Олимпиада по математике 1 тур
17 марта 2016 года • 2-4 курсы

ЗАДАЧА 1.

Дана матрица B = $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. При каждом a существует два разных собственных числа и два линейно независимых собственных вектора. Найти предел угла между этими собственными векторами при $a \to \infty$ и при $a \to 0$.

РЕШЕНИЕ. Характеристическая матрица: $\begin{vmatrix} \lambda - a & -a \\ 0 & \lambda - a^2 \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - a^2) = 0$.

Собственные числа $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = a^2$. Найдём собственные векторы.

$\lambda_1 = a \quad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & a - a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$, вектор (1,0).

$\lambda_2 = a^2 \begin{pmatrix} a^2 - a & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a(a-1)x_1 = ax_2$, вектор $(1, a-1)$.

Угол между ними можно вычислить с помощью скалярного произведения и их модулей.

$$\cos\varphi = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{1 + (a-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}}$$

Предел $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = 0$ - это косинус предельного угла, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = 90^0$.

При $a \to 0$ получаем $\lim\limits_{a \to 0} \frac{1}{\sqrt{a^2 - 2a + 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^0$.

ОТВЕТ. $90^{\,0}$ и 45^0.

ЗАДАЧА 2.

Найти отношение произведения всех элементов матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{2015}$ к сумме всех элементов этой матрицы.

РЕШЕНИЕ. $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, A^6 = \begin{pmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 5^3 \end{pmatrix}$ Таким образом, для всех чётных степеней ответ известен, в частности $A^{2014} = \begin{pmatrix} 5^{1007} & 0 \\ 0 & 5^{1007} \end{pmatrix}$. Тогда $A^{2015} = \begin{pmatrix} 5^{1007} & 2 \cdot 5^{1007} \\ 2 \cdot 5^{1007} & -5^{1007} \end{pmatrix}$ и сумма равна $4 \cdot 5^{1007}$, а произведение $-4 \cdot (5^{1007})^4 = -4 \cdot 5^{4028}$. Отношение произведения к сумме

$$\frac{-4 \cdot 5^{4028}}{4 \cdot 5^{1007}} = -\frac{5^{4028}}{5^{1007}} = -5^{3021}.$$

ОТВЕТ. Отношение произведения всех элементов матрицы к сумме всех элементов этой матрицы равно -5^{3021}.

ЗАДАЧА 3.

Пусть движение материальной точки вдоль оси Ох задано дифференциальным уравнением $x''(t) = -x(t) - ax'(t)$, где a - коэффициент сопротивления среды ($a > 0$). При $t = 0$ точка имеет координату $x(0) = 1$ и скорость $x'(0) = v$, $v > 0$. Существует некоторое сопротивление, наименьшее из возможных, при котором не происходит процесс колебаний. Для этого сопротивления вычислите среднюю скорость точки в промежутке времени от $t = 0$ до момента максимального удаления от начала координат.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в виде $x''(t) + ax'(t) + x(t) = 0$.

Характеристическим уравнением для этого линейного однородного дифф. уравнения является $r^2 + ar + 1 = 0$. Дискриминант $D = a^2 - 4$.

При $a^2 - 4 > 0$, то есть $a > 2$, имеется два действительных корня, и решение вида $C_1 e^{-st} + C_2 e^{-mt}$.

При $a^2 - 4 < 0$, то есть при $a < 2$, только комплексные корни, тогда решение имеет вид $e^{-pt}(C_1 \cos qt + C_2 \sin qt)$ (это соответствует процессу затухающих колебаний). Тогда $a = 2$ наименьшее из возможных, когда корни действительные. Но при этом получается кратный корень, так как характеристическое уравнение имеет вид $r^2 + 2r + 1 = 0$, т.е. $(r+1)^2 = 0$.

Итак, кратный корень $r = -1$, в этом случае общее решение дифф. уравнения имеет вид $x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}$.

Тогда производная $x'(t) = -C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t} - C_2 te^{-t}$

Применим условия Коши, получаем $\begin{cases} C_1 & = 1 \\ -C_1 + C_2 & = v \end{cases}$, то есть $C_1 = 1$, $C_2 = v + 1$, тогда

$$x(t) = e^{-t} + (v+1)te^{-t}, \qquad x'(t) = ve^{-t} - (v+1)te^{-t}$$

Теперь нам нужно найти такой момент времени, когда точка, запущенная со скоростью v, останавливается, то есть $x'(t) = 0$, при этом достигается максимальное расстояние от начала координат, обозначим его L.

$$\begin{cases} e^{-t} + (v+1)te^{-t} & = L \\ ve^{-t} - (v+1)te^{-t} & = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения: $v - (v+1)t = 0$, то есть $t = \dfrac{v}{v+1}$.

Сложив равенства, получим $(1+v)e^{-t} = L$, то есть максимальное удаление

$L = (v+1)e^{-\frac{v}{v+1}}$. Но изначально точка была на расстоянии 1 от начала координат, то есть пройдено расстояние $L - 1 = (v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1$, причём, как уже было установлено, это произойдёт за время $t = \dfrac{v}{v+1}$. Тогда средняя скорость $\dfrac{L-1}{t} = \dfrac{v+1}{v}\left((v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1\right)$.

ОТВЕТ. Средняя скорость равна $\dfrac{v+1}{v}\left((v+1)e^{-\frac{v}{v+1}} - 1\right)$.

ЗАДАЧА 4.

Найти такое отношение высоты к радиусу основания конуса, чтобы при фиксированном объёме площадь боковой поверхности конуса была минимальна.

Справка. Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $\pi R l$, где l - длина боковой образующей.

РЕШЕНИЕ. Объём конуса $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, боковая образующая вычисляется по теореме Пифагора: $l=\sqrt{R^2+h^2}$. Найти экстремум величины $\pi R l$ при фиксированном объёме V. Сначала выразим высоту через R: $h=\frac{3V}{\pi R^2}$. Тогда $l=\sqrt{R^2+\left(\frac{3V}{\pi R^2}\right)^2}$. $\pi R l=$

$$\pi R\sqrt{R^2+\left(\frac{3V}{\pi R^2}\right)^2}=\pi R\sqrt{R^2+\frac{9V^2}{\pi^2 R^4}}=\pi R\sqrt{\frac{\pi^2 R^6+9V^2}{\pi^2 R^4}}=\pi R\frac{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}{\pi R^2}=\frac{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}{R}.$$

Найдём условие, при котором производная по R равна 0.

$$\left(\frac{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}{R}\right)'=\frac{\frac{6R^5\pi^2}{2\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}R-\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}{R^2}=0$$

$$\frac{3R^5\pi^2}{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}R=\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2},\ 3R^6\pi^2=\pi^2 R^6+9V^2,\ \ 2R^6\pi^2=9V^2, R^6=\frac{9}{2}\frac{V^2}{\pi^2},\ R=\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$$

Замечание. Можно также убедиться, что получили минимум, а не максимум. Для этого установим тот факт, что вторая производная по параметру R положительна.

$$\left(\frac{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}{R}\right)''=\frac{1}{R^2}\left(\frac{3R^6\pi^2}{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}}-\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{R^2}\left(\frac{18R^5\pi^2\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}-\left(\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}\right)'3R^6\pi^2}{\pi^2 R^6+9V^2}\right)-\frac{1}{R^2}\frac{6\pi^2 R^5}{2\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}},$$ *что в итоге сводится к выражению*

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{18R^5\pi^2\left(\pi^2 R^6+9V^2\right)-3\pi^2 R^5 3R^6\pi^2}{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}^3}-\frac{3\pi^2 R^5\left(\pi^2 R^6+9V^2\right)}{\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}^3}\right)$$ *Умножим на положительную величину* $R^2\sqrt{\pi^2 R^6+9V^2}^3$, *теперь достаточно проверить знак выражения:*

$$18R^5\pi^2\left(\pi^2 R^6+9V^2\right)-3\pi^2 R^5 3R^6\pi^2-3\pi^2 R^5\left(\pi^2 R^6+9V^2\right)$$

После приведения подобных получаем:

$3\pi^2 R^5(2R^6\pi^2+45V^2)$ *>0*

Подставим найденное выражение $R=\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ в h: $h=\frac{3V}{\pi R^2}=\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}$. Найдём соотношение $\frac{h}{R}$.

$$\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}=\frac{3V}{\pi\left(\sqrt[6]{\frac{9}{2}}\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right)^3}=\frac{3V}{\pi\sqrt{\frac{9}{2}}\frac{V}{\pi}}=\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{2}}}=\sqrt{2}.$$

ОТВЕТ: $\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА 5. (Площадь поверхности + теория вероятности).
Пусть падение небольшого метеорита в любой точке планеты равновероятно. Рассчитать при этом условии вероятность того, что метеорит упадёт на территории между параллелями φ_1 и φ_2 северной широты.
Примечание. В расчётах планету считать идеальным шаром.

РЕШЕНИЕ . Для того, чтобы вычислить вероятность падения метеорита между широтами φ_1 и φ_2, нужно вычислить, какая доля поверхности полусферы находится в данной полосе. Полная поверхность сферы $4\pi R^2$. Так как рассматривается северное полушарие, то широты φ_1 и φ_2 > 0.
Уравнение верхней полусферы $z = f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.
Формула площади поверхности для явно заданной функции: $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dxdy$.

Не теряя общности, положим $\varphi_1 < \varphi_2$. Тогда область D в плоскости 0xy, над которой расположена искомая часть полусферы, это кольцо, определяемое максимальным радиусом $R\cos\varphi_1$ и минимальным $R\cos\varphi_2$, так как изначально взяли $\varphi_1 < \varphi_2$. Вычислим частные производные:

$$f'_x = \frac{-2x}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \quad \text{и} \quad f'_y = \frac{-2y}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Подставим их в формулу площади поверхности.

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy.$$

Перейдём к полярным координатам. Определитель Якоби в этом случае равен ρ.

$$\iint\limits_D \sqrt{\frac{R^2}{R^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \rho\sqrt{\frac{R^2}{R^2 - \rho^2}}\,d\rho = R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,d\rho =$$

$$-R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{-2\rho}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}}\,d\rho = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} \frac{d(R^2 - \rho^2)}{2\sqrt{R^2 - \rho^2}} = -R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{R^2 - \rho^2}\Big|_{R\cos\varphi_2}^{R\cos\varphi_1} =$$

$$-R\int\limits_0^{2\pi} d\varphi R\left(\sqrt{1 - \cos^2\varphi_1} - \sqrt{1 - \cos^2\varphi_2}\right) = -R^2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2\right) =$$

$$R^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi R^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right).$$

Отношение этой величины к площади сферы:

$$\frac{2\pi R^2\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)}{4\pi R^2} = \frac{1}{2}\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right).$$

Примечание. Если φ_1 *и* φ_2 *равны* 0^0 *и* $+90^0$ *, то область охватывает северное полушарие, тогда P=1/2.*

ОТВЕТ. $\frac{1}{2}\left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\right)$.

ЗАДАЧА 6.
На прямой $y = ax$ при любом параметре $a \in \mathbb{R}$ есть точка, ближайшая к точке (C,0). Найти неявное уравнение кривой, которую образуют все такие точки при $a \in \mathbb{R}$.

РЕШЕНИЕ.
Пусть точка является ближайшей к (C,0). Тогда вектор $(1,a)$, расположенный на прямой, перпендикулярен вектору, соединяющему точку (x,ax) с точкой $(C,0)$, то есть вектору
$(x-C,ax)$. Скалярное произведение векторов $(1,a)$ и $(x-C,ax)$ равно 0, то есть $x - C + a^2 x = 0$. Отсюда можно найти абсциссу точки, которая является ближайшей к указанной. $(1+a^2)x = C$, $x = \dfrac{C}{1+a^2}$. Тогда $y = \dfrac{Ca}{1+a^2}$. Это параметрические уравнения кривой. Чтобы найти неявное уравнение кривой, нужно устранить зависимость от параметра, то есть выразить a из одного уравнения и подставить во второе. Из первого уравнения: $a^2 x = C - x$, $a^2 = \dfrac{C-x}{x}$, $a = \pm\sqrt{\dfrac{C-x}{x}}$.

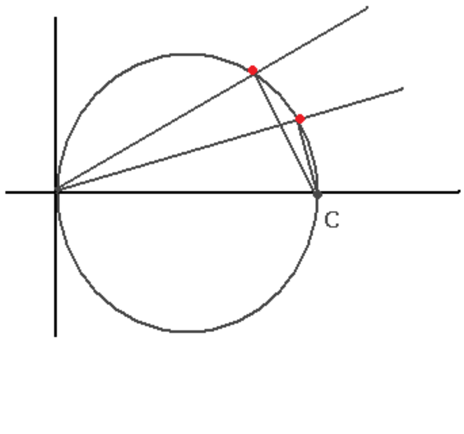
$$y = \frac{Ca}{1+a^2} = \pm C\sqrt{\frac{C-x}{x}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{C-x}{x}} = \pm C\sqrt{\frac{C-x}{x}} \cdot \frac{x}{x+C-x} = \pm\sqrt{\frac{C-x}{x}} \cdot x = \pm\sqrt{C-x} \cdot \sqrt{x}$$

$y = \pm\sqrt{C-x} \cdot \sqrt{x}$ тогда $y^2 = (C-x)x$, $y^2 = Cx - x^2$, $y^2 + x^2 - Cx = 0$, выделим полный квадрат:
$y^2 + \left(x - \dfrac{C}{2}\right)^2 - \dfrac{C^2}{4} = 0$, $\left(x - \dfrac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{C^2}{4}$.

Таким образом, кривая, состоящая из точек, являющихся ближайшими к (C,0), есть окружность с центром в точке $\left(\dfrac{C}{2},0\right)$ радиуса $\dfrac{C}{2}$.

ОТВЕТ. $\left(x - \dfrac{C}{2}\right)^2 + y^2 = \dfrac{C^2}{4}$ окружность с центром в точке $\left(\dfrac{C}{2},0\right)$ радиуса $\dfrac{C}{2}$.

Чертёж:



ЗАДАЧА 7. (Мат.анализ + ряды).

Пусть $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}$, $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$, … $f_{n+1}(x)=\ln\left(f_n(x)\right)$. Пусть a_n - точная верхняя граница области определения функции $f_n(x)$. Доказать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

РЕШЕНИЕ. Область определения функции $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ совпадает с множеством точек, где функция $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$ положительна, то есть $D(f_1)=(0,1)$. Кроме того, $f_0(x)=\ln\frac{1}{x}$ монотонно убывает, поэтому и все последующие функции монотонно убывающие. Поскольку каждая следующая функция – натуральный логарифм предыдущей, то её область определения – множество точек, где предыдущая функция положительна. Следовательно, область определения каждой следующей функции есть подмножество точек области определения предыдущей. Так как для $f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)$ область определения – интервал $(0,1)$, то и все $f_n(x)$ не определены вне $(0,1)$. Так как функции монотонно убывающие, то для нахождения правой границы области определения нужно найти аргумент, при котором предыдущая функция обращается в 0 (затем она становится отрицательна и $f_{n+1}(x)$ уже не определена). Построим область определения функции $f_n(x)$.

$$f_1(x)=\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow \frac{1}{x}=e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}\ \Rightarrow$$

$$D(f_2)=\left(0,\frac{1}{e}\right).$$

$$f_2(x)=\ln\left(f_1(x)\right)=\ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=1\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=e\Leftrightarrow \frac{1}{x}=e^e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^e}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f_3)=\left(0,\frac{1}{e^e}\right).$$

$$f_3(x)=\ln(f_2(x))=\ln\left(\ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)\right)=0\Leftrightarrow \ln\left(\ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right)=1\Leftrightarrow \ln\left(\ln\frac{1}{x}\right)=e\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{1}{x}=\exp(e)\Leftrightarrow \frac{1}{x}=\exp(\exp(e))\Leftrightarrow x=\frac{1}{\exp(\exp(e))}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D(f_4)=\left(0,\frac{1}{e^{e^e}}\right)=\left(0,\frac{1}{\exp(\exp(e))}\right).$$

$$f_n(x)=\ln(f_{n-1}(x))=\underbrace{\ln\left\{\ln\left\{\ldots\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right\}\right\}}_{n+1}=0\Leftrightarrow \qquad \frac{1}{x}=\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\Leftrightarrow x=\left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow D(f_n)=\left(0,\left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1}\right)^{-1}\right).$$

Итак, точная верхняя граница области определения функции $f_n(x)$: $a_n = \left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} \right)^{-1}$.

Следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^e} + \frac{1}{e^{e^e}} + \cdots + \left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} \right)^{-1} + \ldots$.

Этот ряд можно оценить сверху с помощью геометрической прогрессии.
Для этого используем неравенство $e^x > x+1$, справедливое для любого $x > 0$ (графики $y = x+1$ и $y = e^x$ касаются только в точке $x = 0$), а также то, что $y = e^x$ возрастающая функция. Получим:

$e > 2 \Rightarrow e^e > e^2 \Rightarrow \frac{1}{e^e} < \frac{1}{e^2}$.

$e^2 > 3$ и $e^e > e^2 \Rightarrow e^{e^e} > e^{e^2} > e^3 \Rightarrow \frac{1}{e^{e^e}} < \frac{1}{e^3}$

$e^{n-1} > n$ и

$$\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-2} > e^{n-1} \Rightarrow \underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} > e^n \Rightarrow \left(\underbrace{\exp\{\exp\{\ldots\exp(e)\}\}}_{n-1} \right)^{-1} < \frac{1}{e^n}$$

Итак, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ мажорируется геометрической прогрессией $1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \frac{1}{e^3} + \cdots + \frac{1}{e^n} + \ldots$ со знаменателем $q = \frac{1}{e} < 1$. Так как прогрессия сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ тоже сходится.