Ответы к заданию 1

1.1. **Определение приращения аргумента** Δx	Приращением аргумента Δx функции $y = f(x)$ называется разность между значением аргумента в точке $x = x_0$ и любой другой точке из некоторой окрестности точки $x_0 : \Delta x = x - x_0,\ x \in U_\delta(x_0)$.
1.2. **Определение приращения** Δy **функции** $y = f(x)$	Приращением Δy функции $y = f(x)$, соответствующим приращению аргумента Δx в точке $x = x_0$ называется разность между значением функции в точке $x = x_0 + \Delta x$ и в точке $x = x_0 : \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
1.3. **Определение производной функции** $y = f(x)$ **в точке** $x = x_0$	Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$. Предел отношения приращения Δy функции в этой точке (если он существует) к приращению Δx аргумента, когда $\Delta x \to 0$, называется производной функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Обозначается производная $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ одним из следующих способов: $f^{/}(x_0)$, или $y^{/}(x_0)$, или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $f^{/}\Big\vert_{x=x_0}$. Таким образом, $f^{/}(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.
1.4. **Определение операции дифференцирования функций**	Дифференцированием функций называют отыскание производных этих функций.

1.5.

Основные правила дифференцирования функций

Пусть c – константа, а $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в некоторой точке *x*. Тогда функции $u(x) \pm v(x)$, $c \cdot u(x)$, $u(x) \cdot v(x)$ и $\frac{u(x)}{v(x)}$ (где $v(x) \neq 0$) также имеют производные в этой точке, причем

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$ - производная **суммы** функций равна сумме производных этих функций;

2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ - производная **произведения** функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую и первой функции на производную второй;

3. $(cu)' = cu'$, $(\frac{u}{c})' = \frac{1}{c} \cdot u'$ - **постоянный множитель** выносят за знак производной;

4. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ - производная отношения двух функций (**частного**) равна отношению разности произведений производной числителя на знаменатель и числителя на производную знаменателя к квадрату знаменателя;

5. пусть функция $y = F(u)$ имеет производную в точке u_0, а функция $u = \varphi(x)$ - в точке $u_0 = \varphi(x_0)$. Тогда **сложная** функция $y = F(u(x))$ также имеет производную в точке x_0, причем

$y'(x_0) = F_u'(u_0) \cdot u_x'(x_0)$ - производная сложной функции равна производной этой функции по промежуточному аргументу *u*, умноженной на производную от промежуточного аргумента *u* по основному аргументу *x*.

1.6.

Производная постоянной функции

Производная постоянной функции равна **нулю**:

$$c' = 0.$$

1.7.

Производная степенной функции

Производная степенной функции равна показателю степени, умноженному на основание в степени, на единицу меньше, и умноженному на производную от основания:

$$(u^n(x))' = n \cdot u^{n-1} \cdot u_x'$$

1.8.

Производная синуса	Производная синуса равна косинусу **того же аргумента**, умноженному на производную аргумента: $(\sin u(x))' = \cos u \cdot u'_x$

1.9. $y' = (\sin x^5 + 10)' = \cos x^5 \cdot 5x^4 + 0$.

1.10.

Производная косинуса	Производная косинуса равна минус синусу **того же аргумента**, умноженному на производную аргумента: $(\cos u(x))' = -\sin u \cdot u'_x$.

1.11. $y' = (\cos 5x)' = -\sin 5x \cdot 5$.

1.12.

Производная тангенса	Производная тангенса равна единице, деленной на квадрат косинуса **того же аргумента**, умноженной на производную аргумента: $(tg\, u(x))' = \frac{1}{(\cos u)^2} \cdot u'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$.

1.13. $y' = (tg\sqrt[3]{2x})' = (tg(2x)^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{(\cos\sqrt[3]{2x})^2} \cdot \frac{1}{3}(2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x)^2}\,(\cos\sqrt[3]{2x})^2}$.

1.14.

Производная котангенса	Производная котангенса равна минус единице, деленной на квадрат синуса **того же аргумента** и умноженной на производную аргумента: $(ctg\, u(x))' = -\frac{1}{(\sin u)^2} \cdot u'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$

1.15. $y' = (ctg^3 5x)' = 3ctg^2 5x(-\frac{1}{\sin^2 5x}) \cdot 5 = -\frac{15 \cdot ctg^2 5x}{\sin^2 5x} = -\frac{15\cos^2 5x}{\sin^4 5x}$.

1.16.

Производная логарифма	Производная логарифмической функции равна единице, деленной на **аргумент логарифма** и на натуральный логарифм основания, умноженной на производную аргумента: $(\log_a u(x))' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'_x$.

1.17. $y' = (\lg(4\sin 2x))' = (\lg 4 + \lg\sin 2x)' = 0 + \dfrac{1}{2x \cdot \ln 10} \cdot 2 = \dfrac{1}{x \ln 10}$.

1.18.

Производная натурального логарифма

Производная натурального логарифма равна единице, деленной на **аргумент логарифма** и умноженной на производную аргумента:

$$(\ln u(x))' = \frac{1}{u} \cdot u'_x .$$

1.19. $y' = (\ln \sqrt[5]{tg^2 7x})' = (\dfrac{2}{5} \ln tg 7x)' = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{1}{tg 7x \cdot \cos^2 7x} \cdot 7 = \dfrac{14}{5\sin 7x \cos 7x} = \dfrac{28}{5\sin 14x}$.

1.20.

Производная показательной функции

Производная показательной функции равна этой функции, умноженной на натуральный логарифм основания и умноженной на производную показателя:

$$(a^{u(x)})' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$$

1.21. $y' = (6^{ctg\, 3x})' = 6^{ctg\, 3x} \ln 6 \cdot (-\dfrac{1}{\sin^2 3x}) \cdot 3 = -\dfrac{3 \cdot 6^{ctg\, 3x} \ln 6}{\sin^2 3x}$.

1.22.

Производная экспоненты

Производная экспоненты равна экспоненте, умноженной на производную показателя экспоненты:

$$(e^{u(x)})' = e^u \cdot u'_x .$$

1.23. $y' = (e^{\cos\frac{x}{2}})' = e^{\cos\frac{x}{2}}(-\sin\dfrac{x}{2}) \cdot \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} \cdot e^{\cos\frac{x}{2}}$.

1.24.

Производная арксинуса

Производная арксинуса равна единице, деленной на корень квадратный из единицы минус **аргумент** арксинуса в квадрате и умноженной на производную аргумента:

$$(\arcsin u(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x .$$

1.25. $y' = ((\arcsin 5x)^3)' = 3(\arcsin 5x)^2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5 = \dfrac{15(\arcsin 5x)^2}{\sqrt{1-25x^2}}$.

1.26.

Производная арккосинуса

Производная арккосинуса равна минус единице, деленной на корень квадратный из единицы минус **аргумент** арккосинуса в квадрате и умноженной на производную аргумента:

$$(\arcsin u(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x .$$

1.27. $y' = (\sqrt[3]{\arccos(7x^2+3)})' = \frac{1}{3}(\arccos(7x^2+3))^{-\frac{2}{3}} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{1-(7x^2+3)^2}}) \cdot 14x$.

1.28.

Производная арктангенса	Производная арктангенса равна единице, деленной на единицу плюс **аргумент** арктангенса в квадрате и умноженной на производную аргумента: $(arctg\, u(x))' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$

1.29. $y' = (\frac{1}{2^{arctg\, 3x}})' = (2^{-arctg\, 3x})' = 2^{-arctg\, 3x}(-\frac{1}{1+(3x)^2}) \cdot 3$.

1.30.

Производная арккотангенса	Производная арккотангенса равна минус единице, деленной на единицу плюс **аргумент** арккотангенса в квадрате и умноженной на производную аргумента: $(arctg\, u(x))' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$

1.31.

$$y' = (\ln \frac{arcctge^{2x}}{arctge^{4x}})' = (\ln arcctg\, e^{2x} - \ln arctg\, e^{4x})' =$$

$$= \frac{1}{arcctg\, e^{2x}}(-\frac{1}{1+e^{4x}}) \cdot e^{2x\cdot} 2 - \frac{1}{arctg\, e^{4x}} \cdot \frac{1}{1+e^{8x}} \cdot e^{4x} \cdot 4$$

1.32. Постоянный множитель выносят за знак производной;
производная арктангенса;
производная экспоненты.

1.33. Постоянный множитель выносят за знак производной;
производная логарифма;
производная суммы;
производная экспоненты;
производная постоянной функции.

1.34. Производная суммы;
производная постоянной функции;
производная частного;
производная степенной функции;
производная синуса;
производная косинуса.

1.35.

Производная неявно заданной функции	Пусть функция $y = f(x)$, обладающая производной в точке x, задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Тогда производную $y'(x)$ можно найти, продифференцировав уравнение $F(x, y) = 0$ с учетом того, что y является функцией аргумента x. Из полученного уравнения найти производную.

1.36.Производная неявно заданной функции;
производная произведения;
производная суммы;
производная синуса;
производная косинуса.

1.37.

Метод логарифмическо го дифференциров ания	Сначала функцию логарифмируют, потом находят производную по правилу дифференцирования неявно заданной функции: $y = f(x) \Rightarrow \ln y = \ln f(x)$. $\frac{1}{y} \cdot y' = (\ln f(x))' \Rightarrow y' = f(x) \cdot (\ln f(x))'$.

1.38. Метод логарифмического дифференцирования применяют в тех случаях, когда функция имеет много сомножителей в числителе и в знаменателе, а так же если это показательно – степенная функция.

1.39. Производная неявно заданной функции;
производная произведения;
производная синуса;
производная логарифма;
производная арктангенса.

1.40.

Производная показательно – степенной функции	Производная показательно – степенной функции равна сумме производных этой функции как показательной и как степенной: $(u^v)' = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$

1.41.

Определение линии, заданной параметрически	Пусть на некотором множестве $X \subset R$ заданы две функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$. Тогда множество всех точек на плоскости Oxy с координатами $(x(t), y(t))$, где $t \in X$, называют кривой (или линией), заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$, а функцию $y(x)$ – параметрически заданной этими уравнениями.

1.42.

Теорема о производной параметрически заданной функции	Пусть функция $y=f(x)$ задана параметрически уравнениями $\begin{cases} x=x(t); \\ y=y(t). \end{cases}$ Тогда, если функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ имеют производные в точке в точке t_0, причем $x^{/}(t_0)\neq 0$,а функция $y=f(x)$ имеет производную в точке $x_0=x(t_0)$, тогда эта производная находится по формуле: $y^{/}(x_0)=\dfrac{y_t^{/}(t_0)}{x_t^{/}(t_0)}$ или $y_x^{/}=\dfrac{y_t^{/}}{x_t^{/}}$.

1.43. Производная параметрически заданной функции;
производная арккосинуса;
производная арксинуса;
производная суммы;
производная степенной функции;
производная постоянной функции.

Ответы к заданию 2

2.1.

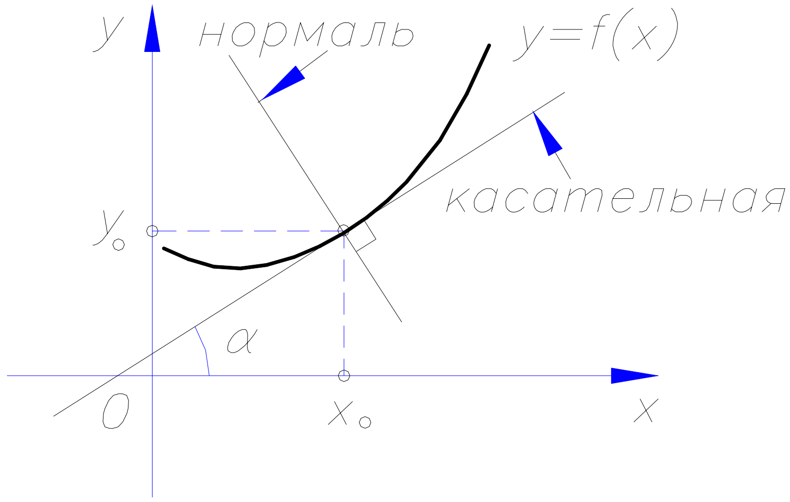
Определение касательной к графику функции	Касательной к графику функции в точке $M_0(x_0,y_0)$ называют предельное положение секущей, соединяющей точки $M_0(x_0,y_0)$ и $M(x,y)$ графика, при стремлении точки M к точке M_0 по графику.

2.2.

Геометрический смысл производной	Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 равна тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в этой точке и положительным направлением оси Ox: $y^{/}(x_0)=tg\alpha$, где α - угол между касательной к графику функции в точке x_0 и положительным направлением оси Ox.

2.3.

Уравнение касательной	Пусть функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет производную $y^{/}(x_0)=tg\alpha$. Тогда в точке $M_0(x_0,y_0)$ существует касательная к графику этой функции, уравнение которой: $y-y_0=f^{/}(x_0)(x-x_0)$.



2.4.

Определение нормали	Прямая линия, проходящая через точку касания, перпендикулярно касательной, называется нормалью к кривой.

2.5.

Уравнение нормали	Пусть функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет производную $y^{/}(x_0) = tg\alpha$. Тогда в точке $M_0(x_0, y_0)$ существует нормаль к графику этой функции, уравнение которой: $y - y_0 = -\dfrac{1}{f^{/}(x_0)}(x - x_0)$. Если $f^{/}(x_0) = 0$ (то есть касательная горизонтальна), то нормаль вертикальна и имеет уравнение $x = x_0$.

2.6.

Угол между линиями в точке их пересечения	Пусть даны две пересекающиеся в точке $M_0(x_0, y_0)$ кривые $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем обе функции имеют производные в точке x_0. Тогда углом между этими кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке $M_0(x_0, y_0)$. Этот угол φ можно найти из формулы: $tg\varphi = \dfrac{f_2^{/}(x_0) - f_1^{/}(x_0)}{1 + f_1^{/}(x_0) \cdot f_2^{/}(x_0)}$.

Ответы к заданию 3

3.1.

Первое правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки, и $g^{/}(x) \neq 0$ для всех $x \in U_\delta(x)$, $x \neq x_0$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}.$$

Второе правило Лопиталя

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $U_\delta(x_0)$ точки x_0, за исключением, может быть, самой этой точки, и $g^{/}(x) \neq 0$ для всех $x \in U_\delta(x)$, $x \neq x_0$. Тогда, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ (в этом случае говорят, что в точке x_0 имеет место неопределенность вида $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$) и существует $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, причем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}.$$

Если отношение $\frac{f^{/}(x)}{g^{/}(x)}$ в свою очередь представляют собой неопределенность вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$, то правило Лопиталя (при условии выполнения соответствующих ограничений на функции $f^{/}(x)$ и $g^{/}(x)$) можно применять второй раз и т. д.

3.2. К неопределенностям вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$ можно преобразовывать также неопределенности вида $\{0\cdot\infty\}$, $\{\infty-\infty\}$, $\{1^\infty\}$, $\{0^0\}$, $\{\infty^0\}$.

3.3.

Вид неопределенности	Действия	Результат действий (c, d – постоянные)
$\{\infty - \infty\}$	1. дроби привести к общему знаменателю; 2. умножить и разделить разность функций на сопряженное выражение, если это разность квадратных корней; 3. умножить и разделить разность функций на неполный квадрат суммы этих функций, если это разность корней кубических; 4. преобразовать тождественно $f(x) - h(x) = \dfrac{\dfrac{1}{h(x)} - \dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x) \cdot h(x)}}$	$\left\{\dfrac{c}{0}\right\} = \infty$; $\left\{\dfrac{c}{\infty}\right\} = 0$; $\left\{\dfrac{0}{c}\right\} = 0$; $\left\{\dfrac{\infty}{c}\right\} = \infty$; $\left\{\dfrac{c}{d}\right\} = A$ $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.

3.4.

Вид неопределенности	Действия	Результат действий
$\{0 \cdot \infty\}$	Тождественно преобразовать произведение функций в отношения: $f(x) \cdot h(x) = \dfrac{f(x)}{\dfrac{1}{h(x)}} = \dfrac{h(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}$	$\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$ - применить правило Лопиталя.

3.5.

Вид неопределенностей	Действия	Результат действий
$\left\{1^{\infty}\right\}$, $\left\{0^{0}\right\}$, $\left\{\infty^{0}\right\}$.	1. сначала прологарифмировать функцию, вычислить предел логарифма функции, а затем найти предел функции: $y = u^{v} \Rightarrow \ln y = v \ln u$; $\lim\limits_{x \to a} \ln y = A \Rightarrow \lim\limits_{x \to a} y = e^{A}$. 2. использовать основное логарифмическое тождество, вычислить предел показателя экспоненты: $y = u^{v} = e^{v \cdot \ln u}$	См. выше

Ответ к заданию 4

4.1.

Теорема о свойстве непрерывной на отрезке функции	Непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция достигает на этом отрезке, по меньшей мере, один раз наибольшего значения M и наименьшего значения m.

Ответы к заданию 5

5.1.

Определение производной второго порядка	Производная от функции $f'(x)$ (производной первого порядка) называется производной второго порядка от функции $f(x)$ (или второй производной) и обозначается $f''(x)$.

5.2.

$$y' = (\ln\sin\frac{x}{4})' = \frac{1}{\sin\frac{x}{4}}\cos\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{4}ctg\frac{x}{4};$$

$$y'' = (\frac{1}{4}ctg\frac{x}{4})' = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{4}}\cdot\frac{1}{4} = -\frac{1}{16\sin^2\frac{x}{4}}$$

5.3.

Определение производной n– го порядка	Производная от функции $f^{(n-1)}(x)$ (производной эн-минус первого порядка) называется производной энного порядка от функции $f(x)$ (или энной производной) и обозначается $f^{(n)}(x)$.

5.4. $y^{(5)} = (3^{4x})^{(5)} = 4^5(\ln 3)^5 3^{4x}$, поскольку при каждом последовательном дифференцировании добавляется сомножитель $4\ln 3$.

5.5.

Производная высших порядков параметрически заданной функции	Производная второго порядка функции, заданной параметрически уравнениями $\begin{cases} y = y(t); \\ x = x(t) \end{cases}$, может быть найдена по формуле: $y''_{xx} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$, А производная энного порядка – по формуле: $y^{(n)}_x = \dfrac{(y^{(n-1)}_x)'_t}{x'_t}$.

5.6. Найдем сначала производную первого порядка функции $\begin{cases} y = 3t^2; \\ x = 4t \end{cases}$.

$y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{6t}{4} = \dfrac{3}{2}t$.

Производная второго порядка данной функции равна $y''_{xx} = \dfrac{(\frac{3}{2}t)'_t}{(4t)'_t} = \dfrac{\frac{3}{2}}{4} = \dfrac{3}{8}$.

5.7.

Формула Тейлора	Пусть функция $f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производные до (n+1)-го порядка включительно. Тогда для любой точки x из этой окрестности имеет место формула Тейлора $f(x) = f(x_0) + \dfrac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad x \to x_0.$ Последнее слагаемое в формуле Тейлора называется остаточным членом в форме Лагранжа. Точка c в остаточном члене в форме Лагранжа берется из интервала (x, x_0). $o((x - x_0)^n)$ - остаточный член в форме Пеано.

5.8.

Формула Маклорена	В случае, когда $x_0 = 0$ формула Тейлора принимает вид $f(x) = f(0) + \dfrac{f'(0)}{1!}x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}}{n!}x^n + o(x^n)$ и называется формулой Маклорена.

5.9. Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций имеет следующий вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha\, x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + o(x^n).$$

5.10.

1. Найдите все отличные от нуля производные данного многочлена;
2. Вычислите значения функции и производных в точке $x_0 = -1$;

3. Запишите разложение многочлена по формуле Тейлора;
4. Сделайте проверку: раскрыв скобки в разложении многочлена по формуле Тейлора, получите исходный многочлен.

Ответ: $P_3(x) = 1 - 11(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3$.

5.10. $e^{2-x} = e^2 - e^2 x + \frac{e^2 x^2}{2!} - \frac{e^2 x^3}{3!} + \frac{e^2 x^4}{4!} + o(x^4), \quad x \to 0$.

Ответы к заданию 6

6.1.

Определение дифференцируемой в точке функции	Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Если приращение Δy функции $y = f(x)$ можно представить в виде $$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$ где A – постоянное число в точке x_0 ; $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 .

6.2.

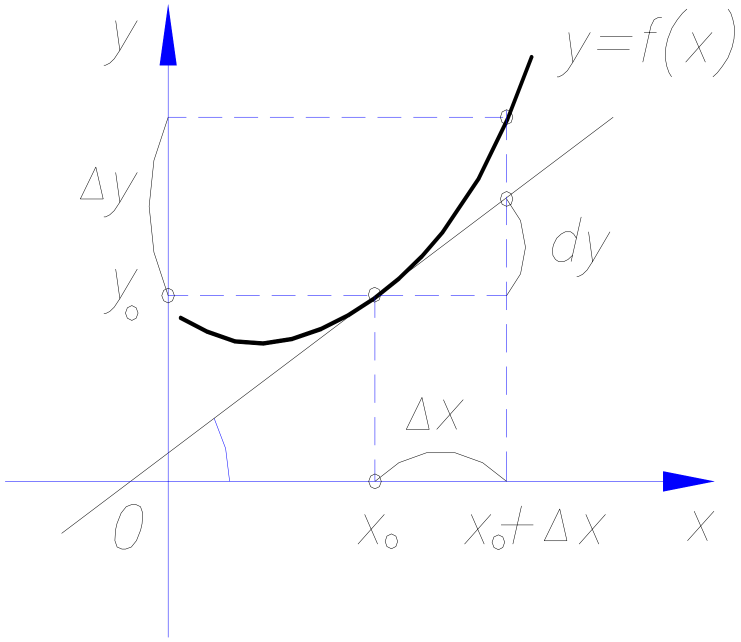
Определение дифференциала функции	Главная часть приращения Δy дифференцируемой в точке x_0 функции $y = f(x)$, то есть $$A \cdot \Delta x$$ называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$: $$dy = df(x_0) = A \cdot \Delta x.$$ Замечание. Если $y = x$, то $dy = dx = \Delta x$.

6.3.

Теорема о связи функции, имеющей производную, и дифференцируемой в точке	Функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x_0)$, при этом $A = f'(x_0)$. Следовательно, $$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx.$$

6.4.

Геометрический смысл дифференциала	Дифференциал функции в точке x_0 равен приращению ординаты касательной, проведенной к графику функции в этой точке, соответствующему приращению аргумента Δx



6.5. Умножив правые части формул таблицы производных на дифференциалы аргументов, получим таблицу дифференциалов.

Например,

$dc = 0$, $du = u_x^{/} dx$;

$d(u^n) = nu^{n-1} u_x^{/} dx = nu^{n-1} du$;

$d(a^u) = a^u \ln a \cdot u_x^{/} dx = a^u \ln a \cdot du$; и т. д.

6.6. Найдем дифференциал функции $y = x\sqrt{x^2 - 1} + \ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|$.

При отыскании производной воспользуемся равенством: $\frac{\operatorname{sgn} u}{|u|} = \frac{1}{u}$, $u \neq 0$ и правилом отыскания производной модуля функции $(|u(x)|)^{/} = \operatorname{sgn} u \cdot u_x^{/}$, где функция сигнум u – знак функции u : $\operatorname{sgn} u = \begin{cases} 1, & u > 0; \\ -1, & u < 0; \\ 0, & u = 0. \end{cases}$

$$y^{/} = \sqrt{x^2 - 1} + x\frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\operatorname{sgn}(x + \sqrt{x^2 - 1})}{\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|}(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}) =$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{\operatorname{sgn}(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 - 1} + x)}{\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right|\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Поэтому $dy = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$.

Ответы к заданию 7

7.1.

Теорема о монотонности функции на интервале	Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ $\forall x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ возрастает (соответственно – убывает) на этом интервале. Если же $f'(x)\ge 0$ $(f'(x)\le 0)$ $\forall x\in(a,b)$, то функция $f(x)$ не убывает (соответственно, –не возрастает) на этом интервале, то есть $\forall x_1,x_2\in(a,b): x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$ (соответственно $f(x_1)\ge f(x_2)$).

Например, найдем интервалы возрастания и убывания функции $f(x)=(x-2)^2(x-1)$.
Функция определена на всей числовой прямой, а ее производная равна
$f'(x)=2(x-2)(x-1)+(x-2)^2=(x-2)(2x-2+x-2)=(x-2)(3x-4)$.
Функция $f(x)$ возрастает тогда и только тогда, когда $f'(x)>0$, то есть
$(x-2)(3x-4)>0$, откуда $x\in(-\infty,\frac{4}{3})\cup(2,\infty)$.
Аналогично, данная функция убывает тогда и только тогда, когда $f'(x)<0$, то есть $(x-2)(3x-4)<0$, откуда $x\in(\frac{4}{3},2)$.

7.2.

Определение точки локального максимума (локального минимума)	Точка x_0 называется точкой локального максимума (локального минимума), если существует такая окрестность $U_\delta(x_0)$ этой точки, что $f(x)<f(x_0)$ $\forall x\in U_\delta(x_0),\quad x\ne x_0$ (соответственно $f(x)>f(x_0)$ $\forall x\in U_\delta(x_0),\quad x\ne x_0$).

7.3.

Определение точек локального экстремума	Точки локального максимума и минимума называются точками локального экстремума, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

7.4.

Теорема Ферма (необходимое условие экстремума)	Если x_0 - точка локального экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x_0)=0$), либо не существует.

7.5.

Первое достаточное	Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой ее окрестности (за исключением, быть может, самой

условие экстремума	точки x_0). Тогда, если производная функции $f^{/}(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка локального экстремума (если с «+» на «- » - локальный максимум, если же с «-» на «+» – локальный минимум).

7.6.

Определение критических точек первого порядка	Точки области определения функции $f(x)$, в которых ее первая производная не существует или равна нулю, называются критическими точками первого порядка

Точки экстремума следует искать среди критических точек первого порядка.

Например, найдем экстремумы функции $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$. Функция определена и дифференцируема для всех положительных значений аргумента: $x>0$, причем $f^{/}(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. Критическая точка одна $x_1=e$, поскольку в точке $x=0$ функция терпит разрыв, так как не определена в самой точке и слева от этой точки. Исследуем знак производной в окрестности точки $x_1=e$.

x	$(0,e)$	e	(e,∞)
$f^{/}(x)$	+	0	—
$f(x)$	Функция возрастает	Локальный максимум $f_{\max}(e)=\dfrac{1}{e}$	Функция убывает

Ответ: $f_{\max}=f(e)=\dfrac{1}{e}$.

7.7.

Определение стационарной точки	Точка дифференцируемой функции, в которой производная первого порядка равна нулю, называется стационарной точкой: $f^{/}(x_0)=0,\Rightarrow x_0$ - стационарная точка.

7.8

Второе достаточное условие экстремума	Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные первого и второго порядков. Тогда, если $f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)\neq 0$, то x_0 - точка локального экстремума. В частности, если $f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимума, Если же $f'(x_0)=0,\quad f''(x_0)>0$, то x_0 - точка локального минимума.

Например, найдем экстремумы функции $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$.

Функция определена и дифференцируема на всей числовой прямой, причем

$$f'(x)=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Стационарные точки две (в стационарных точках производная первого порядка ровна нулю) : $x_1=-1,\quad x_2=1$.

Найдем производную второго порядка исследуемой функции

$$f''(x)=\frac{-2x(1+x^2)^2-(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}=\frac{-2x-2x^3-4x+4x^3}{(1+x^2)^3}=\frac{-6x-2x^3}{(1+x^2)^3}$$

и вычислим ее значения в стационарных точках:

$f''(-1)=1>0\Rightarrow x_1=-1$ - точка локального минимума;

$f''(1)=-1<0\Rightarrow x_2=1$ - точка локального максимума.

Ответ: $f_{\min}=f(-1)=-\dfrac{1}{2},\quad f_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

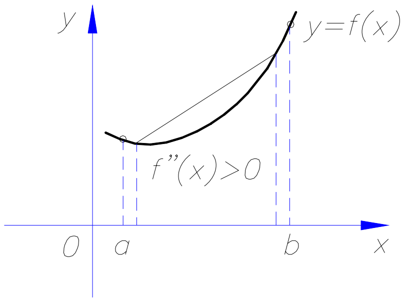
Ответы к заданию 8

8.1.

Определение выпуклой вверх (выпуклой вниз) функции	Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b) называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на этом интервале, если точки любой дуги графика функции расположены выше (соответственно, ниже) хорды, стягивающей эту дугу.

Иногда выпуклость вверх (соответственно, выпуклость вниз) называют просто выпуклостью (соответственно, вогнутостью).

График выпуклой вверх (выпуклой вниз) на интервале (a,b) функции также называют выпуклым вверх (соответственно, выпуклым вниз).



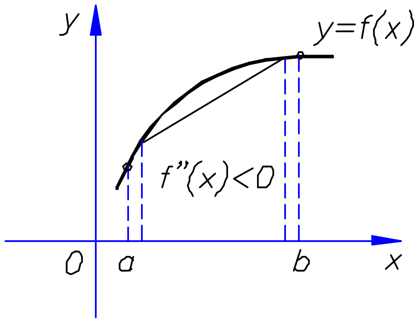


График функции выпуклый вниз **График функции выпуклый вверх**

Можно дать другое, эквивалентное определение выпуклости вверх (выпуклости вниз):

Определение выпуклой вверх (выпуклой вниз) функции

Функция $f(x)$, определенная на интервале (a,b) называется выпуклой вверх (выпуклой вниз) на этом интервале, если график этой функции при $x \in (a,b)$ расположен ниже (соответственно, выше) касательной, проведенной в любой его точке.

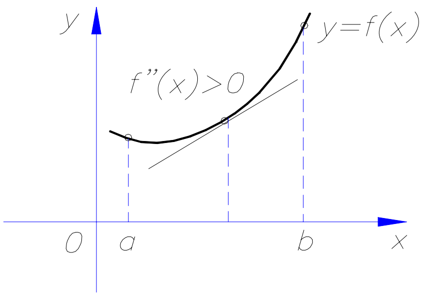


График функции выпуклый вниз

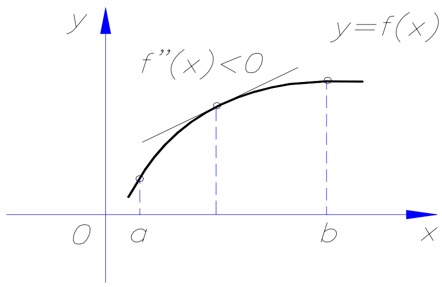


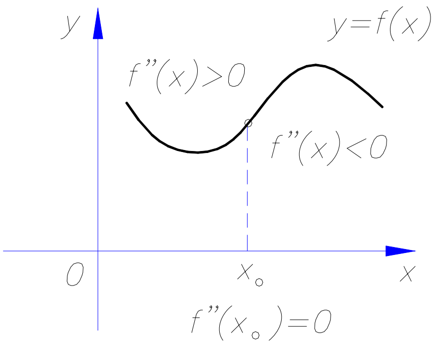
График функции выпуклый вверх

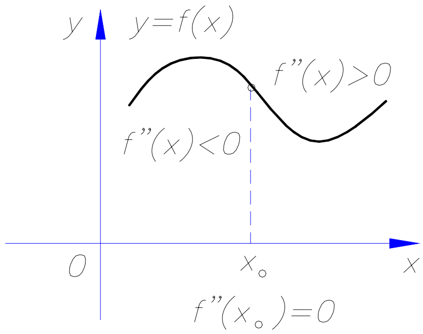
8.2.
Достаточные условия выпуклости вверх

Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную на интервале (a,b). Тогда, если $f''(x) < 0$ (соответственно, $f''(x) > 0$) на этом интервале, то функция $f(x)$ выпукла вверх (соответственно, выпукла вниз) на нем.

8.3.
Определение точки перегиба

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Тогда, если при переходе через эту точку функция меняет направление выпуклости, то эта точка называется точкой перегиба функции $f(x)$. Точка $(x_0 f(x_0))$ при этом называется точкой перегиба графика функции $f(x)$.





x_0 -точка перегиба графика функции

8.4.

Необходимое условие точки перегиба | Если x_0 - точка перегиба функции $f(x)$, то в этой точке вторая производная функции либо равна нулю $(f''(x_0))$, либо не существует.

8.5.

Определение критических точек второго порядка | Точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует, называются критическими точками второго порядка.

Точки перегиба следует искать среди критических точек второго порядка.

8.6.

Первое достаточное условие точки перегиба | Пусть функция $f(x)$ имеет первую производную в точке x_0 и вторую производную в некоторой ее окрестности (за исключением, быть может, самой точки x_0). Тогда, если вторая производная функции меняет знак при переходе через точку x_0, то x_0 - точка перегиба.

8.7.

Второе достаточное условие точки перегиба | Пусть в точке x_0 функция $f(x)$ имеет производные до третьего порядка включительно. Тогда, если $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то x_0 - точка перегиба этой функции.

При выполнении задания 8 $_{\text{номер варианта}}$ а) воспользуйтесь **Таблицей 4**, пунктом 2 (стр.).

Ответы к заданию 9

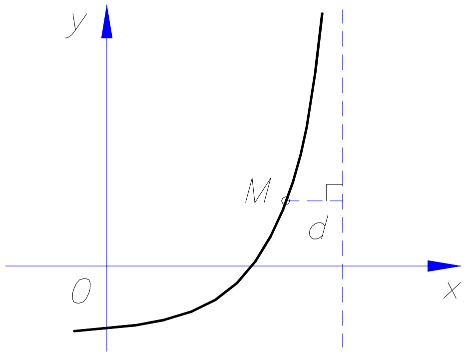
9.1.

Определение асимптоты графика функции | Прямая линия *m* называется асимптотой графика функции $y=f(x)$, если расстояние *d* от точки *M*, лежащей на этом графике, до прямой *m* стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки по графику от начала координат в бесконечность.

9.2.

Определение вертикальной асимптоты

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ равен бесконечности.



Пунктирная прямая – вертикальная асимптота

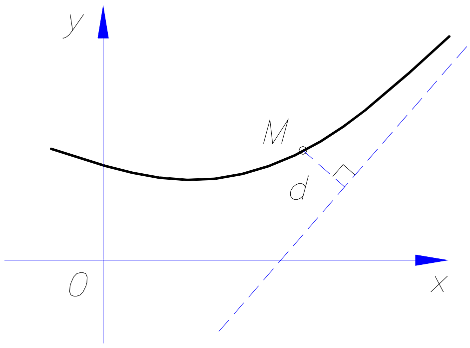
9.3.

Определение наклонной асимптоты

Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$), если $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$

(соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0$).

Тогда, когда существуют пределы



Пунктирная прямая – наклонная асимптота

9.4.

Необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты

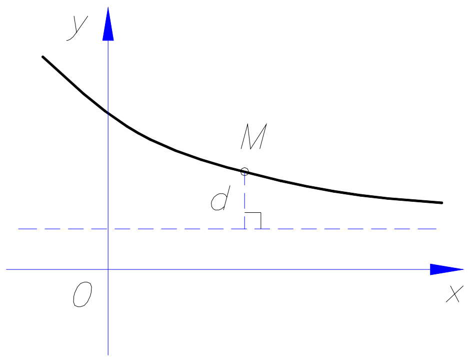
Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существуют пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$$

(соответственно, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = b$).

9.5.

Необходимые и достаточные условия существования горизонтальной асимптоты	Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (при $x \to -\infty$) тогда и только тогда, когда существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (соответственно, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$).



Пунктирная прямая – горизонтальная асимптота

При выполнении задания 9 $_{\text{номер варианта}}$ а) воспользуйтесь **Таблицей 3**, пунктами 2 и 6 (стр.   ).

Ответы к заданию 10

10.1.
$x = -7$ - точка минимума; $f^{/}(-7)$ не существует;
$x = -5$ - точка максимума; $f^{/}(-5) = 0$;
$x = -1$ - точка минимума; $f^{/}(-1) = 0$;
$x = 5$ - точка максимума; $f^{/}(5) = 0$;
$x = 6$ - точка минимума; $f^{/}(6)$ - не существует.
10.2.
$x = -3$ - точка перегиба; $f^{//}(-3) = 0$ (или не существует);
$x = 8$ - точка перегиба; $f^{//}(8) = 0$ (или не существует).
Точка $x = 2$ не является точкой перегиба графика функции (несмотря на то, что интервал вогнутости сменяется интервалом выпуклости), так как функция терпит разрыв в этой точке.

10.3.
Логарифмическая функция определена для тех значений аргумента, которые являются положительными:

$\frac{x+6}{x} > 0 \Rightarrow \frac{(x+6)x}{x^2} > 0$. Числителю соответствует квадратный трехчлен с корнями $x_1 = -6, \quad x_2 = 0$. Положительным значениям аргумента данной логарифмической функции соответствуют интервалы $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$. То есть областью определения функции являются интервалы $(-\infty, -6) \cup (0, \infty)$.

10.4.

Для отыскания вертикальных асимптот вычислим пределы в точке $x_1 = -6$ - левосторонний, в точке $x_2 = 0$ - правосторонний.

$\lim\limits_{x \to -6-0} \ln \frac{x+6}{x} = \left\{ \ln \frac{-6-0+6}{-6} \right\} = \left\{ \ln \frac{0}{6} \right\} = -\infty \Rightarrow x = -6$ - вертикальная асимптота;

$\lim\limits_{x \to +0} \ln \frac{x+6}{x} = \left\{ \ln \frac{0+6}{0} \right\} = \left\{ \ln \frac{6}{0} \right\} = \infty \Rightarrow x = 0$ - вертикальная асимптота.

10.5.

Исследуем функцию на четность и нечетность.

$f(-x) = \ln \frac{-x+6}{-x} \neq f(x) = \ln \frac{x+6}{x}$;

$f(-x) = \ln \frac{-x+6}{-x} \neq -f(x) = -\ln \frac{x+6}{x}$.

Следовательно, исследуемая функция является функцией общего вида.

10.6.

Очевидно, функция не является периодической.

10.7.

Найдем точки пересечения графика функции с осями координат.

С осью *Oy* график функции не пересекается, так как точка $x = 0$ не принадлежит области допустимых значений функции *D*.

Пусть $f(x) = 0 \Rightarrow \ln \frac{x+6}{x} = 0 \Rightarrow \frac{x+6}{x} = 1 \Rightarrow x + 6 = x$ - полученное уравнение решений не имеет, то есть точек пересечения графика с осью *Ox* тоже нет.

10.8.

Найдем наклонные асимптоты, если они существуют.

$k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{\ln \frac{x+6}{x}}{x} = \left\{ \frac{\ln 1}{\infty} \right\} = 0$;

$b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \ln \frac{x+6}{x} = \ln 1 = 0$.

Значит, график функции имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ - ось *Ox*.

10.9.

Производная первого порядка данной функции равна

$f'(x) = (\ln\frac{x+6}{x})' = (\ln(x+6) - \ln x)' = \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x}.$

Исследуем знак первой производной:

$f'(x) = \frac{1}{x+6} - \frac{1}{x} = \frac{-6}{x(x+6)}.$

x	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	—	Не существует	Не существует	Не существует	+
$f(x)$	Убывает	$-\infty$	Не определена	∞	Возрастает

Итак, точек экстремума исследуемая функция не имеет.

10.10.

Найдем производную второго порядка данной функции.

$f''(x) = (\frac{1}{x+6} - \frac{1}{x})' = -\frac{1}{(x+6)^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{-x^2 + x^2 + 12x + 36}{x^2(x+6)^2} = \frac{12(x+6)}{x^2(x+6)^2} = \frac{12}{x^2(x+6)}.$

Исследуем знак второй производной.

x	$x < -6$	$x = -6$	$-6 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	—	Не существует	Не существует	Не существует	+
$f(x)$	График выпуклый	$-\infty$	Не определена	∞	График вогнутый

10.11.

Изобразим функцию на графике.