ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика поступательного движения АТТ

Динамика поступательного движения АТТ

При поступательном движении АТТ все его точки описывают одинаковые траектории и имеют в каждый момент времени одинаковые по модулю и направлению скорости и ускорения

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext}$$

Поскольку закон динамики поступательного движения АТТ совпадает с аналогичным уравнением для МТ, то

описание динамики поступательного движения АТТ сводится к описанию динамики МТ

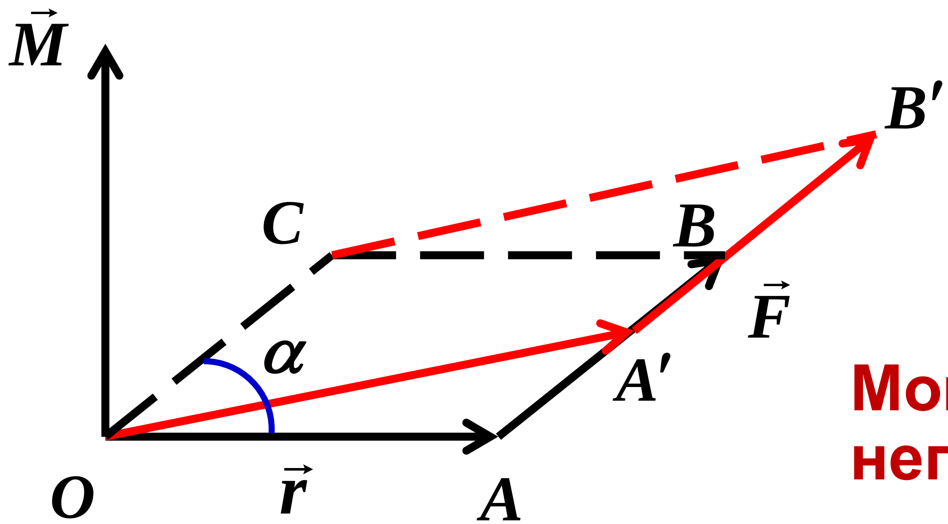
При поступательном движении АТТ можно рассматривать как систему МТ и считать массу тела сосредоточенной в одной точке, к которой приложены все <u>внешние</u> силы (<u>центр масс системы</u>)

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Динамика вращательного движения АТТ

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки



Момент силы относительно неподвижной точки:

$$\vec{M} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]$$

Свойства:

– момент не изменится, если точку приложения силы перенести в любую другую точку, расположенную <u>на линии действия силы</u>

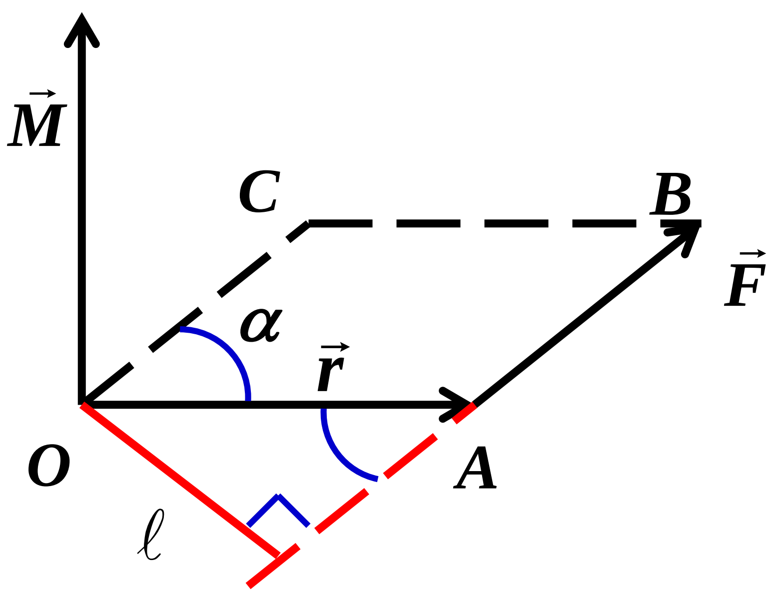
– если <u>линия действия силы </u>проходит через точку О, то момент силы равен нулю

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

– момент равнодействующей двух или нескольких сил относительно одной неподвижной точки равен геометрической сумме моментов составляющих сил относительно той же точки

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \qquad \vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$$

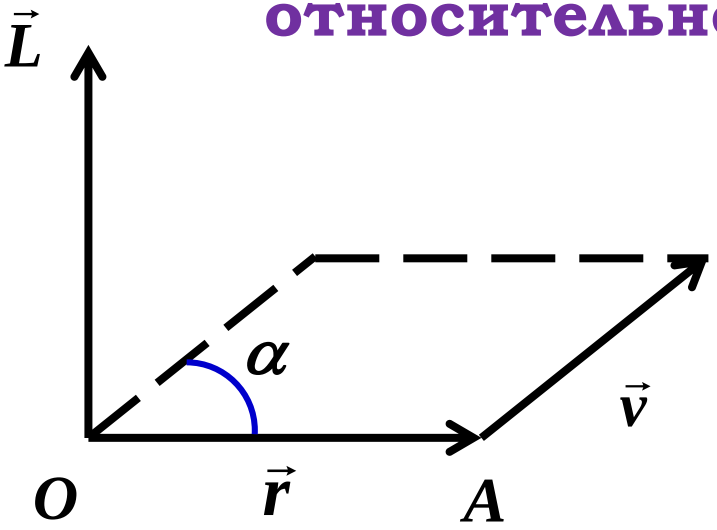
$$\left[\vec{r}, \vec{F}\right] = \left[\vec{r}, \vec{F}_1\right] + \left[\vec{r}, \vec{F}_2\right]$$



Плечо силы – кратчайшее расстояние от неподвижной точки до линии действия силы:

$$\boxed{\ell = r\sin\alpha}$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки



Момент импульса относительно неподвижной точки:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right]$$

$$\left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] = [\vec{v}, m\vec{v}] = 0 \qquad \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} d\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt$$

$$\boxed{\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}dt}$$

Уравнение моментов: **скорость изменения момента импульса МТ относительно <u>неподвижного</u> начала равна моменту силы, действующей на МТ, относительно <u>того же</u> начала**

Для системы МТ: $$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{ext}}$$

Скорость изменения момента импульса системы МТ относительно <u>неподвижного</u> начала равна <u>геометрической сумме моментов</u> всех <u>внешних</u> сил, действующих на все МТ системы, относительно <u>того же</u> начала

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Пусть

$$\vec{M}^{ext} = 0 \qquad \boxed{\vec{L} = \sum \vec{L}_i(t) = const}$$

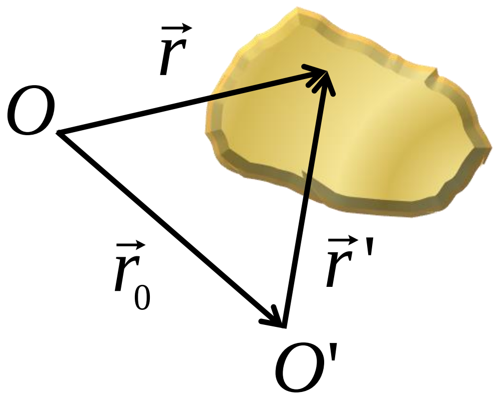
Если <u>момент внешних сил</u> относительно неподвижного начала равен нулю, то момент импульса системы МТ относительно того же начала остается постоянным во времени

– закон сохранения момента импульса

Изотропность пространства означает, что протекание физических явлений в замкнутой системе не изменяется при ее повороте в пространстве

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Изменение положения неподвижной точки:



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 \qquad \vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_0, \vec{p}]$$

Ц-система: $\vec{p} = 0 \qquad \vec{L} = \vec{L}'$

В Ц-системе момент импульса системы МТ не зависит от выбора начала

L' – ***собственный момент импульса***

$[\vec{r}_0, \vec{p}]$ – ***орбитальный момент импульса***

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{r}_0 \qquad \vec{M} = \vec{M}' + [\vec{r}_0, \vec{F}]$$

Ц-система: $\vec{F} = 0 \qquad \vec{M} = \vec{M}'$

В Ц-системе момент силы системы МТ не зависит от выбора начала

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

В поле центральных сил:

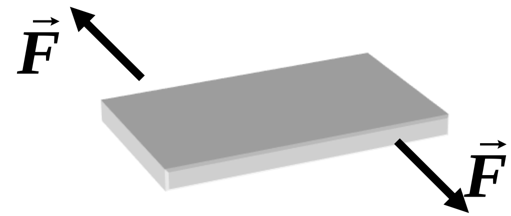
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}\,] = \left[\vec{r}, \frac{\beta}{r^3}\vec{r}\right] = 0$$

В поле центральных сил момент импульса МТ (системы МТ) сохраняется

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной точки

Пара сил – совокупность двух параллельных друг другу сил, равных по величине и противоположно направленных



Момент пары сил не зависит от выбора начала и равен произведению модуля одной из сил на плечо пары

Плечо пары сил – кратчайшее расстояние между параллельными прямыми, вдоль которых действуют силы, образующие пару сил

Пара сил не имеет равнодействующей, т.е. совместное действие пары сил нельзя заменить действием одной силы. Пара сил не изменяет поступательное движение тела, а только вызывает его вращение

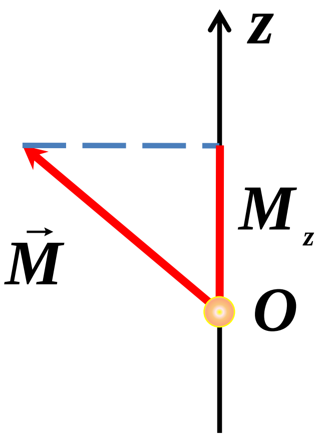
При воздействии на тело, не имеющее закрепленной оси вращения, <u>пара сил вызывает его вращение вокруг оси</u>, проходящей <u>через центр масс</u> данного тела

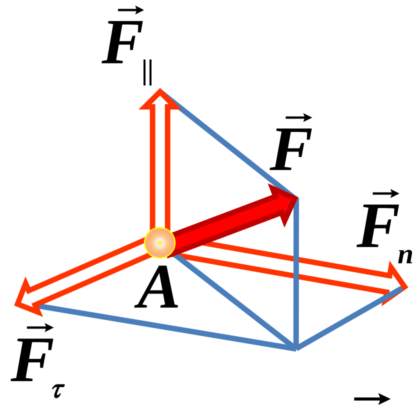
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси

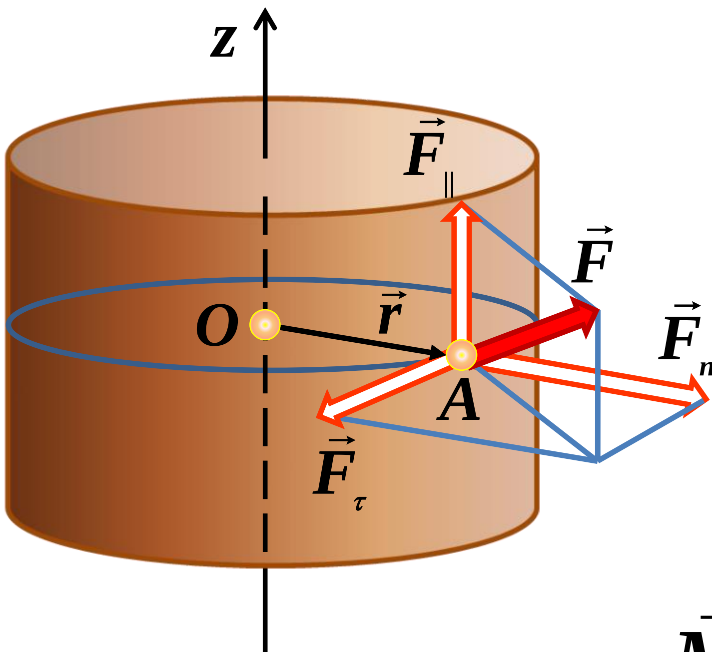
Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси

Момент силы относительно оси есть проекция на эту ось момента силы относительно точки, лежащей на этой оси

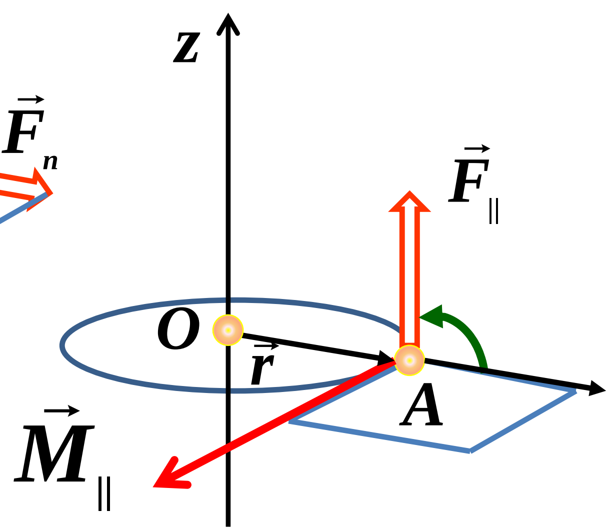




$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_n + \vec{F}_{\tau}$$

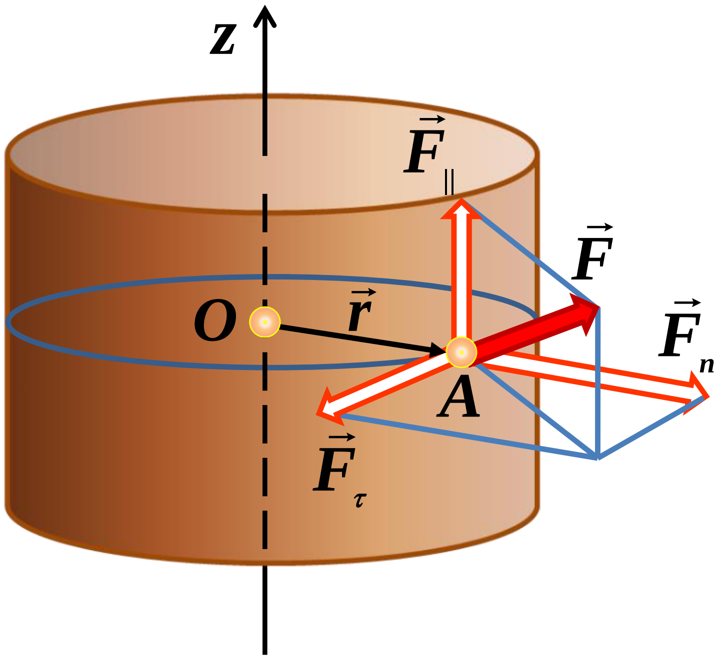


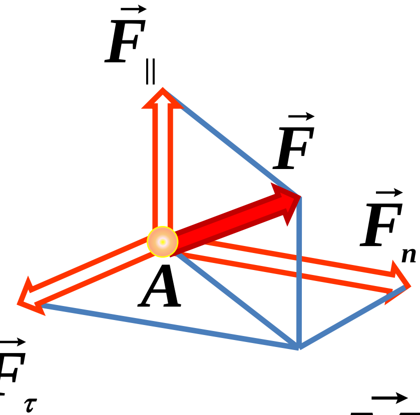
$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_n + \vec{M}_{\tau}$$



$$M_{\parallel z} = 0$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси



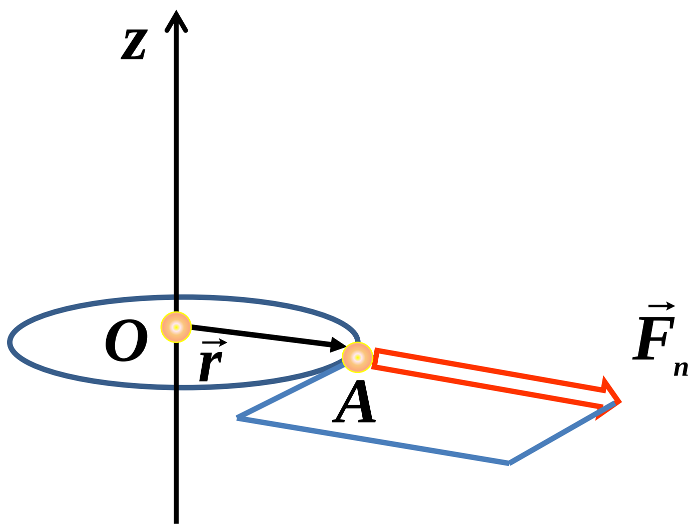


$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$$

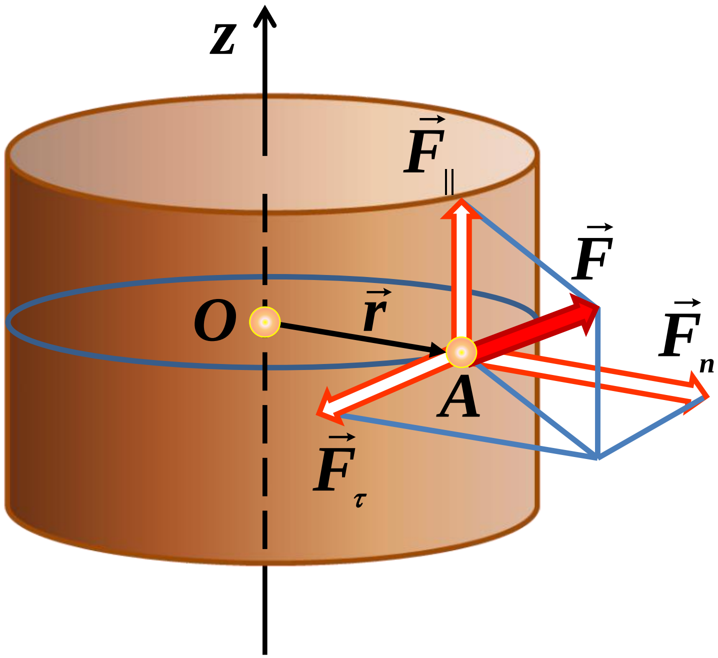
$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_n + \vec{M}_\tau$$

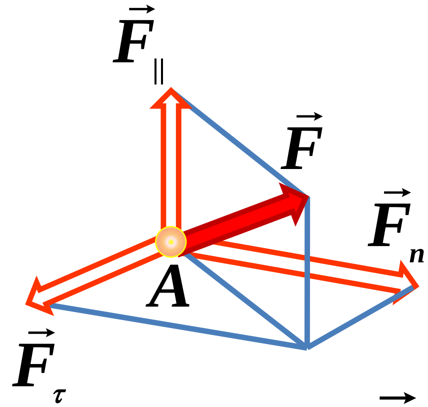
$$M_{\parallel z} = 0$$

$$M_{nz} = 0$$



Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси



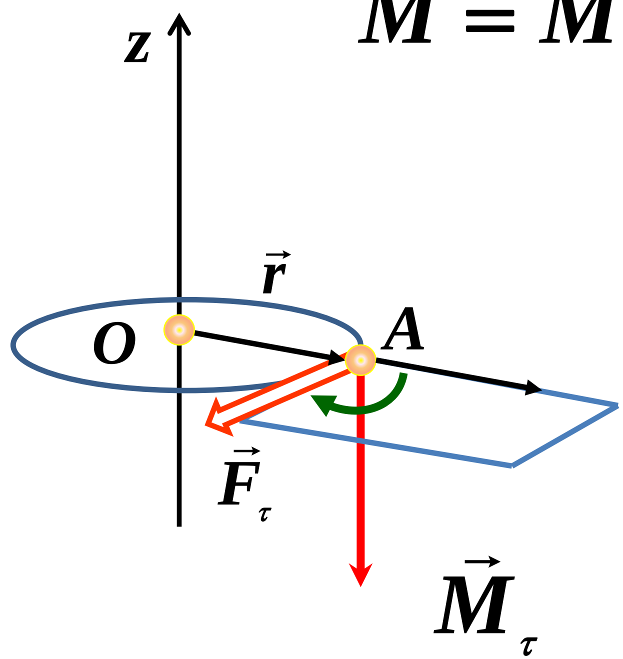


$$\vec{F} = \vec{F}_{\parallel} + \vec{F}_n + \vec{F}_\tau$$

$$\vec{M} = \vec{M}_{\parallel} + \vec{M}_n + \vec{M}_\tau$$

$$M_{\parallel z} = 0$$

$$M_{nz} = 0$$



$$\boxed{M_z = M_{\tau z} = F_\tau h}$$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси

Результирующий момент силы ***относительно оси*** равен ***моменту тангенциальной составляющей этой силы относительно точки*** оси, ближайшей к точке приложения силы

Только ***тангенциальная составляющая*** силы способна ***вызвать вращение*** тела вокруг ***закрепленной*** оси

Чем ***дальше от оси*** расположена ***точка приложения*** тангенциальной составляющей, тем ***легче осуществить поворот*** вокруг этой оси

Момент силы относительно оси характеризует способность силы вращать тело относительно данной оси

Момент силы относительно точки, в которой закреплено тело, характеризует способность силы вращать тело вокруг этой точки. Причем ***поворот произойдет вокруг оси***, ***параллельной вектору момента сил***

При вращательном движении силовое воздействие характеризуется не силой, а моментом силы

Момент силы и момент импульса относительно неподвижной оси

Ось z:

Уравнение моментов относительно неподвижной оси z

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^{внеш}$$

$$\boxed{M_z^{внеш} = 0}$$

$$\boxed{L_z = \sum_i L_{zi}(t) = const}$$

Закон сохранения момента импульса относительно неподвижной оси z

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Вращение вокруг неподвижной оси

Вращение вокруг неподвижной оси

Движение материальной точки по окружности

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}] = m[\vec{r}, \vec{v}] = mr^2\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

Момент инерции МТ

$$\boxed{I = mr^2}$$

Уравнение динамики вращ. движения МТ

$$\boxed{\frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = \vec{M}}$$

$$I\vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси z

$$L_z = \omega \sum_i m_i r_i^2$$

$$L_z = I_z \omega$$

Момент инерции АТТ (системы МТ)

$$\boxed{I_z = \int r^2 dm} \quad \boxed{I_z = \sum_i m_i r_i^2}$$

Уравнение динамики вращения АТТ вокруг неподвижной оси z

$$\boxed{\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z}$$

$$I_z \varepsilon = M_z$$

Вращение вокруг неподвижной оси

$$I_z \varepsilon = M_z$$

***Момент инерции* – мера инертности тела при вращательном движении**

$$I_z = \int r^2 dm$$

Момент инерции АТТ зависит от:

-массы тела;

-формы и размеров тела;

-распределения массы относительно оси вращения, в частности, выбора оси вращения

При переносе ***оси вращения*** или ***частей тела*** момент инерции ***изменяется***

Вращение вокруг неподвижной оси

Кинетическая энергия вращающегося АТТ вокруг неподвижной оси:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i \omega^2 r_i^2$$

$$\boxed{K = \frac{I_z \omega^2}{2} = \frac{L_z^2}{2I_z}}$$

Вращение вокруг неподвижной оси

Работа внешних сил при вращении АТТ вокруг неподвижной оси:

$$\delta A=\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=F_{\tau}ds=F_{\tau}rd\varphi=M_{z}d\varphi$$

$$\boxed{A=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}M_{z}d\varphi}$$

$$\delta A=M_{z}d\varphi=I_{z}\frac{d\omega}{dt}\omega dt=I_{z}\omega d\omega$$

$$\boxed{A_{12}=\frac{I_{z}\omega_{2}^{2}}{2}-\frac{I_{z}\omega_{1}^{2}}{2}}$$

Вращение вокруг неподвижной оси

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	I
Скорость	$\vec{\upsilon} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
Сила	$\vec{F}$	Момент силы	$\vec{M}$
Импульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент импульса	$\vec{L} = I\vec{\omega}$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s dS$	Работа	$dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия	$\dfrac{m\upsilon^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\dfrac{I\omega^2}{2}$

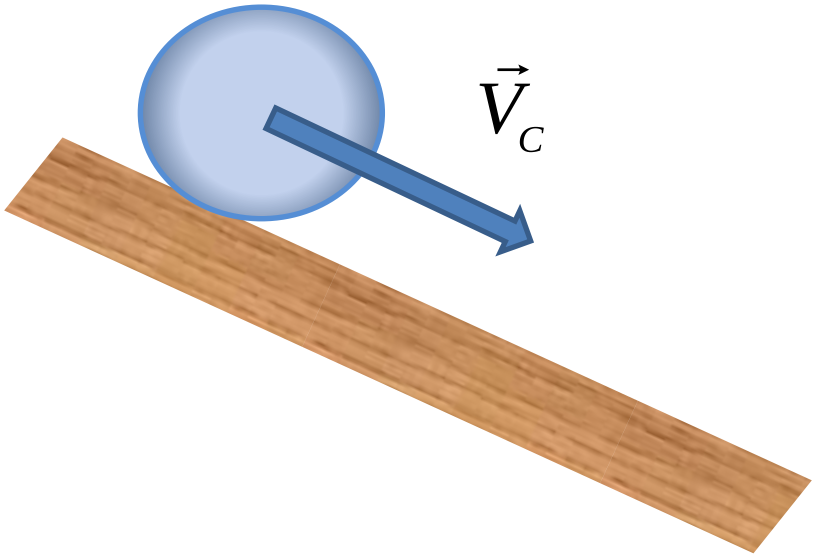
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Плоское движение твердого тела

Плоское движение твердого тела

Кинетическая энергия при плоском движении АТТ :

$$K = \tilde{K} + \frac{mV_C^{\,2}}{2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{I_C \omega^2}{2} + \frac{mV_C^{\,2}}{2}$$



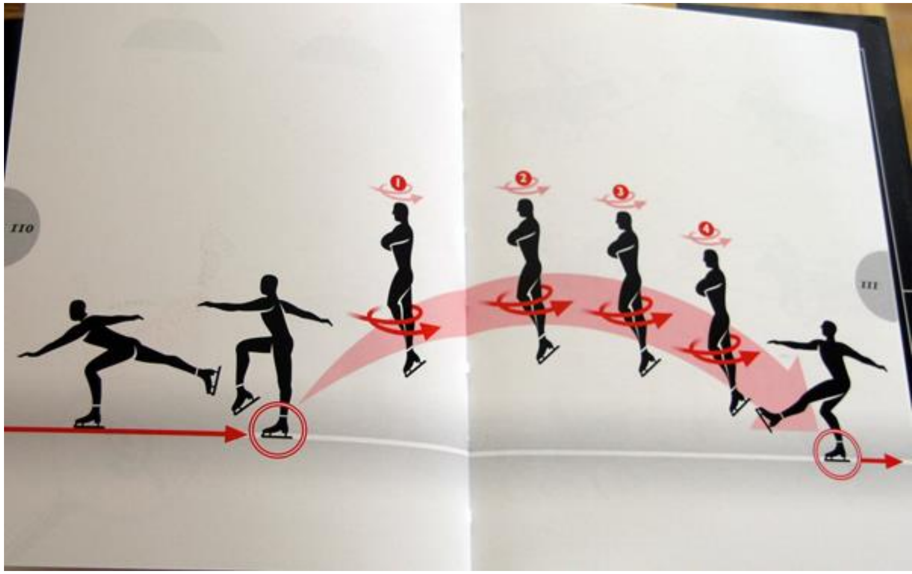
ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Примеры сохранения момента импульса

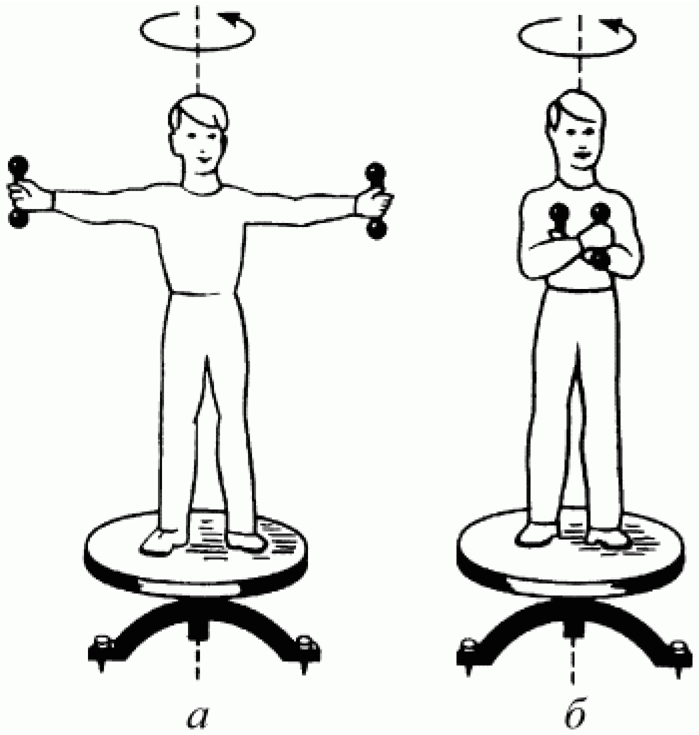
Примеры сохранения момента импульса

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш} \qquad \vec{M}_{внеш} = 0 \rightarrow L = I\omega = const \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Пируэт



Скамья Жуковского



Сальто

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Расчет момента инерции

Момент инерции

Тело	Положение оси	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр (кольцо) радиуса R и массы m	Ось цилиндра (кольца)	*Практ.*
Тонкостенное кольцо радиуса R и массы m	Ось лежит в плоскости кольца и проходит через его середину	*Самост.*
Полый тонкостенный цилиндр длины l, радиуса R и массы m	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину	*Самост.*
Сплошной цилиндр (диск) радиуса R и массы m	Ось цилиндра	*Практ.*
Сплошной цилиндр массы m с внешним радиусом R_2 и внутренним радиусом R_1	Ось цилиндра	*Практ.*
Сплошной диск радиуса R и массы m	Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину	*Лекция*

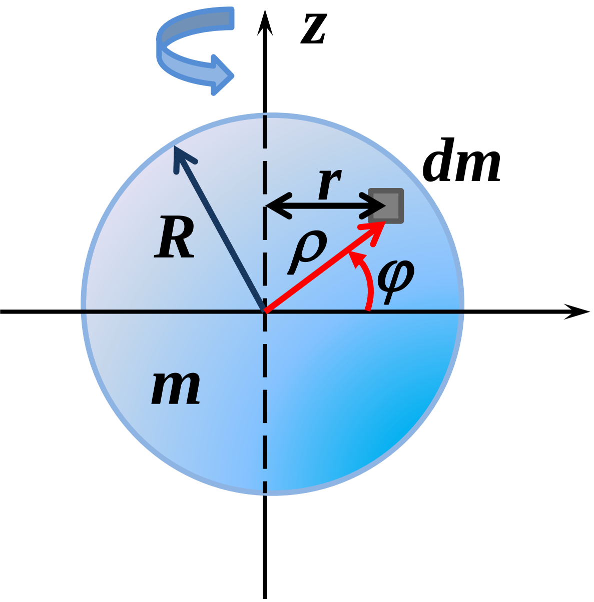
Момент инерции

Тело	Положение оси	Момент инерции
Сплошной цилиндр длины *l*, радиуса *R* и массы *m*	Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину	*Лекция*
Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m*	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его середину	*Практ.*
Прямой тонкий стержень длины *l* и массы *m*	Ось перпендикулярна к стержню и проходит через его конец	*Практ.*
Тонкостенная сфера радиуса *R* и массы *m*	Ось проходит через центр сферы	*Самост.*
Шар радиуса *R* и массы *m*	Ось проходит через центр шара	*Лекция*

Момент инерции

Сплошной диск радиуса R и массы m

Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину



$$I_z = \int r^2 dm$$

$$dm = d(\rho_0 \cdot V) \qquad dV = d(h \cdot S)$$

$$dm = \rho_0 dV \qquad dV = h dS$$

$$I_z = \rho_0 h \int r^2 dS \qquad dS = dxdy$$

$$dS = \rho d\rho d\varphi$$

$$r = \rho \cos\varphi$$

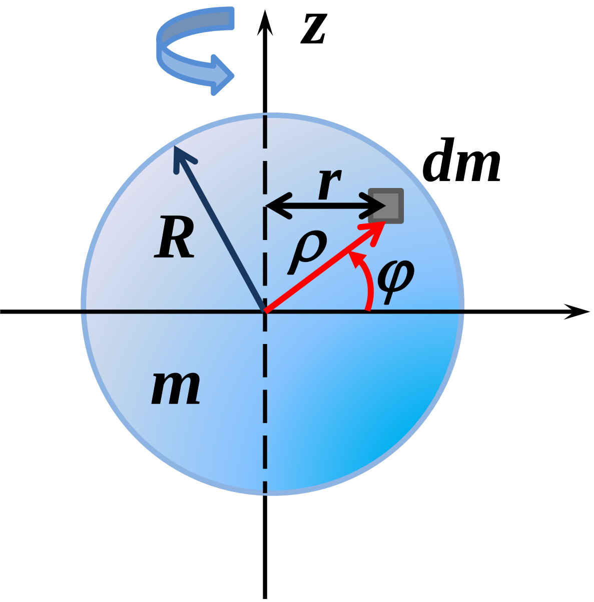
$$I_z = \rho_0 h \iint (\rho\cos\varphi)^2 \rho d\rho d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi$$

Момент инерции

Сплошной диск радиуса R и массы m

Ось лежит в плоскости диска и проходит через его середину



$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\varphi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi d\varphi \right)$$

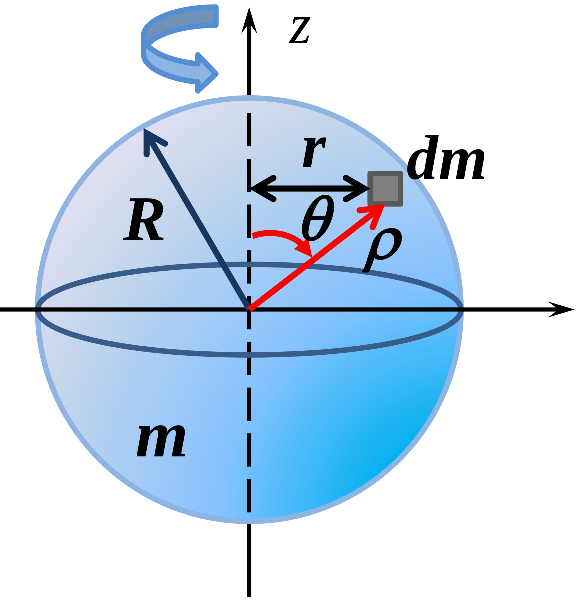
$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \left(\pi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \Bigg|_0^{2\pi} \right)$$

$$I_z = \rho_0 h \frac{R^4}{4} \pi \qquad V = \pi R^2 h \qquad \boxed{I_z = \frac{mR^2}{4}}$$

Момент инерции

Шар радиуса R и массы m

Ось проходит через центр шара



$$I_z = \int r^2 dm = \int r^2 d(\rho_0 V) = \rho_0 \int r^2 dV$$

$$dV = dxdydz \qquad dV = \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$r = \rho \sin\theta$$

$$I_z = \rho_0 \iiint (\rho \sin\theta)^2 \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 \int_0^R \rho^4 d\rho \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$I_z = \rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

Момент инерции

__Шар радиуса R и массы m__

Ось проходит через центр шара

$$I_z = \rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\theta\right) \sin\theta \, d\theta$$

$$I_z = \rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2\theta\right) d\left(-\cos\theta\right)$$

$$I_z = -\rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \left(\int_0^{\pi} d\left(\cos\theta\right) - \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\left(\cos\theta\right) \right)$$

$$I_z = -\rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \left(\cos\theta \Big|_0^{\pi} - \frac{\cos^3\theta}{3} \Bigg|_0^{\pi} \right)$$

$$I_z = \rho_0 \frac{R^5}{5} 2\pi \frac{4}{3} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3 \qquad \boxed{I_z = \frac{2}{5} m R^2}$$

ДИНАМИКА АБСОЛЮТНО ТВЕРДОГО ТЕЛА

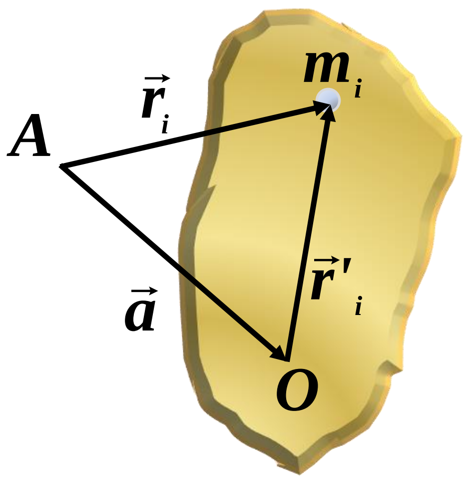
Расчет момента инерции

Момент инерции

Теорема Гюйгенса – Штейнера: ***Момент инерции I твердого тела относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_C этого тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями***

$$I = I_C + ma^2$$

Доказательство:



$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i \left(\vec{r}_i\,' + \vec{a}\right)^2$$

$$I = \sum_i m_i r_i'^2 + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}_i\,') + a^2 \sum_i m_i$$

$$I = I_O + 2(\vec{a}, \sum_i m_i \vec{r}_i\,') + ma^2$$

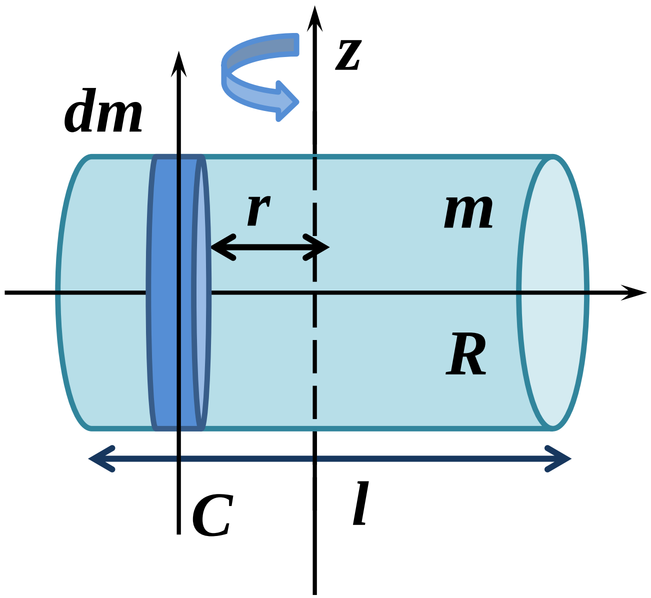
$$\vec{R}_{CO} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \qquad \sum_i m_i \vec{r}_i\,' = m\vec{R}_{CO}$$

$$I = I_O + 2m(\vec{a}, \vec{R}_{CO}) + ma^2$$

Момент инерции

Сплошной цилиндр длины *l*, радиуса *R* и массы *m*

Ось перпендикулярна к цилиндру и проходит через его середину



$$dI_z = dI_C + r^2 dm \qquad dI_C = dm\frac{R^2}{4}$$

$$I_z = \frac{R^2}{4}\int dm + \int r^2 dm$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int r^2 dV$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 \int_{-l/2}^{l/2} r^2 dr \cdot S$$

$$I_z = \frac{mR^2}{4} + \rho_0 S \frac{l^3}{12}$$

$$\boxed{I_z = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12}}$$