 .$$

В итоге получаем линейную задачу, к которой можно применить МНК.

3. Заключительные замечания о методе наименьших квадратов

1. Требование абсолютно точных значений физических величин $\{x_i\}$ накладывает существенные ограничения на применение метода наименьших квадратов, т.к. в результате измерений мы не можем получить истинных значений (см. разд.III). Однако, можно дать следующую рекомендацию. Пусть проведена серия совместных измерений (t_1, z_1), (t_2, z_2), … величин t и z, связанных уравнением совместных измерений, допускающих применение МНК. Сначала необходимо посчитать отношения наибольших стандартных отклонений суммарных погрешностей σ_t, и σ_z при измерении величин t и z к соответствующим диапазонам изменений этих величин $\Delta t = t_{\max} - t_{\min}$ и $\Delta z = z_{\max} - z_{\min}$ в данной серии совместных измерений. Затем в качестве переменной x **выбрать** ту из величин, для которой это отношение будет существенно меньшим. Если эти отношения оказались примерно одинаковыми, то можно получить требуемые оценки для двух противоположных случаев выбора переменных и сравнить их. Если полученные результаты близки друг к другу, то можно рассчитывать, что они будут близки и к истинным значениям.

2. При применении МНК необходима проверка полученных результатов на соответствие экспериментальных данных используемой модели (уравнению совместных измерений). Существуют многочисленные критерии, позволяющие это сделать. Дадим некоторые рекомендации, которыми можно ограничиться для задач физического практикума.

А. На графике изобразить результаты совместных измерений $\{x_i, y_i\}$ с указанием стандартных отклонений $\{\sigma_{y_i}\}$, построить зависимость $y = f(x; \hat{a}, \ldots, \hat{b})$, соответствующую найденным оценкам искомых параметров и визуально оценить степень соответствия.

Б. С учетом дисперсий $\{\sigma_{y_i}\}$ величин $\{y_i\}$ подсчитать значение функционала $\chi^2(\hat{a}, \ldots, \hat{b})$. Если его значение близко к числу степеней свободы $n - m$, то можно считать хорошим соответствие модели и результатов эксперимента. Если значение функционала существенно меньше $n-m$, то, скорее всего, оценки дисперсий $\{\sigma_{y_i}\}$ несколько завышены (такое может быть, когда основной вклад в оценку погрешности дает систематическая погрешность). Если же значение функционала значительно превышает $n-m$, то следует считать, что при построении модели не были учтены какие-либо факторы или данная модель плохо описывает результаты эксперимента.

В. Рассчитать коэффициент корреляции r (см. пп. V.2) по формуле (52) и убедиться, что по модулю он превышает величину 0,9.

3. Обратим внимание на то, что, несмотря на различие в постановках задач в МНК и в задаче получения оценок параметров, максимально близких к истинным значениям (см. начало разд.V), можно показать, что для линейных зависимостей (п. V.2.) оценки МНК являются наилучшими оценками для параметров в некотором классе линейных оценок. В то же время уже для случая линеаризации (п. V.2.г) это не так. Отметим, что в настоящее время существуют иные подходы к вопросам анализа и интерпретации данных, в которых ставится непосредственно задача получения максимально близких оценок параметров, однако, они уступают МНК в простоте и наглядности.

Пример (продолжение)

Студент Сидоров провел несколько серий из $n = 4$ прямых измерений для $N = 20$, 30, 40, 50 периодов колебаний и получил следующие результаты:

$$
\begin{array}{llllll}
N = 20 & t_{20,i} = 93{,}2; & 93{,}7; & 93{,}4; & 92{,}9; & 93{,}0 \text{ (с)} \\
N = 30 & t_{30,i} = 139{,}8; & 139{,}4; & 140{,}2; & 139{,}6; & 139{,}9 \text{ (с)} \\
N = 40 & t_{40,i} = 186{,}4; & 186{,}1; & 186{,}8; & 186{,}3; & 186{,}8 \text{ (с)} \\
N = 50 & t_{50,i} = 233{,}0; & 233{,}4; & 232{,}7; & 233{,}1; & 232{,}7 \text{ (с)}
\end{array}
$$

Для каждой серии студент вычислил среднее арифметическое (1) и выборочное стандартное отклонение (2):

$$
\begin{array}{lll}
N = 20 & \bar{t}_{20} = 93,34 \text{ с} & S_{\bar{t}_{20}} = 0{,}144 \text{ с} \\
N = 30 & \bar{t}_{30} = 139,78 \text{ с} & S_{\bar{t}_{30}} = 0{,}136 \text{ с} \\
N = 40 & \bar{t}_{40} = 186,48 \text{ с} & S_{\bar{t}_{40}} = 0{,}132 \text{ с} \\
N = 50 & \bar{t}_{50} = 232,98 \text{ с} & S_{\bar{t}_{50}} = 0{,}139 \text{ с}
\end{array}
$$

Оценки систематической погрешности (17) для каждого из средних $\bar{t}_N$, дают одинаковый результат (как у Иванова и Петрова), т.е. $\sigma_{\bar{t}_N} \approx \sigma_{\text{суб}} = 0{,}3$ с. Далее Сидоров заметил, что систематическая погрешность для каждой серии примерно в три раза превышает случайную, и сделал вывод, что можно положить $\sigma_{\text{сум},N} \approx \sigma_{\bar{t}_N} \approx \sigma_{\text{суб}}$ т.е. оценки суммарных погрешностей (19) средних для каждой серии можно считать одинаковыми.

Полученные результаты Сидоров решил обработать методом наименьших квадратов. Уравнение совместных измерений, имеющее вид:

$$\bar{t}_N = f(N,T) = N \cdot T,\ N = 20,\ 30,\ 40,\ 50,$$

является уравнением пропорциональной зависимости (38), в котором значения $\{N_i\}$ известны точно, дисперсии для $\{\bar{t}_N\}$ одинаковы и известны.

Применяя формулы (41 – 42), Сидоров получил следующие оценки:

$$\hat{T} = 4{,}66044\ \text{с},\ S_{\hat{T}} = 0{,}0041\ \text{с}.$$

Для $\alpha = 0{,}95$ коэффициент Чебышева $\gamma_\alpha = 4{,}47$, в итоге для доверительного интервала (27) имеем $\Delta_{\hat{A}} = \gamma_\alpha \cdot S_{\hat{T}} = 4{,}47 \cdot 0{,}0041 = 0{,}0182$ с, и окончательно студент Сидоров представил следующий результат: $T = 4{,}66 \pm 0{,}02$ с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

Для проверки состоятельности модели Сидоров на координатной плоскости N и t нанес экспериментальные точки $(N_i, \bar{t}_{N_i})$ и построил график пропорциональной зависимости $t_{N_i} = N_i \cdot \hat{T}$ с использованием найденной с помощью МНК оценки $\hat{T}$. Затем он вычислил по формуле (52) значение коэффициента корреляции и получил значение $n > 0{,}99$, что свидетельствует о хорошем соответствии модели и результатов эксперимента. Далее он нашел значение функционала $\psi^2(a)$ и получил число, меньшее 1, хотя число степеней свободы равно $4 - 1 = 3$. Отсюда он сделал вывод (п.V.3.3), что оценка дисперсии $\sigma_i \approx \sigma_{\text{суб}}$, по-видимому, завышена, что и не удивительно, так как основной вклад в оценку погрешности дает систематическая погрешность.

В заключении заметим, что результаты, полученные Петровым и Сидоровым, практически одинаковы, что объясняется тем фактом, что основной вклад в погрешность вносит систематическая погрешность, не зависящая от числа измерений. Можно сделать вывод, что Сидорову следовало бы сначала получить искомые оценки по результатам одной серии, и, если результат достаточно точен, прекратить измерения. В итоге следует признать стратегию Петрова наиболее правильной, стратегию Иванова — недостаточной и стратегию Сидорова — избыточной.

4. Краткая сводка правил по обработке результатов совместных измерений

1. При подготовке к проведению измерений необходимо решить: требует ли поставленная задача проведения совместных измерений с последующим применением МНК? Как правило, совместные измерения необходимы в том случае, когда исследователя интересуют возможные зависимости физических величин от целенаправленно изменяемых условий

опыта. Если ответ на поставленный вопрос положительный, то следует продумать порядок проведения совместных измерений для получения максимально точных результатов.

2. После проведения прямых измерений и анализа погрешностей решить, какая из измеряемых величин будет выбрана в качестве переменной x, а какая — в качестве x. Для этого следует рассчитать отношения наибольших стандартных отклонений суммарных погрешностей измеряемых величин к соответствующим диапазонам изменений этих величин в данной серии совместных измерений. Затем в качестве переменной x **выбрать** ту из величин, для которой это отношение будет существенно меньшим.

3. В соответствии со сделанным выбором записать уравнение совместных измерений и решить, к какому из разобранных выше типов (п.V.2) оно относится. Если уравнение требует линеаризации (п.V.2.г), то, сделав соответствующие замены переменных, пересчитать оценки погрешностей.

4. Дальнейший порядок действий зависит от соотношения оценок погрешностей $\{\sigma_{y_i}\}$ для различных измерений.

Если полученные оценки погрешностей $\{\sigma_{y_i}\}$ существенно отличаются друг от друга, то для получения оценок параметров и их погрешностей следует (в зависимости от вида уравнения) использовать формулы (31) – (32) или (39) – (40) или (46) – (47), в которых $\{\sigma_i^2\} = \{\sigma_{y_i}^2\}$.

Если оценки погрешностей $\{\sigma_{y_i}\}$ примерно одинаковы, т.е. не зависят от номера измерения, то можно использовать формулы (33) – (34) или (41) – (42) или (48) – (49) для одинаковой дисперсии, в которых $\{\sigma_0^2\} = \{\sigma_{y_i}^2\}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Если по какой либо причине расчет погрешностей невозможен, но есть основания полагать, что они одинаковы, то следует использовать формулы (33), (37) или (41), (43) или (48), (49) с учетом (51). Отметим, что такой способ расчета дает представление о реальной погрешности определения значений параметров в предположении соответствия экспериментальных данных и используемой модели.

5. Проверить соответствие экспериментальных данных и полученных результатов, для чего обязательно следует построить график, и желательно рассчитать коэффициент корреляции r (для пропорциональной и линейной зависимостей) по формуле (52) или значение функционала «хи-квадрат» по соответствующим формулам.

6. Выбрав коэффициент доверия α, провести необходимые расчеты доверительных интервалов по формуле (27) и записать полученные результаты (см. ниже разд.VI).

VI. ОФОРМЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Главные требования к форме представления результатов измерений, их обработки и анализа — однозначность, полнота и наглядность. Результаты экспериментальных исследований должны быть оформлены студентом в лабораторном журнале для физического практикума в виде законченной, целостной исследовательской работы.

Оформленная лабораторная работа, как правило, должна состоять из четырех основных частей:

1) вводная часть;

2) результаты прямых измерений;

3) анализ и обработка результатов прямых измерений;

4) окончательные результаты обработки и выводы.

Вводная часть должна содержать в себе наименование работы, краткое описание метода исследования, основных узлов установки и используемых при этом приборов. В качестве необходимых элементов вводной части должен быть схематичный чертеж, рисунок или схема с соответствующими пояснениями, наглядно и кратко поясняющие идею примененного метода, а также расчетные формулы с обозначениями физических величин, встречающихся в задаче.

Во второй части приводятся результаты прямых измерений с указанием условий измерений. Для всех физических величин должны быть приведены единицы измерения. Результаты всех измерений должны заносится сразу в журнал (без использования черновиков) ручкой (а не карандашом) в систематизированном виде (например, в виде таблиц).

В третьей части фиксируется вся последовательность анализа и обработки полученных данных, содержащая как расчетные формулы, так и величины, используемые при расчетах. Для каждой косвенно определяемой физической величины необходимо сначала привести расчетную формулу, затем значения физических величин, подставляемых в нее и, наконец, результат вычислений. Если промежуточные результаты вычислений важны для дальнейшего анализа, то и их необходимо привести.

Для наглядности и контроля результатов обработки и анализа необходимо графическое изображение полученных зависимостей физических величин. График должен иметь заголовок, указывающий, какая зависимость на нем нанесена. Масштаб на графике выбирается так, чтобы изображаемые данные занимали практически все поле чертежа. На каждой из осей должны быть метки с указанием числовых значений. Вдоль осей следует написать наименования физических величин, их обозначение и единицы измерения. На графиках экспериментально полученные точки изображаются в виде простейших геометрических фигур (кружков, треугольников, квадратов, ромбов и т.д.) небольшого размера. Каждая отдельная серия измерений должна отличаться изображением экспериментальных точек. Желательно указать для каждой экспериментальной точки оценку ошибок соответствующих величин в виде вертикальных и горизонтальных отрезков по обе стороны точек длиною в стандартное отклонение или доверительный интервал. Кроме экспериментальных точек, на графике обычно приводится кривая, «проходящая» через эти точки и отвечающая законам физики или модельным представлениям, в рамках которых проводится анализ полученных результатов (если не используется конкретная физическая модель, то кривая проводится как результат интерполяции данных).

В четвертой части необходимо привести результаты анализа и обработки в виде значений искомых физических величин с указанием стандартных отклонений или доверительных интервалов случайных и систематических погрешностей и основные выводы, сделанные по существу выполненной работы.

При записи значений искомых величин и их доверительных интервалов (или стандартных отклонений) необходимо провести правильное округление результатов вычислений. Важно при этом, с одной стороны, не внести погрешность округления, сравнимую или превышающую другие погрешности, а с другой — оставить только достоверные значащие цифры. Округление значения физической величины проводится с учетом найденного значения стандартного отклонения. Необходимо руководствоваться при этом следующими правилами:

— число **значащих** цифр у стандартных отклонений (доверительных интервалов) не должно превышать двух;

— последняя **значащая** цифра значения искомой физической величины должна соответствовать последней значащей цифре стандартного отклонения (доверительного интервала).

Первое утверждение определяется тем, что стандартные отклонения (доверительные интервалы) вычисляются **неточно** по причине приближенности самих формул для оценки стандартных отклонений. Для экспериментов, выполняемых в условиях физического практикума, можно считать, что относительная погрешность вычисления стандартного отклонения составляет не менее $10 \div 15\%$.

На основании вышеизложенного, можно сформулировать следующий порядок действий для правильной записи результата измерений.

1. В ходе *промежуточных* вычислений значений искомых величин и стандартных отклонений необходимо оставлять достаточное (4-5 и более) число значащих цифр.

2. После окончания вычислений сначала требуется округлить значение стандартного отклонения (или доверительного интервала). Если

первая значащая цифра — **единица** или **двойка**, то после округления следует оставить две значащие цифры, если тройка или более — то одну. Это правило не является строгим — главное, чтобы вносимая при этом относительная погрешность округления не превышает 15%.

Примеры до округления $\sigma_x = 0{,}0192714$; после округления $\sigma_x = 0{,}019$, или лучше $\sigma_x = 0{,}02$;

до округления $\sigma_y = 0{,}1338692$; после округления $\sigma_y = 0{,}13$;

до округления $\Delta_{\text{сумм}} = 287{,}32$; после округления $\Delta_{\text{сумм}} = 0{,}3 \cdot 10^3$ (если применить запись $\Delta_{\text{сумм}} = 300$, то нули станут значащими цифрами).

3. Далее округляется значение искомой величины таким образом, чтобы ее последняя значащая цифра находилась на той же позиции, что и последняя значащая цифра стандартного отклонения (доверительного интервала).

Примеры

Результат вычислений —	$a = 1{,}432526518$,	$\sigma_a = 0{,}01338692$;
	$x = 5{,}29572418$,	$\sigma_a = 0{,}01927142$;
	$y = 5{,}29572418$,	$\sigma_y = 0{,}81938692$;
	$z = 72155{,}29$,	$\Delta_{\text{сумм}} = 287{,}32$;
результат округления —	$a = 1{,}433$,	$\sigma_a = 0{,}013$;
	$x = 5{,}30$,	$\sigma_a = 0{,}019$;
	$y = 5{,}3$,	$\sigma_y = 0{,}8$;
	$z = 72{,}2 \cdot 10^3$,	$\Delta_{\text{сумм}} = 0{,}3 \cdot 10^3$.

4. Если вычислялся доверительный интервал (с использованием коэффициентов Стьюдента или Чебышева), то в окончательной записи должно быть указано значение коэффициента доверия α.

5. Если для искомого значения указан порядок (например, 10^2 или 10^3), то такой же порядок должен быть указан и для значения доверительного интервала.

6. При записи окончательного результата сначала указывается искомое значение, затем ставится знак плюс-минус, далее значение доверительного интервала, порядок (если необходимо), затем единицы измерения и потом значение коэффициента доверия α.

Примеры

$x = 34{,}5 \pm 0{,}7$ см, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

$v = (4{,}38 \pm 0{,}04) \cdot 10^{-3}$ м/с, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}90$.

$h = (72{,}2 \pm 0{,}3) \cdot 10^3$ м, коэффициент доверия $\alpha = 0{,}95$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1. Значения коэффициента Стьюдента $t_{\alpha,n-1}$, при различных значениях коэффициента доверия α и объема выборки n.

$n-1$	α					
	0,4	0,6	0,8	0,9	0,95	0,99
1	0,33	1,38	3,08	6,31	12,71	63,66
2	0,29	1,06	1,89	2,92	4,30	9,93
3	0,28	0,98	1,64	2,35	3,18	5,84
4	0,27	0,94	1,53	2,13	2,78	4,60
5	0,27	0,92	1,48	2,02	2,57	4,03
6	0,27	0,91	1,44	1,94	2,45	3,71
7	0,26	0,90	1,42	1,90	2,37	3,50
8	0,26	0,89	1,40	1,86	2,31	3,36
9	0,26	0,88	1,38	1,83	2,26	3,25
10	0,26	0,88	1,37	1,81	2,23	3,17
20	0,26	0,86	1,33	1,73	2,09	2,85
120	0,25	0,85	1,29	1,68	1,98	2,62

Таблица 2. Значения коэффициента Чебышева $\gamma_\alpha = 1/\sqrt{1-\alpha}$ при различных значениях коэффициента доверия α.

α	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
γ_α	1,41	1,58	1,83	2,24	3,16	4,47

Список основной литературы

1. *Тейлор Дж.* Введение в теорию ошибок / Пер. с англ. М.: Мир, 1985, 272с.

2. Общий физический практикум. Механика / Под ред. А.Н.Матвеева и Д.Ф.Киселева. — М.: Изд-во Моск. ун-та. 1991.

3. *Деденко Л.Г., Керженцев В.В.* Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977, 112с.

Список дополнительной литературы

1. *Худсон Д.* Статистика для физиков. М.: Мир, 1967, 244с.

2. *Сквайре Дж.* Практическая физика. / Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 246с.

3. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974, 108 с.

4. *Евтихиев Н.Н., Купершмидт Я.А., Папуловский В.Ф., Скугоров В.Н.* Измерение электрических и неэлектрических величин. М.: Энергоатомиздат, 1990, 352 с.

5. *Новицкий П.В., Зограф И.А.* Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1991, 304с.